مجلة قرماط للعلوم الفيزيائية

3 BAC

بكالوريا

الوحدة الثانية

تطور جملة ميكانيكية

الجزء الثالث

دراسة حركة القذيفة

علوم تجريبية
تقني رياضي
رياضيات

- ملخص الدروس
- تمارين متنوعة

الأستاذ
قرماط سيف الدين

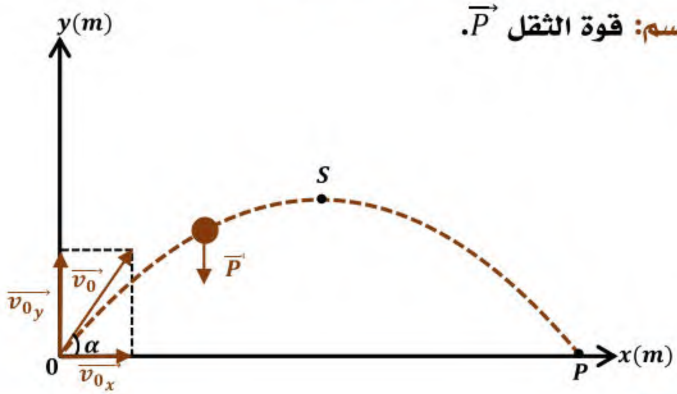
الوحدة 2: تطور جملة ميكانيكية

دراسة حركة القذيفة:

نقذف جسما صلبا (S) كتلته m بسرعة ابتدائية $\overrightarrow{v_0}$ يصنع حاملها الزاوية α مع المستوي الأفقي.

1. تمثيل القوى الخارجية المطبقة على الجسم:

القوى المؤثرة على الجسم: قوة الثقل $\overrightarrow{P}$.



2. الشروط الابتدائية:

مركبتي شعاع السرعة الابتدائية $\overrightarrow{v_0}$:

لدينا: $\sin(\alpha) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{v_{0_y}}{v_0} \Rightarrow v_{0_y} = v_0 \sin(\alpha)$

ولدينا: $\cos(\alpha) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{v_{0_x}}{v_0} \Rightarrow v_{0_x} = v_0 \cos(\alpha)$

مركبتي شعاع الموضع الابتدائي $\overrightarrow{r}$:

لدينا: $\overrightarrow{r}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

3. دراسة طبيعة حركة القذيفة على المحورين:

الجملة المدروسة: الجسم.

المرجع المناسب: سطحي أرضي باعتباره غاليلي.

القوى المؤثرة: قوة الثقل $\overrightarrow{P}$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن لدينا: $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_G}$ ومنه: $\vec{P} = \overrightarrow{a_G}$

بالإسقاط على المحور Ox نجد: $0 = ma_x$ ومنه: $a_x = 0$

إذن: طبيعة الحركة مستقيمة منتظمة.

بالإسقاط على المحور Oy نجد: $-P = ma_y$ ومنه: $-mg = ma_y$ ومنه: $a_y = -g$

إذن: طبيعة الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام.

4. المعادلات التفاضلية للسرعة والموضع:

المحور Ox

المعادلة التفاضلية للسرعة:

لدينا: $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ و $a_x = 0$

إذن: $\frac{dv_x}{dt} = 0$

المعادلة التفاضلية للموضع:

لدينا: $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ و $a_x = 0$

إذن: $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

المحور Oy

المعادلة التفاضلية للسرعة:

لدينا: $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ و $a_y = -g$

إذن: $\frac{dv_y}{dt} = -g$

المعادلة التفاضلية للموضع:

لدينا: $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$ و $a_y = -g$

إذن: $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$

5. المعادلات الزمنية للسرعة والموضع على المحورين:

المحور Ox

لدينا: $a_x = 0$

بالتكامل: $v_x(t) = C_1$

بالتكامل: $x(t) = C_1t + C_2$

لما $t = 0$:

$$\begin{cases} v_{0_x} = C_1 \\ x_0 = C_1 \times 0 + C_2 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} v_{0_x} = C_1 = v_0\cos(\alpha) \\ x_0 = C_2 = 0 \end{cases}$$

بالتعويض نجد:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos(\alpha) \\ x(t) = v_0\cos(\alpha)t \end{cases}$$

