الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

$\ln x$

5

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 25

◀ التمريـــــن

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{(lnx)^2}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ مبينا المستقيبات المقاربة لـ (C_f) .

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2) m عدد حقيقي موجب تماما.

لتكن النقط A_m ذوات الفاصلة m ، والمستقيم (T_m) مماس (C_f) في النقط A_m .

أ/ اكتب بدلالة m معادلة المماس (T_m) .

ب/ عين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0;0)$.

ج/ اكتب معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها.

3) مثّل بيانيا المستقيمات (T_m) والمنحني (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{(ln|x|)^2}{x}$$

4) بيّن أن الدالة g فردية.

5) بيّن أنه يمكن رسم (C_g) منحني الدالة g انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه.

الخليل للرياضيات

◀ حل التمريـــن

(I)

1) أ/ حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{(lnx)^2}{x}\right] = +\infty$$

حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} [f(x)] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{(lnx)^2}{x}\right]$$

نضع $t = \ln x$ أي $e^t = x$ نجد:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{(lnx)^2}{x}\right] = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{t^2}{e^t}\right] = 0$$

لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{t^n}{e^t}\right] = 0$

- <u>التفسير الهندسي:</u>

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $x = 0$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 0$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

- <u>دراسة $f'(x)$:</u>

$$f'(x) = \frac{\left(2\frac{1}{x}\ln x\right)(x) - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{(2 - \ln x)\ln x}{x^2}$$

لدينا: $x^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط:

$$1)\ \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$2)\ 2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

ومنه:

- <u>جدول تغيرات الدالة f :</u>

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

2) أ/ كتابة معادلة المماس (T_m) :

$$\begin{aligned}(T_m): y &= f'(m)(x-m)+f(m)\\ &= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)(x-m)+\frac{(\ln m)^2}{m}\\ &= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)x-\frac{(2-\ln m)\ln m}{m}+\frac{(\ln m)^2}{m}\\ &= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)x+\frac{2(\ln m)^2-2\ln m}{m}\\ &= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)x+\frac{2\ln m\,(\ln m-1)}{m}\end{aligned}$$

ب/ تعيين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0;0)$:

(T_m) يشمل المبدأ معناه:

$$\begin{aligned}0 &= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)(0)+\frac{2\ln m\,(\ln m-1)}{m}\\ &\Rightarrow \frac{2\ln m\,(\ln m-1)}{m}=0\\ &\Rightarrow 2\ln m\,(\ln m-1)=0\\ &\Rightarrow \begin{cases}2\ln m=0\\ \ln m-1=0\end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases}\ln m=0\\ \ln m=1\end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases}m=1\\ m=e\end{cases}\end{aligned}$$

ج/ كتابة معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها:

