الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة عددية

2

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 01

التمريـــــن

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1;3\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أوجد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

4) أ- بين أنه إذا كان $x \in D_f$ فإن $(4-x) \in D_f$.

ب- بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f).

5) مثل بيانيا المنحنى (C_f).

◀ حل التمريـــــــن

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{1;3\}$ معناه الدالة f معرفة على المجال: $]-\infty;1[\,\cup\,]1;3[\,\cup\,]3;+\infty[$

لدينا إشارة المقام كالآتي:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$(x2-4x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x^2}{x^2}\right) = 3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{x^2}\right) = 3$
- $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}}\left(\dfrac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right) = \dfrac{1}{0} = +\infty$

  لأن: $\left(\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}}(x^2-4x+3) = 0^+\right)$
- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}\left(\dfrac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right) = \dfrac{1}{0} = -\infty$

  لأن: $\left(\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}(x^2-4x+3) = 0^-\right)$
- $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 3}}\left(\dfrac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right) = \dfrac{1}{0} = -\infty$

  لأن: $\left(\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 3}}(x^2-4x+3) = 0^-\right)$
- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 3}}\left(\dfrac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right) = \dfrac{1}{0} = +\infty$

  لأن: $\left(\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 3}}(x^2-4x+3) = 0^+\right)$

- تفسير النتائج هندسيا:

- $y=3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$
- $x=1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور التراتيب بجوار $\pm\infty$
- $x=3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور التراتيب بجوار $\pm\infty$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f:

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها

أولا: نحسب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(3x-12)(x^2-4x+3)-(2x-4)(3x^2-12x+10)}{(x^2-4x+3)^2}$$
$$=\frac{-2x+4}{(x^2-4x+3)^2}$$

ثانيا: ندرس إشارة $f'(x)$

لدينا $(x^2-4x+3)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(-2x+4)$

لدينا: $-2x+4=0$

ومنه $-2x=-4$

ومنه $x=2$

ثالثا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

3) إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

مع محور التراتيب:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور التراتيب نحسب $f(0)$ ►

$$f(0)=\frac{3(0)^2-12(0)+10}{(0)^2-4(0)+3}=\frac{10}{3}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(yy')=\left\{\left(0;\frac{10}{3}\right)\right\}$$

مع محور الفواصل:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x)=0$ ►

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}=0\Rightarrow\begin{cases}3x^2-12x+10\ \ldots(1)\\ \text{و}\\ x^2-4x+3\neq 0\end{cases}$$

نحل (1) نجد:

$$\Delta=(-12)^2-4(3)(10)=24$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{12-\sqrt{24}}{6}\\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{12+\sqrt{24}}{6}\end{cases}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(xx')=\left\{\left(\frac{12-\sqrt{24}}{6};0\right),\left(\frac{12+\sqrt{24}}{6};0\right)\right\}$$

4) أ- تبيين أنه إذا كان $x \in D_f$ فإن $(4-x) \in D_f$:

لدينا $x \in D_f$ ومنه: $x \in]-\infty;1[\cup]1;3[\cup]3;+\infty[$

ومنه: $x \in]3;+\infty[$ أو $x \in]1;3[$ أو $x \in]-\infty;1[$

ومنه: $x > 3$ أو $1 < x < 3$ أو $x < 1$

ومنه: $-x < -3$ أو $-3 < -x < -1$ أو $-x > -1$

ومنه: $4-x < 1$ أو $1 < 4-x < 3$ أو $4-x > 3$

ومنه: $(4-x) \in]-\infty;1[$ أو $(4-x) \in]1;3[$ أو $(4-x) \in]3;+\infty[$

إذن: $(4-x) \in]-\infty;1[\cup]1;3[\cup]3;+\infty[$

ب- تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f):