المحور Oy

لدينا: $a_y = -g$

بالتكامل: $v_y(t) = -gt + C_3$

بالتكامل: $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + C_4$

لما $t = 0$:

$$\begin{cases} v_{0_y} = -g \times 0 + C_3 \\ y_0 = -\frac{1}{2}g \times 0^2 + C_3 \times 0 + C_4 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} v_{0_y} = C_3 = v_0\sin(\alpha) \\ y_0 = C_4 = 0 \end{cases}$$

بالتعويض نجد:

$$\begin{cases} v_y(t) = -gt + v_0\sin(\alpha) \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)\,t \end{cases}$$

6. إيجاد معادلة المسار:

لدينا: $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \dots (1)$

ولدينا: $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t \dots (2)$

من العلاقة (1)**لدينا:** $t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$

بالتعويض في العلاقة (2) **نجد:**

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}\right)^2 + v_0 \sin(\alpha)\left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}\right)$$

ومنه:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)\, x$$

7. الذروة S:

هي أعلى نقطة تبلغها القذيفة والتي تنعدم عندها مركبة الســـرعة على المحور Oy.

حيث لدينا: $\begin{cases} v_y(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha) \dots (1) \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t \dots (2) \end{cases}$

عند اللحظة t_S **يكون:** $v_y = 0$

بالتعويض في العلاقة (1) **نجد:** $0 = -gt_S + v_0 \sin(\alpha)$

ومنه: $t_S = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$

بالتعويض في العلاقة (2)**:**

$$y_S = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}\right)^2 + v_0 \sin(\alpha)\left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}\right)$$

ومنه: $y_S = -\frac{1}{2}g\frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g}$

ومنه: $y_S = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g}$

إذن:

$$y_s = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$$

8. المدى الأفقي OP:

هو أكبر مسافة أفقية تقطعها القذيفة وفق المحور الأفقي Ox.

تحديد المدى OP: أي إيجاد قيمة الفاصلة x_P

لدينا عند P يكون: $y_P = 0$

بالتعويض في معادلة المسار نجد:

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x_P^2 + \tan(\alpha)\,x_P$$

ومنه: $0 = x_P\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x_P + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)$

معناه: إما (مرفوض) $x_P = 0$ أو $-\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x_P + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 0$

ومنه: $\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x_P = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ **ومنه:** $\frac{g}{2v_0^2\cos(\alpha)}x_P = \sin(\alpha)$

$$x_P = \frac{\sin(\alpha)\,2v_0^2\cos(\alpha)}{g}$$

نعلم أن: $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$

بالتعويض نجد: $x_P = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}$

ملاحظات:

- **المدى x_P يتعلق بالسرعة الابتدائية v_0 والزاوية α.**
- **كلما كانت قيمة سرعة القذيفة v_0 أكبر نحصل على مدى أكبر.**
- **بالنسبة لزاوية القذف α، يكون المدى أعظمي إذا كان $\sin(2\alpha) = 1$**
  ومنه $2\alpha = 90°$ إذن: $\alpha = 45°$

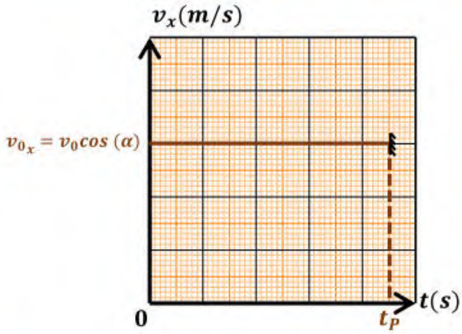
9. حساب سرعة القذيفة عند كل لحظة:

لدينا:
$$\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos(\alpha) \\ v_y(t) = -gt + v_0\sin(\alpha) \end{cases}$$

ومنه لحساب سرعة القذيفة: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

10.منحنيات خاصة بالمثال السابق:

أ. المنحنى $v_x(t)$:

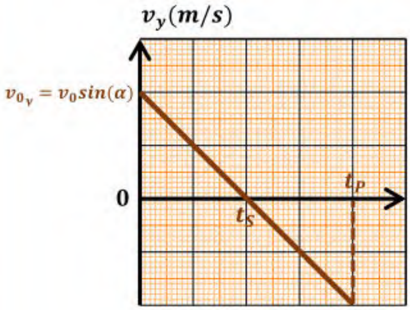


استغلال المنحنى $v_x(t)$:

إيجاد قيمة v_{0_x} عند اللحظة $t = 0$.

