الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة أسّية

②

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

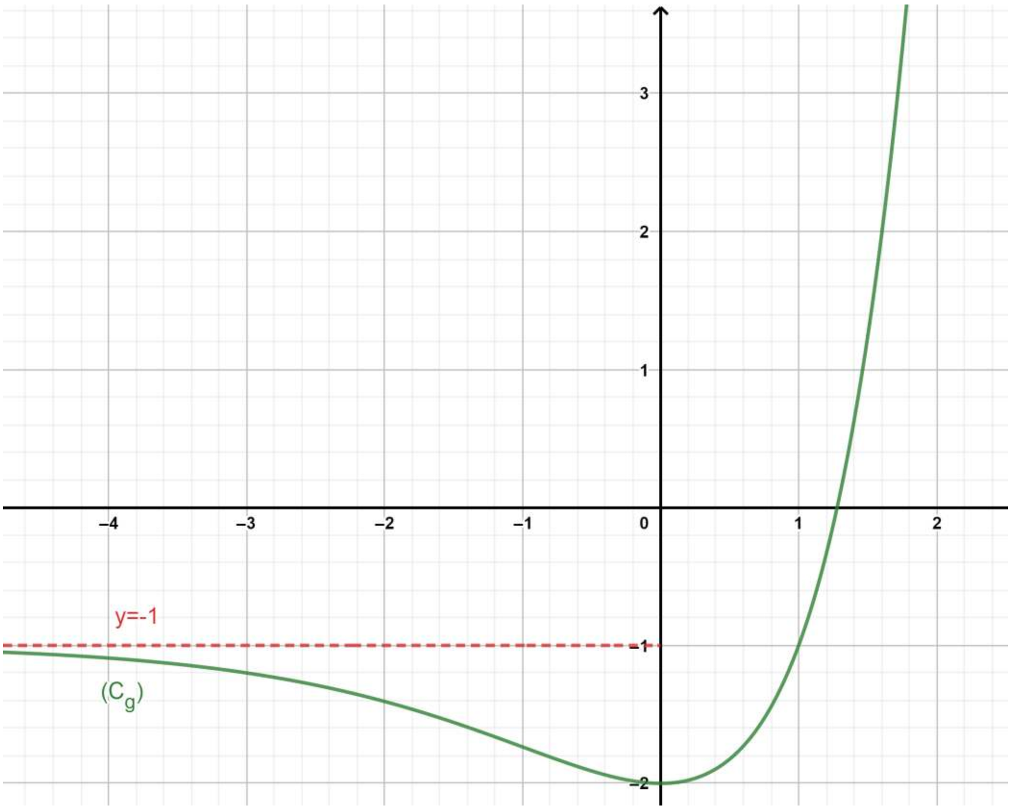
2020 / 12 / 15

التمريـــــن

(I) a ، b و c أعداد حقيقة، نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = (ax+b)e^{x} + c$$

ونسمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. كما في الشكل أدناه:



1) بقراءة بيانية، أوجد ما يلي:

أ- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)]$.

ب- $g(0)$ و $g'(0)$.

2) مما سبق أوجد a ، b و c.

3) نضع: $g(x) = (x-1)e^{x} - 1$.

أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن: $1.2 < \alpha < 1.3$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x}{e^{x}+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستو السابق.

4) أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$.

5) أ- بين أنه من اجل كل x حقيقي:

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^{x}+1)^{2}}$$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

6) عين دون حساب:

$$\lim_{x \to \alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$$

ثم فسر النتيجة هندسيا.

7) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر من المبدأ، يُطلب كتابة معادلة له.

8) بين أن $f(\alpha)=\alpha-1$ ، ثم اوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2} .

9) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

10) مثل بيانيا المماس (T) والمستقيم (Δ) ثم المنحني (C_f) .

