الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة أسّية e^x

③

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 16

التمريـــــن

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) برهن أنّ النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

3) أ- بيّن أن $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x]$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

4) بيّن أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-2.77 < \alpha < -2.76$.

5) مثّل بيانيا (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(4x + 1)$$

(عبارة g غير مطلوبة).

1) ما هو اتجاه تغير الدالة g .

2) تحقّق من أن:

$$g\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 0$$

ثم بيّن أن:

$$g'\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$$

3) استنتج معادلة المماس (T) لمنحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$.

4) تحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ:

$$y = (1 + \alpha)^2 x - \frac{(1 + \alpha)(\alpha^2 - 1)}{4}$$

(III) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$k(x) = f(|x|)$$

ونسمي (C_k) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) بين أن الدالة k زوجية .

2) أ- بين كيف تمثيل (C_k) انطلاقا من (C_f) .

ب- انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_k) .

(IV) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

الخليل للرياضيات

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) تحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$.

2) أ- استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه.

ب- انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_h)

◄ حل التمريـــن

(I)

1) أ- تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^{2x}+1+2e^x-4e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^{2x}+1-2e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} \\ &= \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \end{aligned}$$

ب- دراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما.

لدينا $f'(0)=0$ أي المشتقة تنعدم ولا تغير اشارتها ، ومنه نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف.

ج- جدول تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}\right]=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{\frac{4}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right]=+\infty$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) برهان أن النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) :

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha-x\in D_f \\ f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha+x)\in D_f \\ (\alpha-x)\in D_f \\ f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=2\beta \end{cases}$$

- نثبت أن: $(2(0)-x) \in D_f$:

لدينا $x \in \mathbb{R}$ ومنه $(-x) \in \mathbb{R}$

- نثبت أن : $f(2(0)-x)+f(x)=2(1)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
f(2(0)-x)+f(x) &= -x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}+x-1+\frac{4}{e^{x}+1}\\
&= -2+\frac{4}{e^{-x}+1}+\frac{4}{e^{x}+1}\\
&= \frac{-2(e^{-x}+1)(e^{x}+1)+4(e^{x}+1)+4(e^{-x}+1)}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)}\\
&= \frac{2[2(e^{x}+1)+2(e^{-x}+1)-(e^{-x}+1)(e^{x}+1)]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)}\\
&= \frac{2[2(e^{x}+e^{-x}+2)-(e^{x}+e^{-x}+2)]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)}\\
&= \frac{2[2(e^{x}+e^{-x}+2)-(e^{x}+e^{-x}+2)]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)}\\
&= \frac{2[e^{x}+e^{-x}+2]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)}\\
&= \frac{2[e^{x}+e^{-x}+2]}{e^{x}+e^{-x}+2}\\
&= 2
\end{aligned}$$

ومنه النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

3) أ- تبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] &= \lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^{x}+1}-x+1\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4}{e^{x}+1}\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{4}{e^{x}}}{\frac{1}{e^{x}}+1}\right]=0
\end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته: $y=x-1$

ب- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^{x}+1}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-1+\frac{4}{e^{x}+1}\right]=3$$

- الاستنتاج ؟

لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=3 &\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]-3=0\\
&\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-x-3]=0\\
&\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]=0
\end{aligned}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

◄ ملاحظة: أمكننا إدخال 3 داخل النهاية لانها لا تتعلق بالنهاية ►

4) تبيين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-2.77 < \alpha < -2.76$.

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(-2.76) = 0.001$ و $g(-2.77) = -0.3$

