



طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

$\ln x$

②

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 22

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = 1 + x^2 + \ln x$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32 < \alpha < 0.33$.

(3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = -x + \frac{2 + \ln x}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) بين أنه من أجل كل x من D_f :

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(4) / احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

(5) اثبت أن المنحني (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها.

(6) مثل بيانيا كل من المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحني (C_f) . علما أن (C_f) يقطع محور الفواصل

في نقطتين x_0 و x_1 حيث:

$$0.1 < x_0 < 0.2 \quad \text{و} \quad 1.5 < x_1 < 1.6$$

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = -x + 1 + 2 + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) / بين أنه من أجل كل x من المجال D_h :

$$h(x) = f(x+1) + 2$$

ب/ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

(2) أ/ بين أن المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه .
ب/ مثل بيانيا المنحني (C_h) .

(3) m وسيط حقيقي غير معدوم، (T_m) مستقيم معادلته:

$$y = \ln(|m|) x + 1$$

أ/ برهن أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها.

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$h(x) = \ln(|m|) x + 1 \dots (E)$$

(I)

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + x^2 + \ln x] \\ &= 0 - \infty \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + x^2 + \ln x] \\ &= +\infty + \infty \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- دراسة $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x^2 + 1}{x} \end{aligned}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات $g(x)$:

| | | |
|---------|-----------|-----------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | | + |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا: الدالة g مستمرة ومنتزيدة على مجال تعريفها

ولدينا: $g(0.32) = -0.03$ و $g(0.33) = 0.0002$

ولدينا: $g(0.33) \times g(0.32) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32 < \alpha < 0.33$.

(3) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

| | | | |
|--------|---|----------|-----------|
| x | 0 | α | $+\infty$ |
| $g(x)$ | - | 0 | + |

(II)

(1) حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-x + \frac{2 + \ln x}{x} \right] \\ &= \frac{-\infty}{0^+} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 0$

ملاحظة:

هذه الكتابة $\left(\frac{-\infty}{0^+}\right)$ غير رياضية، لأن ∞ رمز لعدد كبير فقط ولا يمكن حساب صورته

ولكن تعمدت كتابتها للتسهيل للتمييز فقط

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{2 + \ln x}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}}{1} \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \right] = 0 \text{ لان}$$

(2) تبين أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + \frac{\frac{1}{x}x - (2 + \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{-x^2 - 1 - \ln x}{x^2} \\ &= -\frac{x^2 + 1 + \ln x}{x^2} \\ &= -\frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- جدول التغيرات:

| | | | |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| x | 0 | α | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | | $f(\alpha)$ | |
| | $-\infty$ | | $+\infty$ |

(3) تبين أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 1 + \ln \alpha = 0 \\ \Rightarrow \ln \alpha = -(\alpha^2 + 1)$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = -\alpha + \frac{2 + \ln \alpha}{\alpha} \\ = \frac{-\alpha^2 + 2 - (\alpha^2 + 1)}{\alpha} \\ = \frac{-2\alpha^2 + 1}{\alpha} \\ = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$$

- حصر $f(\alpha)$

لدينا:

$$0.32 < \alpha < 0.33 \\ -0.33 < -\alpha < -0.32 \dots (1)$$

ولدينا:

$$0.32 < \alpha < 0.33 \\ 0.64 < 2\alpha < 0.66 \\ \frac{1}{0.66} < \frac{1}{2\alpha} < \frac{1}{0.64} \\ 1.51 < \frac{1}{2\alpha} < 1.66 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد:

$$1.18 < \frac{1}{2\alpha} - \alpha < 1.34 \\ 2.18 < 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right) < 2.34$$

إذن:

$$2.18 < f(\alpha) < 2.34$$

(4) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{2 + \ln x}{x} + x \right] \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 + \ln x}{x} \right] \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right]$$

$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = -x$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{2 + \ln x}{x}$$

لدينا $x > 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$\begin{aligned} 2 + \ln x = 0 &\Rightarrow \ln x = -2 \\ &\Rightarrow x = e^{-2} \end{aligned}$$

ومنه:

| | | | |
|------------|---|----------|-----------|
| x | 0 | e^{-2} | $+\infty$ |
| $f(x) - x$ | - | 0 | + |

- الوضعية:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; e^{-2}[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة e^{-2} .
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]e^{-2}; +\infty[$.

5 اثبات أن المنحني (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) :

(T) يوازي (Δ) معناه: $f'(a) = -1$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(a) = -1 &\Rightarrow -\frac{a^2 + 1 + \ln a}{a^2} = -1 \\ &\Rightarrow a^2 + 1 + \ln a = a^2 \\ &\Rightarrow 1 + \ln a = 0 \\ &\Rightarrow \ln a = -1 \\ &\Rightarrow a = e^{-1} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(a)(x - a) + f(a) \\ &= -x + e^{-1} - e^{-1} + \frac{2 + \ln e^{-1}}{e^{-1}} \\ &= -x + e \end{aligned}$$

6 التمثيل البياني:

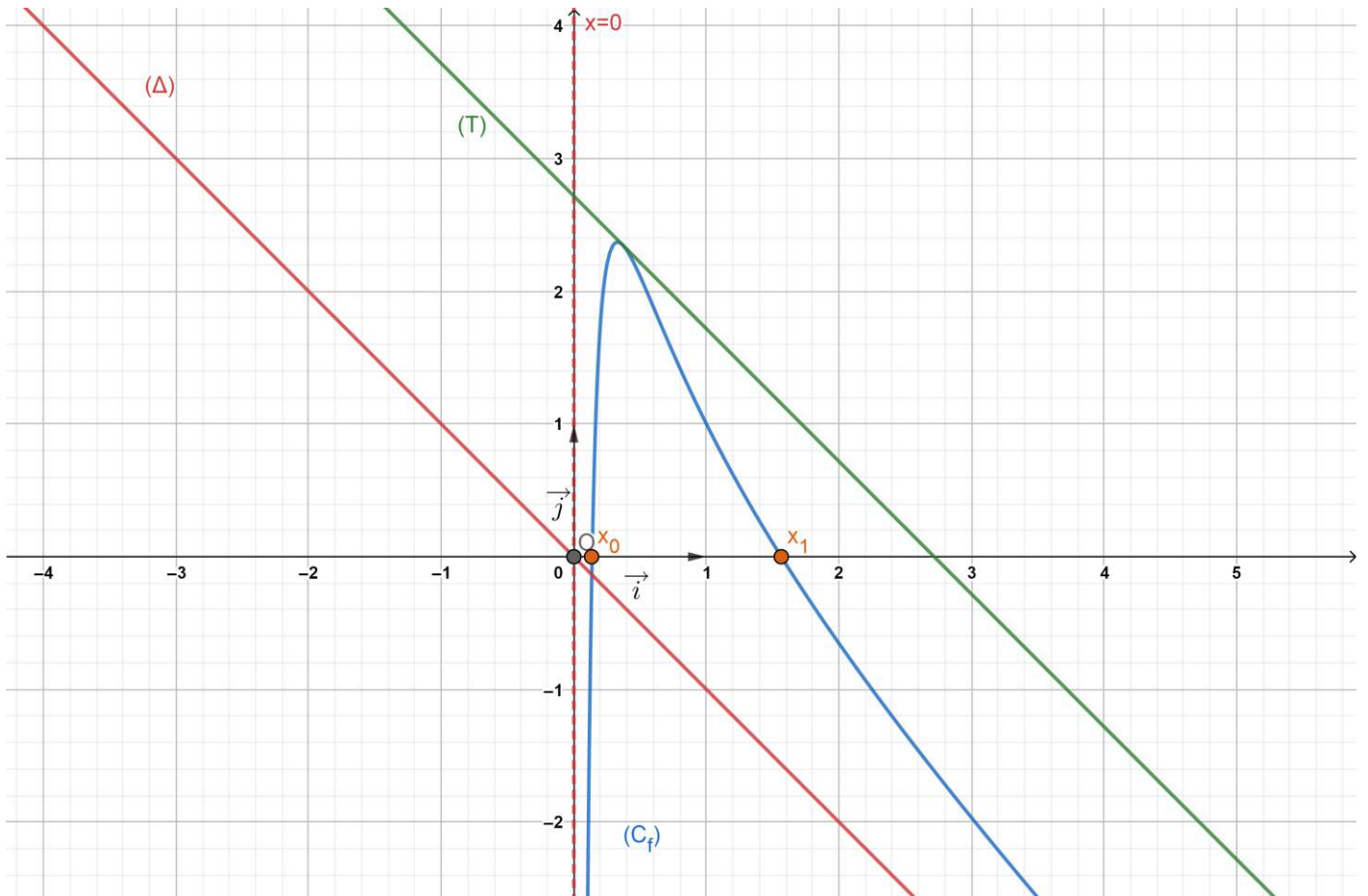
خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x = 0$.
- نعين x_0 و x_1 نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل

• نرسم المستقيم المقارب المائل: (Δ)

• نرسم المماس (T)

• ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(III)

(7) أ/ تبين أنه من أجل كل x من المجال D_h : $h(x) = f(x + 1) + 2$

$$\begin{aligned} f(x + 1) + 2 &= -(x + 1) + \frac{2 + \ln(x + 1)}{x + 1} + 2 \\ &= -x - 1 + \frac{2 + \ln(x + 1)}{x + 1} + 2 \\ &= -x + 1 + \frac{2 + \ln(x + 1)}{x + 1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ب/ تبين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + 1 + \frac{2 + \ln(x + 1)}{x + 1} + x - 1 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 + \ln(x + 1)}{x + 1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x + 1} + \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

