طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

①

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 21

التمريـــــن

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)]$.

2) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

3) ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

4) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثييها.

6) مثل بيانيا المنحنى (C_f) .

حل التمريـــن

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- <u>حساب النهايات:</u>

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} [g(x)] = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} [x^2 + 2x + \ln(x+1)] = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} [x^2 + 2x + \ln(x+1)] = +\infty$

- <u>حساب $g'(x)$:</u>

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + 2 + \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(2x+2)(x+1)+1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2+2x+2x+2+1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2+4x+3}{x+1} \end{aligned}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على مجال تعريفها.

- <u>جدول التغيرات:</u>

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات نجد:

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II)

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

الخليل للرياضيات

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x \to -1}} [f(x)] = \lim_{\substack{> \\ x \to -1}} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]$$
$$= -1 - \frac{-\infty}{0^+}$$
$$= +\infty$$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = -1$.

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} [f(x)] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right]$$
$$= +\infty - 0$$
$$= +\infty$$

2) تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مقائل بجوار $+\infty$.

3) دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

لدينا:

$$-\ln(x+1) = 0 \Rightarrow e^{\ln(x+1)} = e^0$$
$$\Rightarrow x + 1 = 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- المنحني (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-1;0[$.
- المنحني (C_f) يقطع (Δ) في $O(0;0)$.

الخليل للرياضيات

- المنحني (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; +\infty[$.

4) تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2 + 1 + 2x - 1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

- جدول تغيرات الدالة f :

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

5) تبيين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف:

$$f''(x) = \frac{\left(2x + 2 + \frac{1}{x+1}\right)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + 2x + \ln(x+1))}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{\left(2(x+1) + \frac{1}{x+1}\right)(x+1) - 2(x^2 + 2x + \ln(x+1))}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{2(x+1)^2 + 1 - 2x^2 + 4x + 2\ln(x+1)}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{3 - 2\,ln(x+1)}{(x+1)^3}$$

لدينا: $(x+1)^3 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط

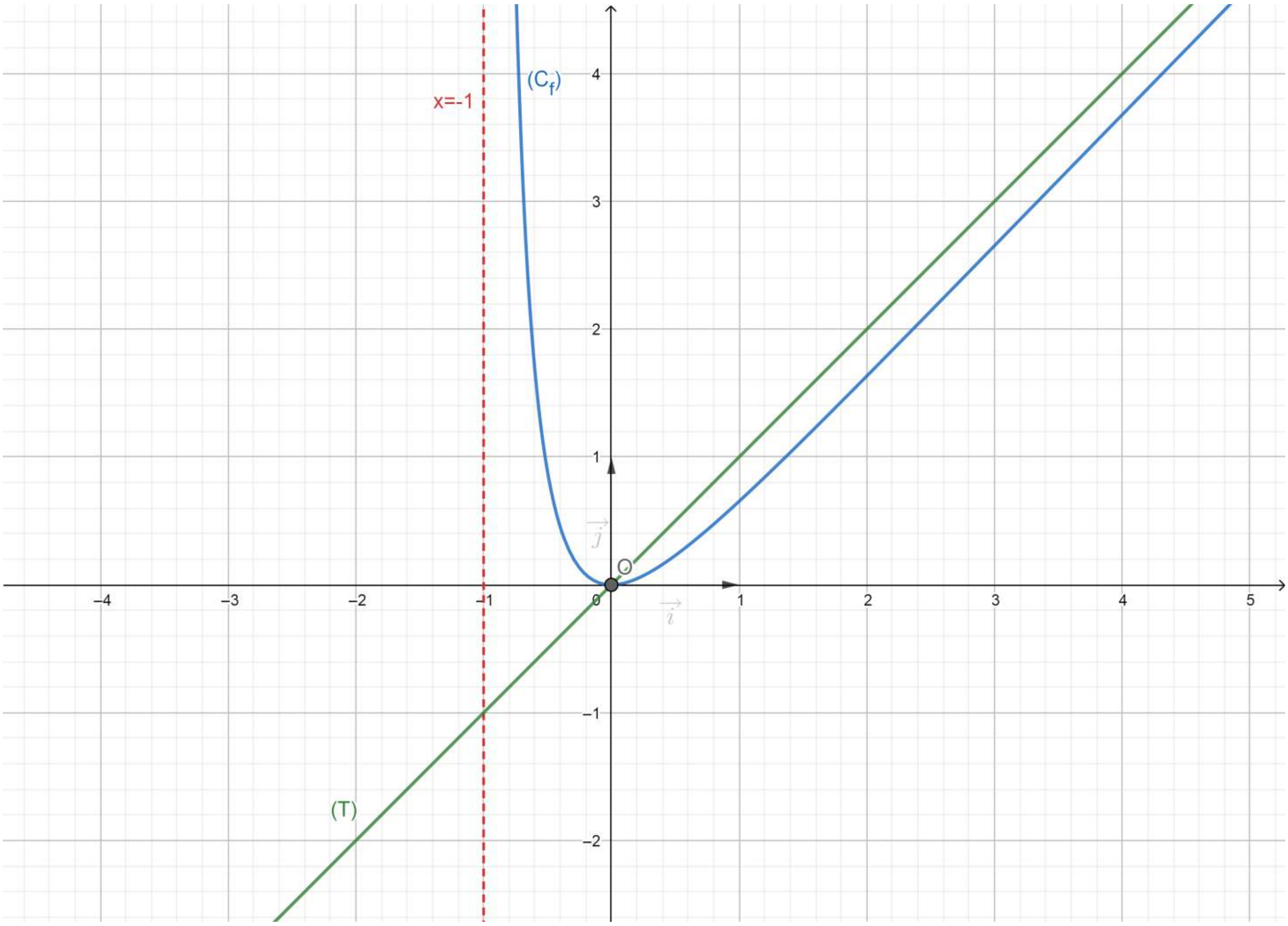
$$3 - 2\,ln(x+1) = 0 \Rightarrow 2ln(x+1) = 3$$
$$\Rightarrow \ln(x+1) = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow x + 1 = e^{\frac{3}{2}}$$
$$\Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} - 1$$

لدينا الدالة f'' تنعدم وتغير اشارتها، ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $e^{\frac{3}{2}} - 1$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x = -1$
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►

الخليل للرياضيات