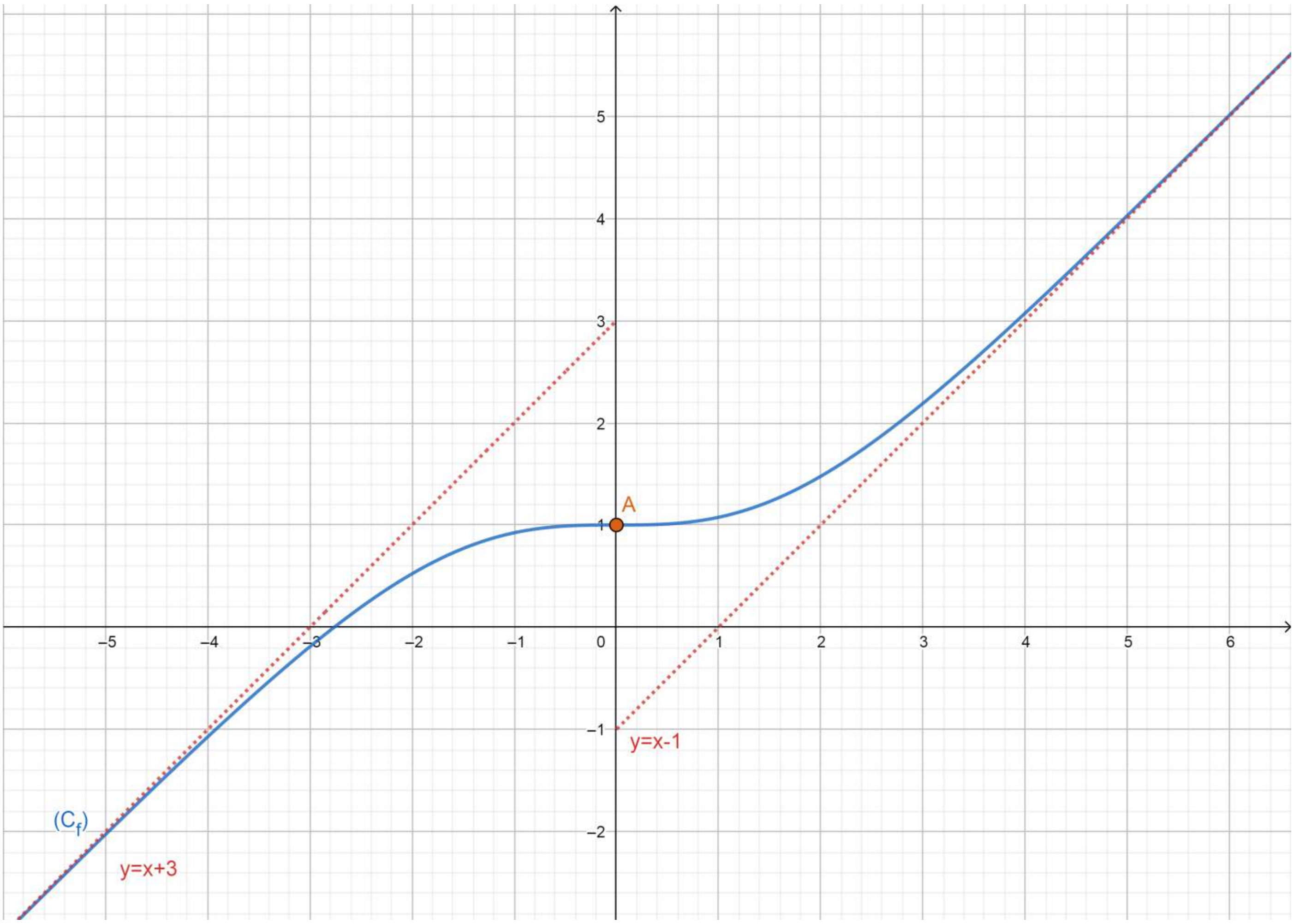
ولدينا: $g(-2.77) \times g(-2.76) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

5) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $(y = x - 1)$ و $(y = x + 3)$
- نعين A نقطة مركز تناظر المنحني (C_f)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



f دالة معرفة على مجال I
وg دالة معرفة على المجال $f(I)$
• إذا كانت الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير فإن: $(f\circ g)$ متزايدة على I
• إذا كانت الدالتين f و g متعاكستان في اتجاه التغير فإن: $(f\circ g)$ متناقصة على I

(II)

1) اتجاه تغير الدالة g :

نلاحظ أن $g(x)=(f\circ\varphi)(x)$ حيث $\varphi(x)=4x+1$

لدينا الدالة φ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

والدالة f متزايدة تماما أيضا على $\mathbb{R}$ (لهما نفس اتجاه التغير)

ومنه الدالة g متزادية تماما على $\mathbb{R}$

2) التحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)=0$

$$g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)=f\left(4\frac{\alpha-1}{4}+1\right)=f(\alpha)=0$$

- تبيين أن: $g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)=4f'(\alpha)$:

لدينا: $g'(x)=4f'(4x+1)$ ومنه :

$$g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)=4f'\left(4\frac{\alpha-1}{4}+1\right)=4f'(\alpha)$$

3) استنتاج معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$:

$$\begin{aligned}(T): y&=g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)+g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)\\&=4f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)+0\\&=4f'(\alpha)x-f'(\alpha)(\alpha-1)\end{aligned}$$

4) التحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ: $y=(\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}$:

لدينا:

$$\begin{aligned}f(\alpha)=0&\Rightarrow \alpha-1+\frac{4}{e^{\alpha}+1}=0\\&\Rightarrow \frac{4}{e^{\alpha}+1}=1-\alpha\\&\Rightarrow e^{\alpha}=\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}(T): y&=4\left(\frac{\frac{3+\alpha}{1-\alpha}-1}{\frac{3+\alpha}{1-\alpha}+1}\right)^2\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)\\&=4\left(\frac{2\alpha+2}{4}\right)^2\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)\\&=4\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)\\&=(\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)^2(\alpha-1)}{4}\\&=(\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha-1)}{4}\\&=(\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}\end{aligned}$$

(III)

1) تبيين أن الدالة k زوجية :

تذكير

دراسة شفعية دالة (زوجية / فردية):

لتبيين أنّ الدالة f فردية نبين أنّ $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

لتبيين أنّ الدالة f زوجية نبين أنّ $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

لدينا $(-x) \in \mathbb{R}$

ولدينا:

$$k(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

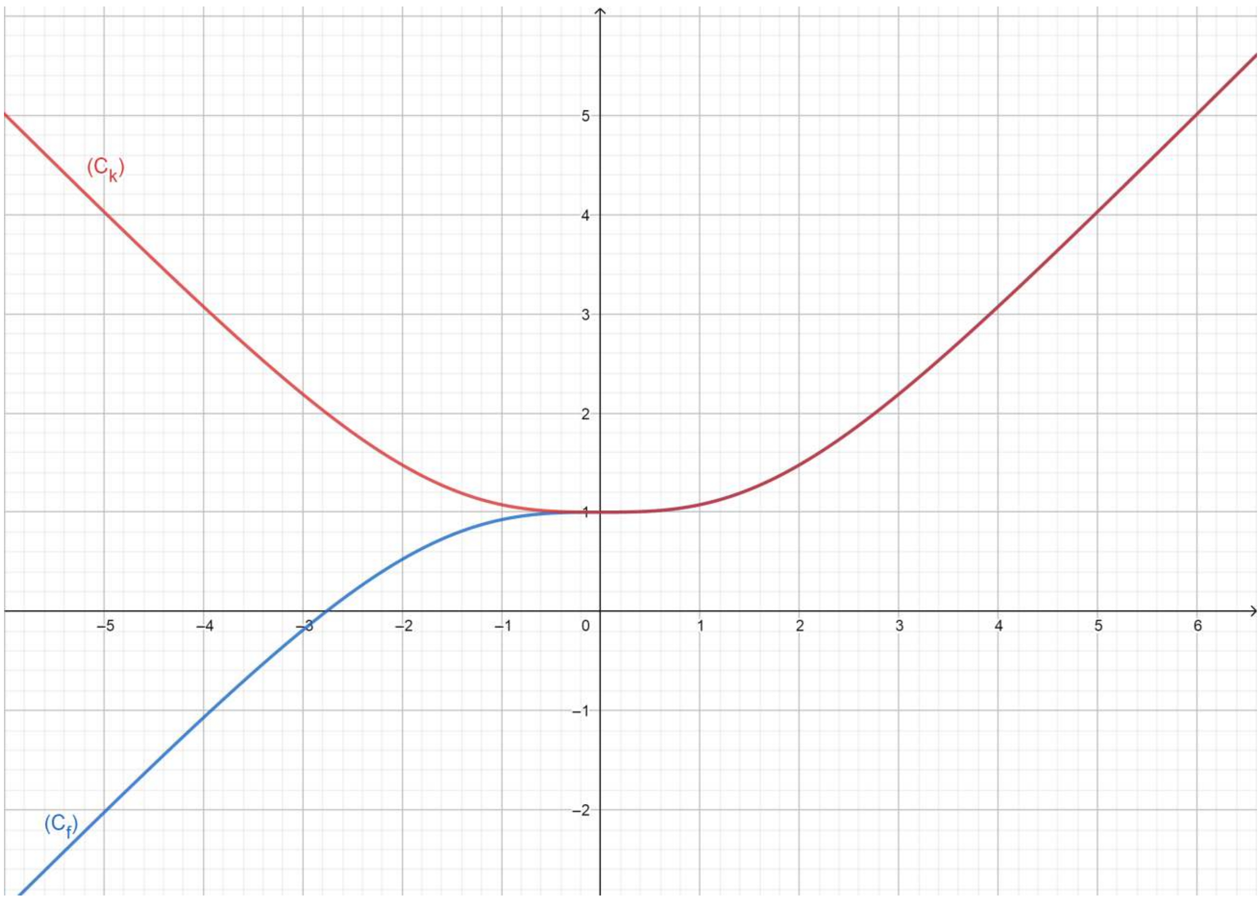
ومنه الدالة k زوجية.