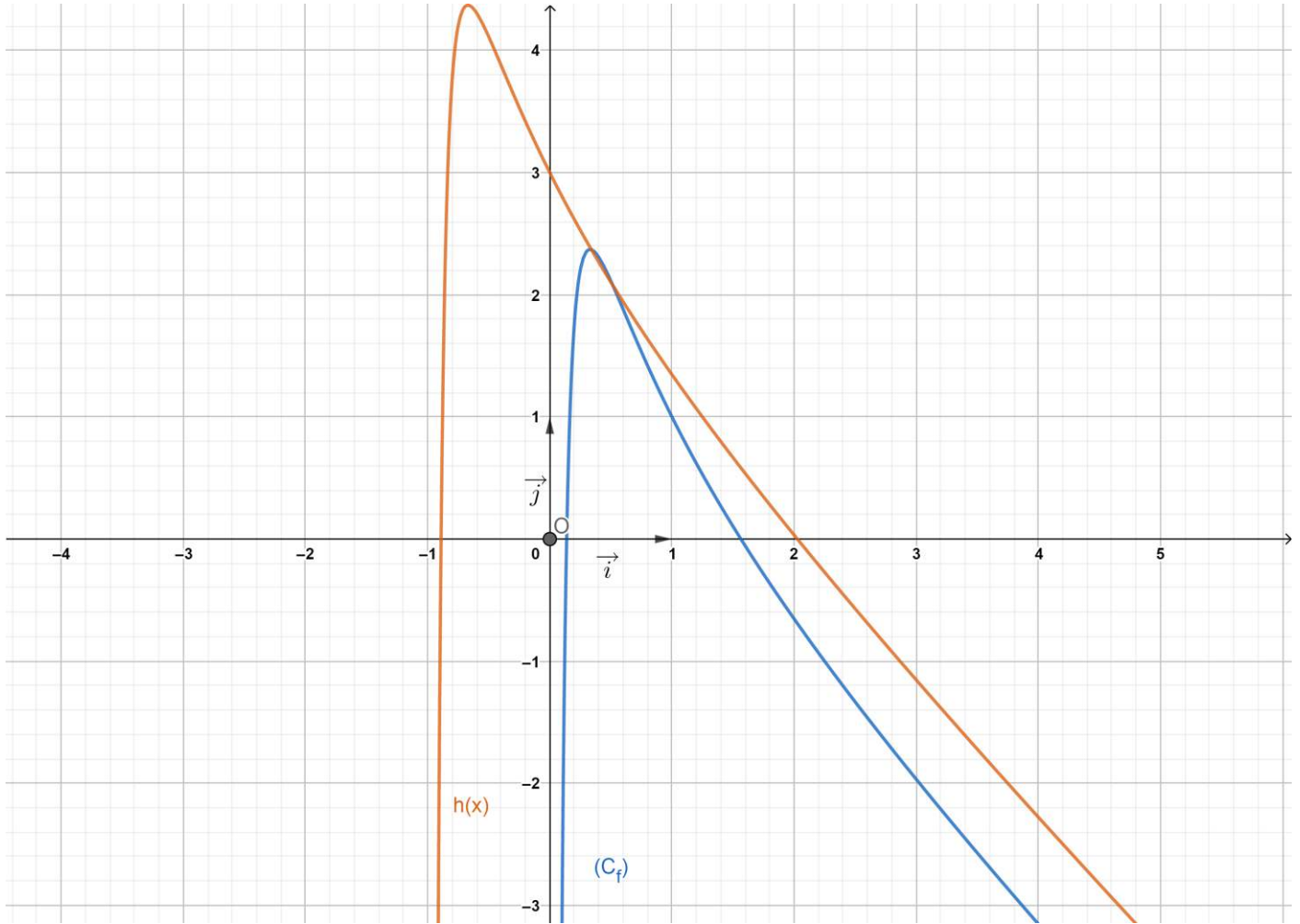
(8) أ/ تبين أن المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه :

$$\begin{aligned}
h(x) &= f(x + 1) + 2 \\
&= f(x - (-1)) + 2
\end{aligned}$$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه: $\vec{u}(-1; 2)$

ب/ التمثيل البياني لـ (C_h) :

تمثيل (C_f) و (C_h) :



(9) أ/ برهان أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها:

نفرض أن النقطة $A(x_1; y_1)$ تنتمي إلى المستقيم (T_m) ونبرهن أنها ثابتة:

لدينا: A تنتمي إلى (T_m) معناها:

$$y_1 = \ln(|m|) x_1 + 1$$

$$\Rightarrow \ln(|m|) x_1 - y_1 + 1 = 0 \dots (3)$$

المعادلة (3) عبارة عن كثير حدود متغيره $\ln(|m|)$ وينعدم اذا انعدمت جميع معاملاته
أي:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -y_1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

اذن: المستقيمات (T_m) تشمل النقطة $A(0; 1)$

ب/ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_h) مع المستقيمت ذات المعادلة

$$y_m = \ln(|m|) x + 1$$

ومنه:

| | | | | | | |
|-------------------------|--|----|----------------|----|---------------|-----|
| المعادلة تقبل حلا وحيدا | $m = -e^{-1}$ و $m = e^{-1}$ | أي | $ m = e^{-1}$ | أي | $\ln m = -1$ | لما |
| المعادلة تقبل حلا وحيدا | $-e^{-1} < m < e^{-1}$ | أي | $ m < e^{-1}$ | أي | $\ln m < -1$ | لما |
| المعادلة تقبل حلان | $m \in]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty$ | أي | $ m > e^{-1}$ | أي | $\ln m > -1$ | لما |

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