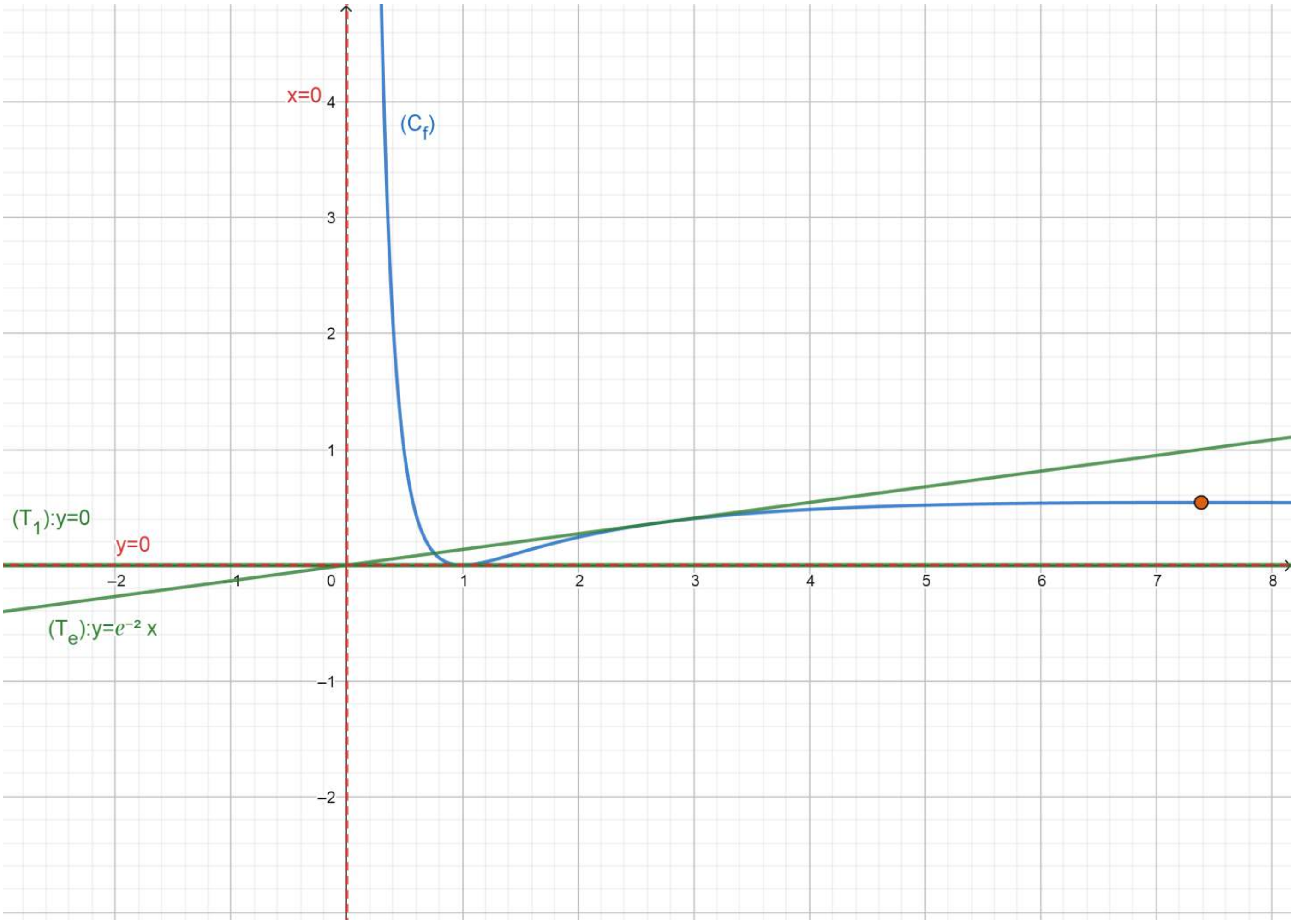
$$\begin{aligned}(T_1): y &= 0x+0\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T_e): y &= \left(\frac{(2-1)\times 1}{e^2}\right)x+\frac{2(1-1)}{e}\\ &= \frac{1}{e^2}x\\ &= e^{-2}x\end{aligned}$$

3) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 0$ و $y = 0$
- نعين النقطة الحدية ذات الاحداثيات $(e^2; 4e^{-2})$
- نرسم المماسين: (T_1) و (T_e)
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(II)

4) تبيين أن الدالة g فردية:

تذكير

دراسة شفعية دالة (زوجية / فردية):

لتبيين أنّ الدالة f فردية نبين أنّ $\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

لتبيين أنّ الدالة f زوجية نبين أنّ $\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

لدينا $(-x) \in \mathbb{R}^*$

ولدينا:

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{(ln|-x|)^2}{-x} \\ &= -\frac{(ln|x|)^2}{x} \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة g فردية.