2) أ- تبيين كيفية تمثيل (C_k) انطلاقا من (C_f) :

لمّا $x \geq 0$: (C_k) ينطبق على (C_f)

ولما $x \leq$: (C_k) يناظر (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب (yy')

ب- التمثيل البياني لـ (C_k) :



(IV)

1) التحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$:

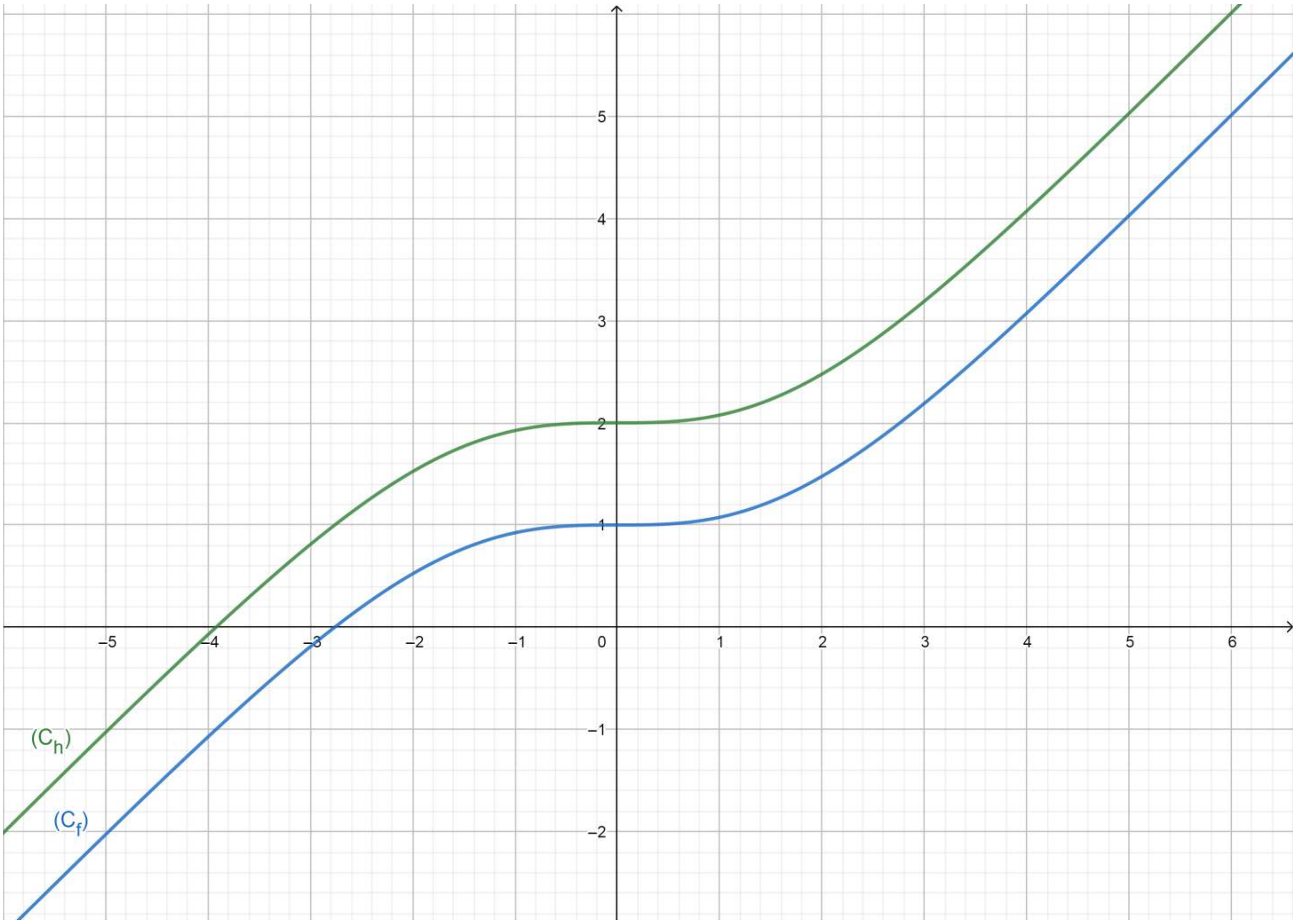
$$f(x) + 1 = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} + 1$$
$$= x + \frac{4}{e^x + 1}$$
$$= h(x)$$

2) أ- استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه:

لدينا: $h(x) = f(x) + 1$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}(0;1)$

ب- التمثيل البياني لـ (C_h) :



◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►

الخليل للرياضيات