الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

$\ln x$

④

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 24

التمريـــــن

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=(\ln x)^3+1$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) حل المعادلة $g(x)=0$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=(\ln x)^2+1-\frac{2}{\ln x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ يكون:

$$f'(x)=2\frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$$

3) استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=(\ln x)^2+1$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة h .

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-h(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

3) ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) .

4) بين أن (C_h) يقبل نقطة انعطاف A يُطلب احداثييها .

5) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A .

6) احسب $f(e)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

7) مثل بيانيا في نفس المعلم كلا من (C_f) ، (C_h) و (T) .

8) نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$e^m(\ln x)^3+e^m(\ln x)-\ln x-2e^m=0\ ...(E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E)

◀ حل التمريــن

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}[g(x)] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}[(\ln x)^3 + 1] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty}[g(x)] = \lim_{x \to +\infty}[(\ln x)^3 + 1] = +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 3\frac{1}{x}(\ln x)^2$$

لدينا: $g'(x) > 0$

و $g'(1) = 0$

ومنه

- جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

2) حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Rightarrow (\ln x)^3 + 1 \\ &\Rightarrow (\ln x)^3 = -1 \\ &\Rightarrow \ln x = -1 \\ &\Rightarrow x = e^{-1} \end{aligned}$$

اذن حلول المعادلة $g(x) = 0$:

$$s = \{e^{-1}\}$$

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}[f(x)] = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{< \\ x\to 1}}[f(x)] = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}}\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right] = -\frac{2}{0^-} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x\to 1}}[f(x)] = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right] = -\frac{2}{0^+} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to +\infty}[f(x)] = \lim_{x\to +\infty}\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right] = +\infty$$

- <u>التفسير الهندسي:</u>

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 1$

2) تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ يكون: $f'(x) = 2\frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$:

$$f'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x - \left(\frac{-\frac{2}{x}}{(\ln x)^2}\right) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x(\ln x)^2} = 2\left[\frac{(\ln x)^3 + 1}{x(\ln x)^2}\right] = \frac{2g(x)}{x(\ln x)^2}$$

3) استنتاج إشارة $f'(x)$:

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$.

الخليل للرياضيات

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(III)

1) دراسة تغيرات الدالة h :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} [h(x)] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} [(\ln x)^2 + 1] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} [h(x)] = \lim_{x \to +\infty} [(\ln x)^2 + 1] = +\infty$$

- دراسة $h'(x)$:

$$h'(x) = \frac{2}{x} \ln x$$

لدينا $\frac{2}{x} > 0$ ومنه :

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول تغيرات الدالة h:

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - h(x)]$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - h(x)] = \lim_{x \to +\infty} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} - (\ln x)^2 - 1 \right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{2}{\ln x} \right]$$
$$= 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_h) و (C_f) متقاربان بجوار $+\infty$

3) دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) :

نحرس إشارة الفرق $f(x) - h(x)$:

$$f(x) - h(x) = \frac{2}{-\ln x}$$

لدينا:

$$-\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-h(x)$	‖ $+$	‖ $-$	

- الوضعية:

• (C_f) فوق (C_h) لما $x \in]0;1[$.

• (C_f) تحت (C_h) لما $x \in]1;+\infty[$

4) تبيين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف:

لدينا:

$$h''(x) = \frac{-2}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\times\frac{2}{x}$$
$$= \frac{-2\ln x + 2}{x^2}$$
$$= \frac{2}{x^2}(1-\ln x)$$

لدينا $\frac{2}{x^2} > 0$ ومنه الإشارة من $(1-\ln x)$:

$$1-\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$
$$\Rightarrow x = e$$

x	0	e	$+\infty$
$h''(x)$	‖ $+$	0	$-$

لدينا $h''(x)$ انعدمت وغيرت اشارتها ومنه المنحني (C_h) يقبل نقطة انعطاف احداثييها $A(e;2)$

5) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A :

$$(T): y = h'(e)(x-e) + h(e)$$
$$= \frac{2}{e}\ln e\,(x-e) + (\ln e)^2 + 1$$
$$= \frac{2}{e}x$$

6) حساب $f(e)$:

$$f(e) = (\ln e)^2 + 1 - \frac{2}{\ln e} = 0$$

- الاستنتاج:

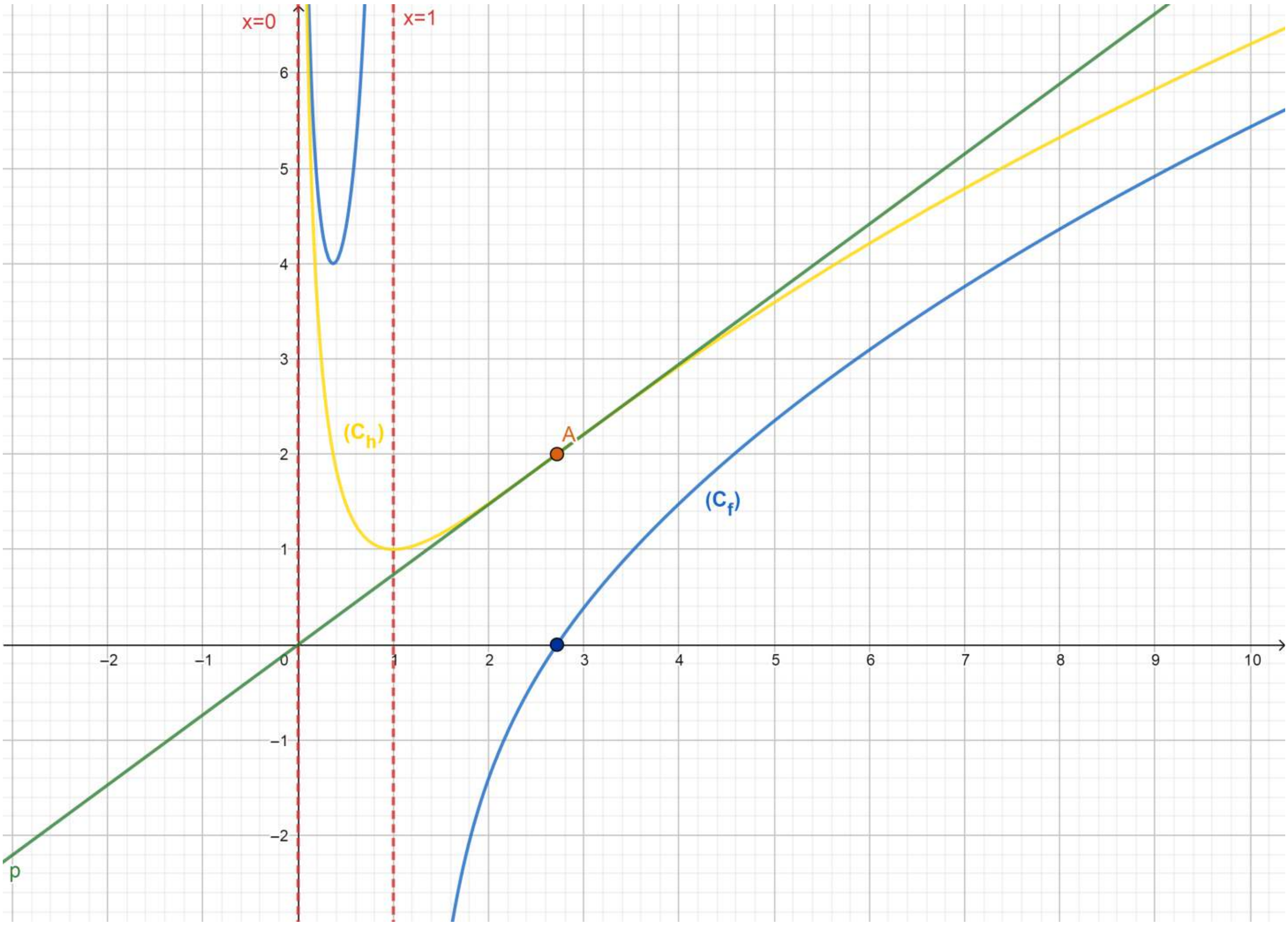
(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة e .

الخليل للرياضيات

7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$ و $x = 0$
- نرسم المماس (T)
- نعين نقطة A انعطاف المنحني (C_h)
- باستعمال جدول تغيرات الدالة h نرسم (C_h)
- نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



8) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$e^m(\ln x)^3 + e^m \ln x - \ln x - 2e^m = 0$$
$$\Rightarrow e^m[(\ln x)^3 + \ln x - 2] = \ln x$$
$$\Rightarrow e^m\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right] = 1$$

الخليل للرياضيات

$$\Rightarrow e^m[f(x)] = 1$$
$$\Rightarrow f(x) = e^{-m}$$

ومنه حلول المعادلة (E) هل فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = e^{-m}$

اذن:

لما $e^{-m} < 4$ أي $-m < \ln 4$ أي $m > -\ln 4$ المعادلة تقبل حل وحيد

لما $e^{-m} = 4$ أي $-m = \ln 4$ أي $m = -\ln 4$ المعادلة تقبل حلين احدهما مضاعف

لما $e^{-m} > 4$ أي $-m > \ln 4$ أي $m < -\ln 4$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