5) تبيين أنه يمكن رسم (C_g) منحنى الدالة g انطلاقا من (C_f) :

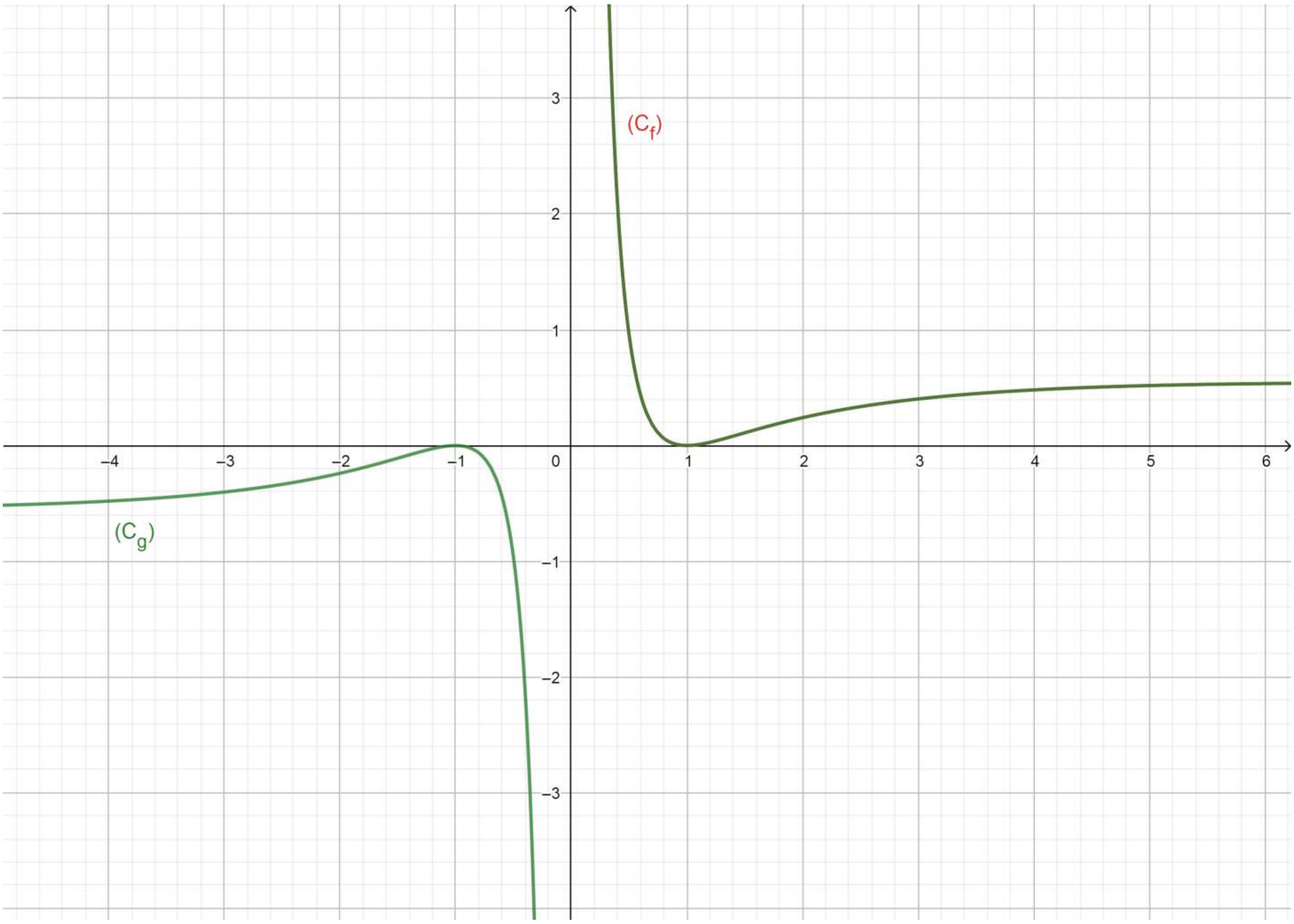
لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} \dfrac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ \dfrac{(\ln(-x))^2}{x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ -\dfrac{(\ln(-x))^2}{-x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لما $x > 0$: (C_g) ينطبق على (C_f)

ولما $x < 0$: (C_g) يناظر (C_g) بالنسبة للمبدأ

- تمثيل (C_g)



◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►