الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة عددية

④

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 08

التمريـــــن

1 نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[-1,+\infty[$ بـ:

$$g(x) = 2x^3 + 6x^2 + 7x + 1$$

① ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

② احسب قيمة تقريبية لكل من العددين $g(-0,2)$ و $g(-0,1)$ إلى 10^{-1}.

③ استنتج أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $]-0.2;-0.1[$ حيث: $g(\alpha) = 0$.

④ استنتج إشارة الدالة g على المجال $[-1,+\infty[$.

2 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + x}{(x+1)^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

① أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]$.

② عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من المجال $]-1,+\infty[$ يكون:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{(x+1)^2}$$

③ أ/ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (D) .

④ أ/ بين أنه من أجل كل x من $]-1,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

⑤ اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 2 .

⑥ بين أن النقطة A نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

⑦ عين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل.

3 نعتبر الدالة h المعرفة على $]-1,+\infty[\cup]-\infty,-1[$ كما يلي:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x > -1 \\ f(-x-2) & ; \quad x < -1 \end{cases}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

① بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر للمنحني (C_h) .

② نقبل أن $f(\alpha) \approx -0,1$)، مثل بيانيا (C_f) ، ثم استنتج التمثيل البياني لـ (C_h) .

◀ حل التمريـــن

❶

① دراسة اتجاه تغير الدالة g :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}[2x^3+6x^2+7x+1]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(2+\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right]$$
$$= +\infty$$
$$\bullet f(-1) = 2(-1)^3+6(-1)^2+7(-1)+1$$
$$= -2$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 6x^2+12x+7$$

لدينا:

$$\Delta = 12^2-4(6)(7) = -24$$
$$\Delta < 0$$

ومنه المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$

اذن $g'(x) > 0$

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	-1 $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	-2 ↗ $+\infty$

② حساب قيمة تقريبية لكل من العددين $g(-0.2)$ و $g(-0.1)$ إلى 10^{-1}:

$g(-0.1) \cong 0.1$ ، $g(-0.2) \cong -0.1$

③ استنتاج أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $]-0,2;-0,1[$ حيث: $g(\alpha) = 0$:

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[-1,+\infty[$

ولدينا: $g(-0.2)\times g(-0.1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد عدد وحيد α من المجال $]-0,2;-0,1[$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

④ استنتاج إشارة الدالة g على المجال $[-1,+\infty[$:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

2

① أ/ حساب $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} [f(x)]$:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} [f(x)] &= \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[\frac{2x^3 + 4x^2 + x}{(x+1)^2}\right] \\ &= \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[\frac{1}{0^+}\right] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = -1$

ب/ حساب $\lim_{x \to +\infty} [f(x)]$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^3 + 4x^2 + x}{(x+1)^2}\right] \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^3}{x^2}\right] \\ &= \lim_{x \to +\infty} [2x] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

② تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

$$\begin{aligned}f(x) &= ax + b + \frac{cx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x+1)^2 + cx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1) + cx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + 2ax^2 + ax + bx^2 + 2bx + b + cx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + (2a+b)x^2 + (a+2b+c)x + b}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 4 \\ a + 2b + c = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{\boxed{\begin{matrix} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{matrix}}\right.$$

ومنه:

$$f(x) = 2x - \frac{x}{(x+1)^2}$$

الخليل للرياضيات

③ أ/ تبيين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty}\left[2x - \frac{x}{(x+1)^2} - 2x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{(x+1)^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{x^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]$$
$$= 0$$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (D) :

ندرس إشارة الفرق $(f(x)-y)$:

$$f(x) - y = -\frac{x}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$

ومنه:

-

x	-1 $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$f(x)-y=-x$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما $x \in]-1;0[$.
- (C_f) يقطع (D) في المبدأ $(0;0)$
- (C_f) تحت (D) لما $x \in]0;+\infty[$.

④ أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $]-1,+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$:

$$f'(x) = \frac{(6x^2+8x+1)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x^3+4x^2+x)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{(6x^2+8x+1)(x+1) - 2(2x^3+4x^2+x)}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا:

$(x+1)^3 > 0$ لما $x \in]-1;+\infty[$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

⑤ كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 2 :

$$\begin{aligned}(T): y &= f'(2)(x-2)+f(2)\\ &= \frac{55}{9}(x-2)+\frac{34}{9}\\ &= \frac{55}{9}x-2(\frac{55}{9})+\frac{34}{9}\\ &= \frac{55}{9}x-\frac{76}{9}\end{aligned}$$

⑥ تبيين أن النقطة A نقطة انعطاف للمنحني (C_f):

لدينا:

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{g'(x)(x+1)^3-3(x+1)^2g(x)}{(x+1)^6}\\ &= \frac{g'(x)(x+1)-3g(x)}{(x+1)^7}\\ &= \frac{(6x^2+12x+7)(x+1)-3(2x^3+6x^2+7x+1)}{(x+1)^4}\\ &= \frac{-2x+4}{(x+1)^4}\end{aligned}$$

لدينا: $(x+1)^2>0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط

$$-2x+4=0 \Rightarrow -2x=-4 \Rightarrow x=2$$

ومنه:

x	-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

لدينا المشتقة الثانية تنعدم وتغير اشارتها، ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف في النقطة A ذات الفاصلة 2

⑦ تعيين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x)=0$ ►

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x^3+4x^2+x}{(x+1)^2}=0$$
$$\Rightarrow 2x^3+4x^2+x=0$$
$$\Rightarrow x(2x^2+4x+1)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x^2+4x+1=0 \end{cases}$$

لدينا: $2x^2+4x+1=0$

ومنه:

$$\Delta = 4^2-4\times 2\times 1 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