تذكيــر

لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر لـ (C_f) نبين ما يلي:

$$\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$$

<u>أولا نثبت أنّ $(2(2)-x) \in D_f$</u>

من السؤال السابق لدينا: $(4-x) \in D_f$

ثانيا نثبت أنّ $f(2(4)-x)=f(x)$:

$$f(4-x)=\frac{3(4-x)^2-12(4-x)+10}{(4-x)^2-4(4-x)+3}$$

$$=\frac{3(4^2-2(4)(x)+x^2)-48+12x+10}{4^2-2(4)(x)+x^2-16+4x+3}$$

$$=\frac{3(16-8x+x^2)-38+12x}{x^2-4x+3}$$

$$=\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}$$

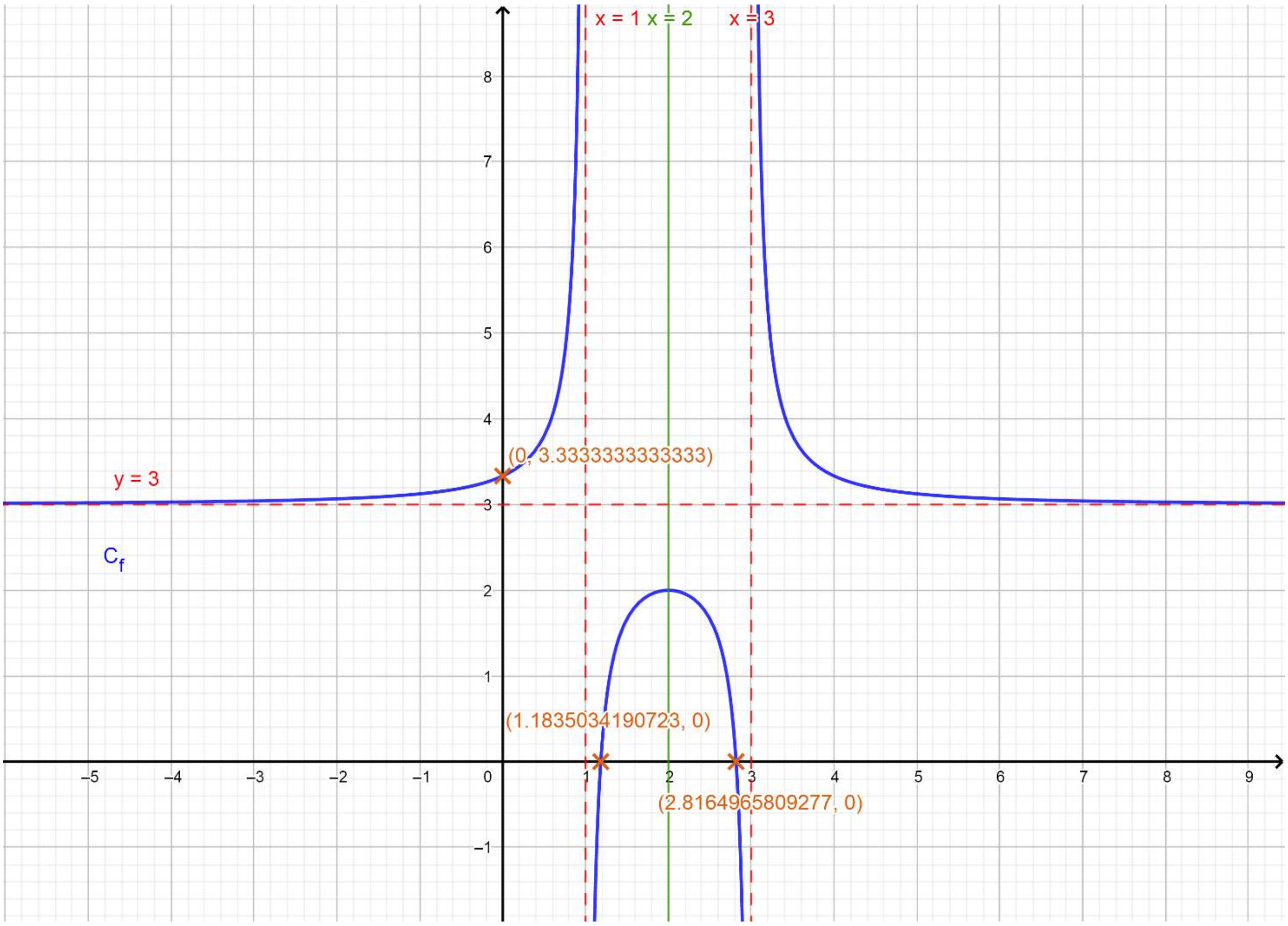
$$=f(x)$$

اذن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تناظر لـ (C_f).

5) التمثيل البياني للمنحني (C_f):

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $y = 3$ و $x = 1$ و $x = 3$
- نرسم المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f)
- نعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات (xx') و (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نكمل الرسم



◀ بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا ▶