11) m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$

◀ حل التمريـــن

(I)

1) من البيان نجد:

أ-

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty \quad \bullet \lim_{x\to-\infty}[g(x)] = -1$$

ب-

$$\bullet\, g'(0) = 0 \quad \bullet\, g(0) = -2$$

2) ايجاد a ، b و c :

لدينا:

$$\begin{cases} g(0) = -2 \\ g'(0) = 0 \\ \lim_{x\to-\infty}[g(x)] = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a(0)+b)e^0 + c = -2 \\ (a(0)+a+b)e^0 = 0 \\ \lim_{x\to-\infty}[(ax+b)e^x + c] = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b + c = -2 \\ a + b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

3) أ- تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}[g(x)] \times \lim_{x\to-\infty}[g(x)] < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

- التحقق من أن $1.2 < \alpha < 1.3$:

لدينا: $g(1.3) = 0.1$ و $g(1.2) = -0.3$

ولدينا: $g(1.3) \times g(1.2) < 0$

ومنه: $1.2 < \alpha < 1.3$.

ب- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) أ- حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]$:

الخليل للرياضيات

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{x}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right] = 0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$ (نهاية شهيرة)

- التفسير الهندسي:

المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

ب- حساب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]$:

- $\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right] = -\infty$

2) أ- تبين أنه من اجل كل x حقيقي: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{-((x-1)e^x-1)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{-g(x)}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f(0) = 0$

ولدينا: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x+1)^2} < 0$ ومنه إشارة المشتقة عكس إشارة $g(x)$.

ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$f(\alpha)$ ↘	0

3) تعيين $\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ دون حساب:

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] = f'(\alpha) = \frac{-g(\alpha)}{(e^\alpha+1)^2} = 0$$

- التفسير الهندسي:

المنحني (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة α .

4) تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر من المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

يوجد مماس يمر من $O(0;0)$ معناه:

$$f'(a)(0-a) + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow -af'(a)x + f(a) = 0$$
$$\Rightarrow a\frac{(a-1)e^a - 1}{(e^a+1)^2} + \frac{a}{e^a+1} = 0$$
$$\Rightarrow a(a-1)e^a - a + a(e^a+1) = 0$$
$$\Rightarrow a^2e^a = 0$$
$$\Rightarrow a = 0$$

ومنه معادلة المماس هي:

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = \frac{-g(0)}{(e^0+1)^2}x + \frac{0}{e^0+1}$$
$$y = \frac{1}{2}x$$

5) تبيين أنّ $f(\alpha) = \alpha - 1$:

مما سبق لدينا

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha-1)e^\alpha - 1 = 0$$
$$\Rightarrow (\alpha-1)e^\alpha = 1$$
$$\Rightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha+1}$$
$$= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1}$$
$$= \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha}$$
$$= \alpha - 1$$

- <u>حصر $f(\alpha)$</u>:

لدينا:

$$1.2 < \alpha < 1.3$$
$$0.2 < \alpha - 1 < 0.3$$
$$0.2 < f(\alpha) < 0.3$$

6) أ- تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x - xe^x - x}{e^x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-xe^x}{e^x+1}\right] = 0$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$ (نهاية شهيرة)

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

الخليل للرياضيات

دراسة إشارة الفرق: $[f(x)-y]$:

$$f(x)-y=\frac{x}{e^x+1}-x=\frac{x-xe^x-x}{e^x+1}=\frac{-xe^x}{e^x+1}$$

لدينا $(e^x+1)>0$ و $e^x>0$ ومنه الإشارة من إشارة $(-x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

