الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

$\ln x$

③

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 23

◄ التمريـــــن

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln|x|}+x;x\in\mathbb{R}_-^*-\{-1\}\\ \dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{2(\ln x)^2};x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}\\ 0;x=0\end{cases}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=0$ ، فسر النتيجة هندسيا.

2) ادرس تغيرات الدالة f .

3) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته .

ب/ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $\mathbb{R}_-^*-\{-1\}$.

4) حل المعادلة: $f(x)=0$ في المجال $\mathbb{R}_+^*-\{1\}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

5) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $\left]-2;-\frac{3}{4}\right[$.

6) مثل بيانيا (Δ) و المنحني (C_f) .

7) نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$f(x)=-(m^2-e)\dots(E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد واشارة حلول المعادلة (E) .

◀ حل التمريـــن

1) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right] = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \left[\frac{\frac{1}{\ln|x|}+x-0}{x-0}\right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \left[\frac{1}{x\ln|x|}+\frac{x}{x}\right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \left[\frac{1}{x\ln(-x)}+1\right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \left[\frac{-1}{-x\ln(-x)}+1\right]$$
$$= -\infty$$

لأن: $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} [-x\ln(-x)\,] = 0^+$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ من اليسار

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right] = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{2(\ln x)^2}-0}{x-0}\right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{2x(\ln x)^2}\right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{1}{x\ln x}\left(1-\frac{1}{2\ln x}\right)\right]$$
$$= +\infty$$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ من اليمين

- التفسير الهندسي:

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ومنه (C_f) يقبل مماس عمودي معادلته $x = 0$

2) دراسة تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

- $$\lim_{x\to -\infty} [f(x)] = \lim_{x\to -\infty} \left[\frac{1}{\ln|x|}+x\right]$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \left[\frac{1}{\ln(-x)}+x\right]$$
$$= -\infty$$

- $$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} [f(x)] = \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \left[\frac{1}{\ln(-x)}+x\right]$$

الخليل للرياضيات

$$= \lim_{\substack{< \\ x \to -1}} \left[\frac{1}{0^+} + x\right]$$
$$= +\infty$$

- $$\lim_{\substack{> \\ x \to -1}} [f(x)] = \lim_{\substack{> \\ x \to -1}} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x\right]$$
$$= \lim_{\substack{< \\ x \to -1}} \left[\frac{1}{0^-} + x\right]$$
$$= -\infty$$

- $$\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} [f(x)] = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2}\right]$$
$$= \frac{1}{0^-} - \frac{1}{2(0^-)^2}$$
$$= -\infty$$

- $$\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} [f(x)] = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2}\right]$$
$$= \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \left[\frac{1}{\ln x}\left(1 - \frac{1}{2\ln x}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{0^+}\left(1 - \frac{1}{2(0^+)}\right)$$
$$= -\infty$$

- $$\lim_{x \to +\infty} [f(x)] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2}\right]$$
$$= 0 - 0$$
$$= 0$$

- <u>التفسير الهندسي</u>:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي $x = -1$ بجوار $\pm\infty$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي $x = 1$ بجوار $-\infty$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي $y = 0$ بجوار $+\infty$.

- <u>حساب $f'(x)$</u>:

لمّا $x \in \mathbb{R}_-^* - \{-1\}$:

$$f'(x) = \frac{-\left(-\frac{1}{x}\right)}{(\ln(-x))^2} + 1$$
$$= \frac{-1}{x(\ln(-x))^2} + 1$$

لاحظ أنّ $x < 0$ ومنه: $f'(x) > 0$

اذن:

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖

لمّا $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

$$f'(x) = -\left(\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right) - \left(-\frac{4\left(\frac{1}{x}\right)\ln x}{4(\ln x)^4}\right)$$
$$= -\frac{1}{x(\ln x)^2} + \frac{1}{x(\ln x)^4}$$
$$= \frac{-\ln x + 1}{x(\ln x)^3}$$
$$= \frac{-\ln x + 1}{[x(\ln x)^2]\ln x}$$

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $\frac{-\ln x+1}{\ln x}$:

لدينا:

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ولدينا:

$$-\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$
$$\Rightarrow x = e$$

ومنه:

x	0		1		e		$+\infty$
$-\ln x + 1$		$+$		$+$	0	$-$	
$\ln x$	‖	$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

ومنه:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

3) أ/ تبيين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$:

تذكير

إذا استطعنا كتابة عبارة دالة f على الشكل:

$$f(x) = y + \varphi(x)$$

حيث:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [\varphi(x)] = 0$$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته y

لدينا:

$$f(x) = x + \frac{1}{\ln(-x)}$$

نضع:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\ln(-x)}$$

لدينا:

$$\lim_{x \to -\infty} [\varphi(x)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $\mathbb{R}_-^* - \{-1\}$:

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$\begin{aligned} f(x) - y &= x + \frac{1}{\ln(-x)} - x \\ &= \frac{1}{\ln(-x)} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} \ln(-x) = 0 &\Rightarrow -x = e^0 \\ &\Rightarrow -x = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	0
$f(x) - y$	$+$	‖	$-$ ‖

- الوضعية:
  - (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-\infty; -1[$.
  - (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-1; 0[$.

4) حل المعادلة: $f(x) = 0$ في المجال $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2\ln x - 1}{2(\ln x)^2} = 0$$

لدينا: $2(\ln x)^2 > 0$ ومنه:

$$2\ln x - 1 = 0 \Rightarrow 2\ln x = 1$$
$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{e}$$

- الاستنتاج:

(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$

5) تبيين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]-1.77; -1.76[$:

المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]-1.77; -1.76[$ معناه المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا في نفس المجال

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $]-1.77; -1.76[$

لدينا: $f(-1.77) = -0.01$ وَ $f(-1.76) = 0.008$

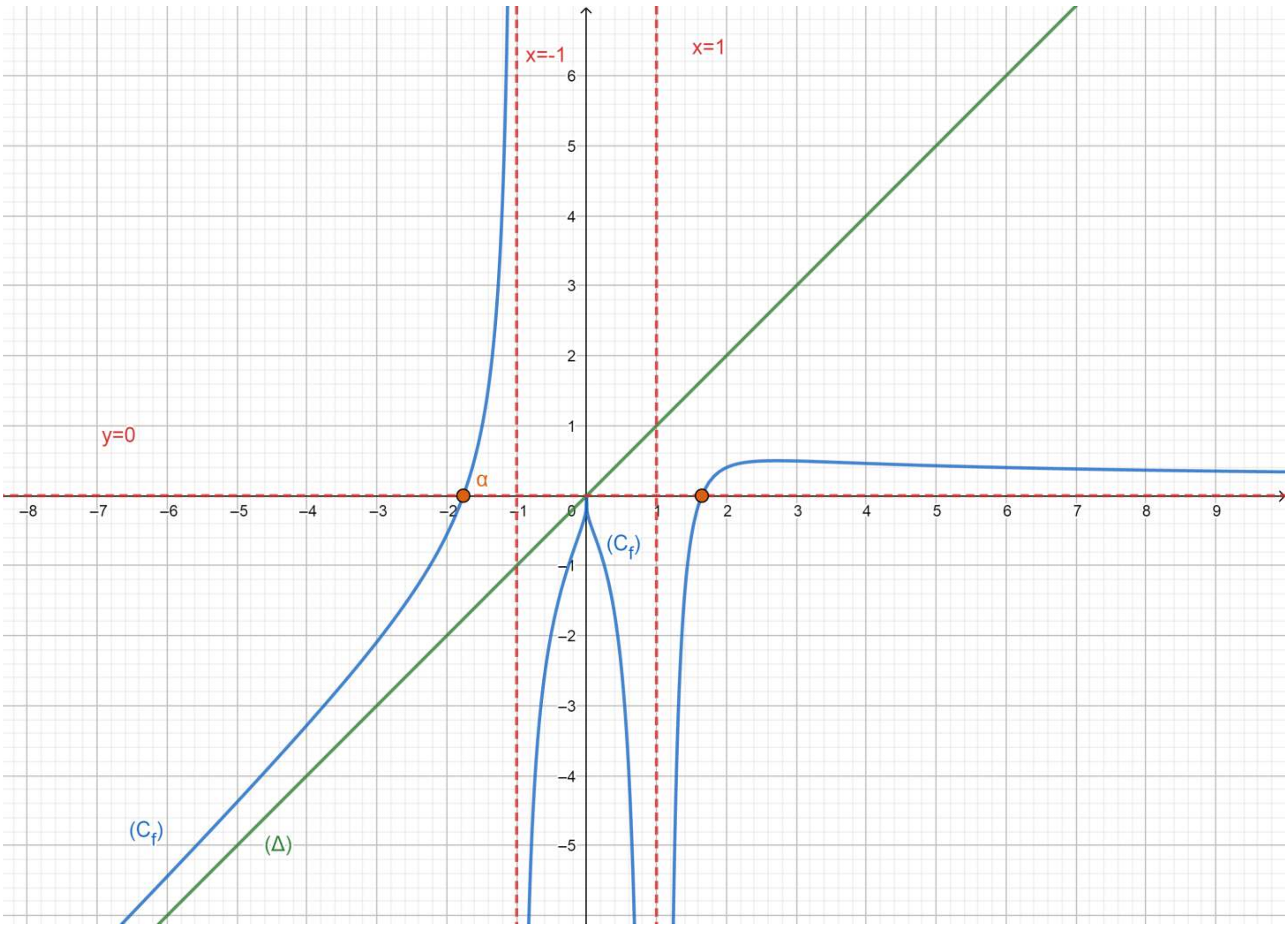
لدينا: $f(-1.77) \times f(-1.76) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا في المجال $]-1.77; -1.76[$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = -1$ و $x = 1$ و $y = 0$
- نعين نقطتي تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ)
- ثُمّ باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



7) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -(m^2 - e)$

- لما $-(m^2 - e) < 0$ أي $m^2 - e > 0$ أي $m^2 > e$ أي $|m| > \sqrt{e}$
  أي $m \in]-\infty; -\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}; +\infty[$ المعادلة تقبل حلين موجبين وحلين سالبين.
- لما $-(m^2 - e) = 0$ أي $m^2 - e = 0$ أي $m^2 = e$ أي $|m| = \sqrt{e}$
  أي $m = \sqrt{e}$ و $m = -\sqrt{e}$ المعادلة تقبل حل موجب وحل معدوم وحل سالب .
- لما $0 < -(m^2 - e) < \frac{1}{2}$ أي $-\frac{1}{2} < m^2 - e < 0$ أي $e - \frac{1}{2} < m^2 < e$
  أي $\sqrt{e - \frac{1}{2}} < |m| < \sqrt{e}$ أي $|m| < \sqrt{e}$ و $|m| > \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ أي $-\sqrt{e} < m < \sqrt{e}$
  و $m \in \left]-\infty; -\sqrt{e - \frac{1}{2}}\right[\cup \left]\sqrt{e - \frac{1}{2}}; +\infty\right[$ أي

$$m \in \left]-\sqrt{e - \frac{1}{2}}; -\sqrt{e}\right[\cup \left]\sqrt{e}; \sqrt{e + \frac{1}{2}}\right[$$

المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب.

- لما $-(m^2-e)=\frac{1}{2}$ أي $m^2-e=-\frac{1}{2}$ أي $m^2=e-\frac{1}{2}$ أي $|m|=\sqrt{e-\frac{1}{2}}$

أي $m=\sqrt{e-\frac{1}{2}}$ و $m=-\sqrt{e-\frac{1}{2}}$ المعادلة تقبل حل مضاعف وحل سالب

- لما $-(m^2-e)>\frac{1}{2}$ أي $m^2-e<-\frac{1}{2}$ أي $m^2<e-\frac{1}{2}$ أي $|m|<\sqrt{e-\frac{1}{2}}$

أي $-\sqrt{e-\frac{1}{2}}<m<\sqrt{e-\frac{1}{2}}$ أي $m\in\left]-\sqrt{e-\frac{1}{2}};\sqrt{e-\frac{1}{2}}\right[$

المعادلة تقبل حل وحيد سالب

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►

الخليل للرياضيات