ومنه:

$$x_1 = \frac{-4+2\sqrt{2}}{4} = -1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x_2 = \frac{-4-2\sqrt{2}}{4} = -1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\left(x_2=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ مرفوض، لأنه خارج المجال $]-1,+\infty[$

ومنه مجوعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي: $s=\left\{0;-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

اذن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في النقط ذات الفواصل 0 و $\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3

① تبيين أن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ محور تناظر للمنحني (C_h):

تذكير

لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر لـ (C_f) نبين ما يلي:

$$\begin{cases} 2a-x\in D_f \\ f(2\alpha-x)=f(x) \end{cases}$$

- <u>اثبات أن $[2(-1)-x]\in D_h$</u>:

لدينا $x\in]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ معناه: $x<-1$ أو $x>-1$

معناه: $-x>1$ أو $-x<1$

معناه: $-2-x>-1$ أو $-2-x<-1$

ومنه: $(-2-x)\in]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

- اثبات $h(2(-1)-x)=h(x)$:

لدينا:

$$h(-2-x)=\begin{cases} f(-2-x) & ; \quad -2-x>-1 \\ f(-(-2-x)-2) & ; \quad -2-x<-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(-2-x)=\begin{cases} f(-2-x) & ; \quad -x>1 \\ f(2+x-2) & ; \quad -x<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(-2-x)=\begin{cases} f(-2-x) & ; \quad x<-1 \\ f(x); & x>-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(-2-x)=h(x)$$

ومنه المستقيم $x=-2$ محور تناظر ل (C_h)

② التمثيل البياني:

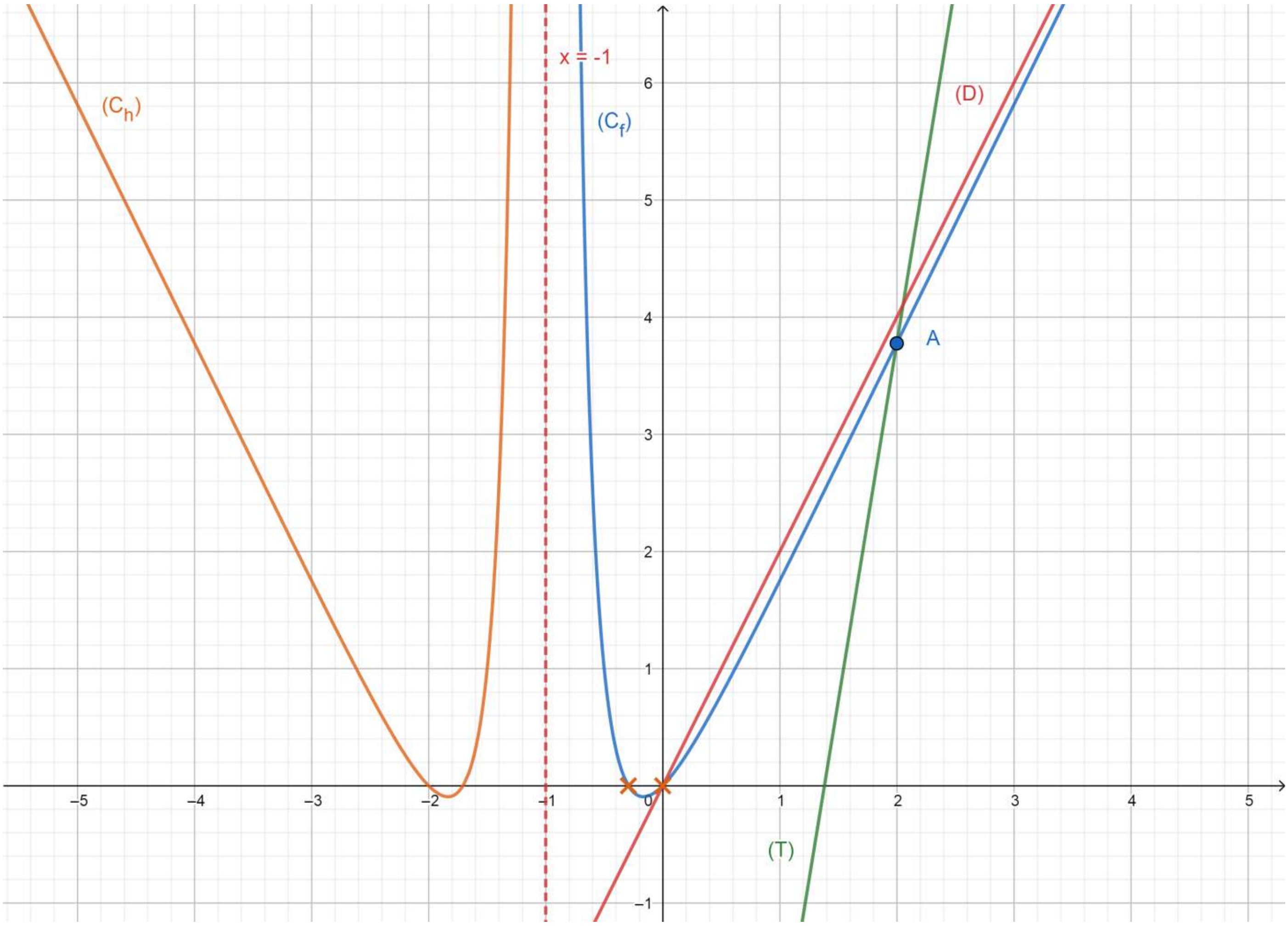
لدينا:

لما $x>-1$ المنحني (C_h) ينطبق على المنحني (C_f)

ولما $x<-1$ المنحني (C_h) يناظر المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم $x=-1$

خطوات إنشاء (C_f) و (C_h) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي: $x=-1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (D) ذو المعادلة $y=2x$
- نعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نكمل رسم (C_f)
- ثم نرسم (C_h)



◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►