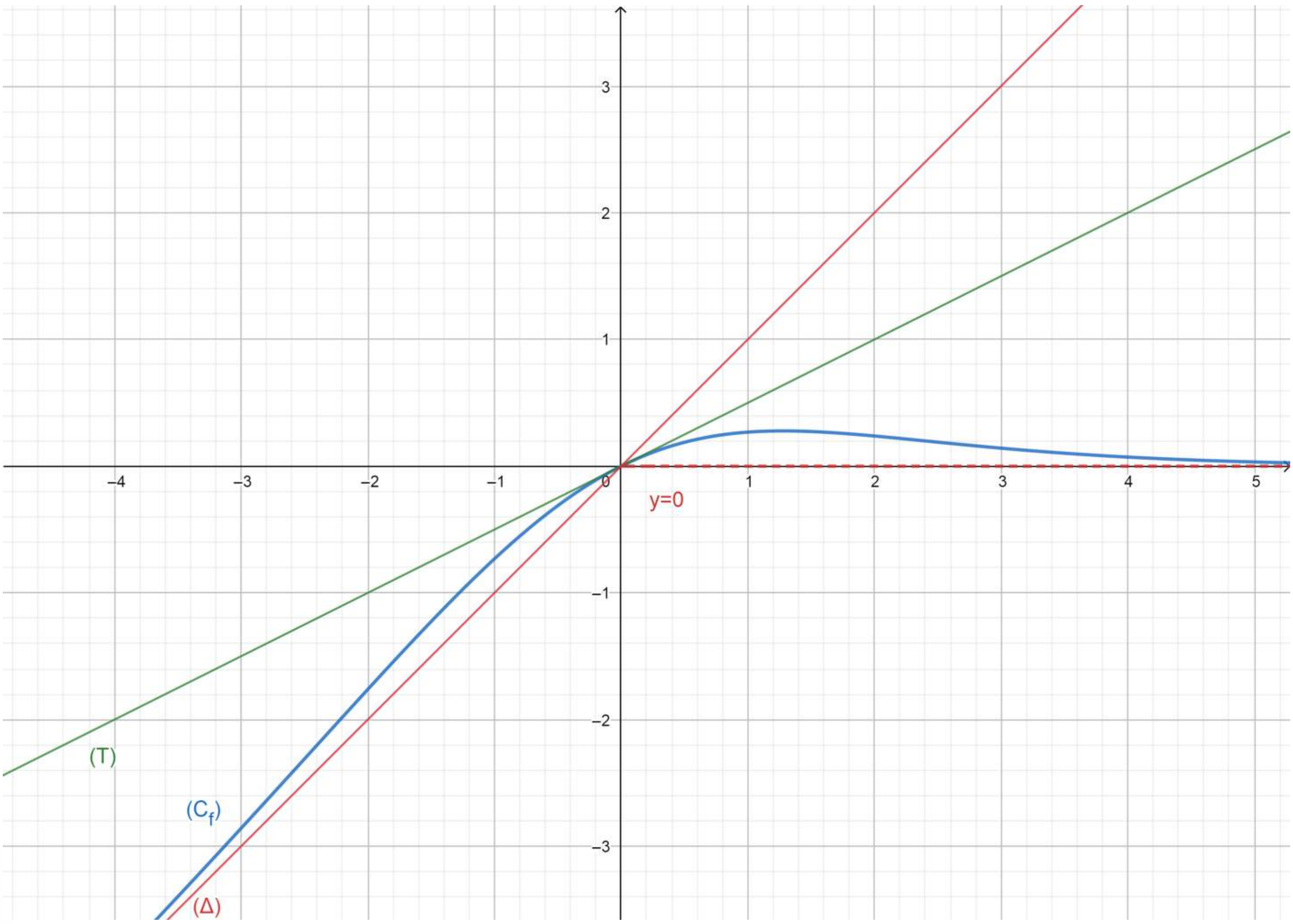
الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) في المجال: $]-\infty;0[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0
- (C_f) تحت (Δ) في المجال: $]0;+\infty[$

7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب $y=0$ و المستقيم المقارب المائل (Δ)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



8) المناقشة البيانية:

لما $m < 0$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حل وحيد معدوم

لما $0 < m < \alpha$ المعادلة تقبل حلين موجبين

لما $m = \alpha$ المعادلة تقبل حل مضاعف موجب

لما $m > \alpha$ المعادلة لا تقبل حلولا

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►