إيجاد الزمن اللازم للوصول إلى المدى t_P.

ب. المنحنى $v_y(t)$:



استغلال المنحنى $v_y(t)$:

إيجاد قيمة v_{0_y} عند اللحظة $t = 0$.

إيجاد الزمن اللازم للوصول إلى الذروة t_S.

إيجاد الزمن اللازم للوصول إلى المدى t_P.

استغلال المنحنيين $v_x(t)$ و $v_y(t)$:

إيجاد قيمة v_0 حيث: $v_0 = \sqrt{v_{0_x}^2 + v_{0_y}^2}$

إيجاد قيمة زاوية القذف α حيث: $\tan(\alpha) = \frac{v_{0_x}}{v_{0_y}}$

ج. منحنى السرعة $v(t)$:

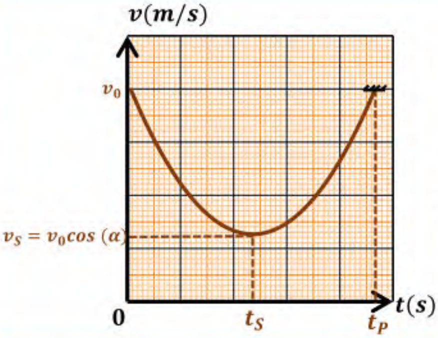
استغلال المنحنى $v(t)$:

إيجاد قيمة السرعة الابتدائية v_0

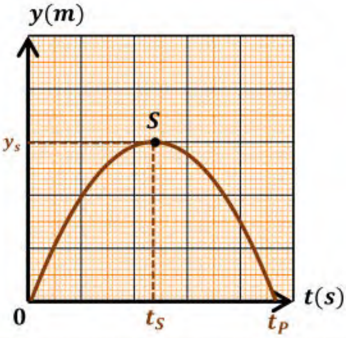
إيجاد الزمن اللازم للوصول إلى الذروة t_S.

إيجاد الزمن اللازم للوصول إلى المدى t_P.

إيجاد قيمة v_{0_x} .



د. المنحنى $y(t)$:



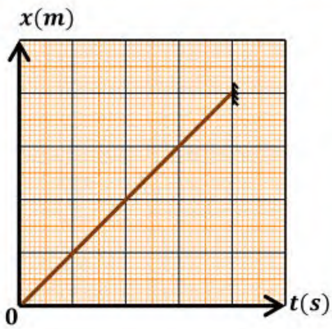
استغلال المنحنى $y(t)$:

إيجاد أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة y_S.

إيجاد الزمن اللازم للوصول إلى الذروة t_S.

إيجاد الزمن اللازم للوصول إلى المدى t_P.

ه. المنحنى $x(t)$:



استغلال المنحنى $x(t)$:

العبارة البيانية:

البيان عبارة عن خط مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل $x = At$ حيث A يمثل ميل المستقيم.

العبارة النظرية:

لدينا: $x = v_0 \cos(\alpha)\, t$

بالمطابقة بين العبارتين نجد: $A = v_0 \cos(\alpha)$

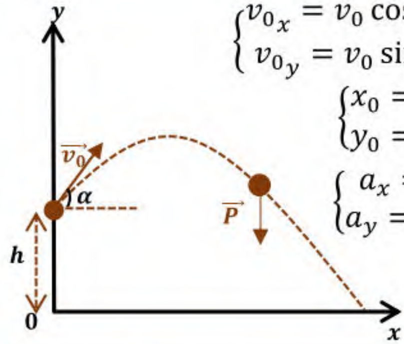
11. استخراج الشروط الابتدائية في حالات أخرى:

الحالة 01:

$$\begin{cases} v_{0_x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0_y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$



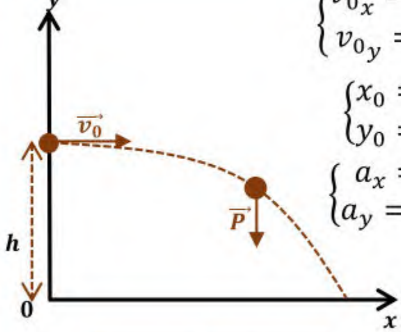
$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha)\, x + h$$

الحالة 02:

$$\begin{cases} v_{0_x} = v_0 \\ v_{0_y} = 0 \end{cases}$$

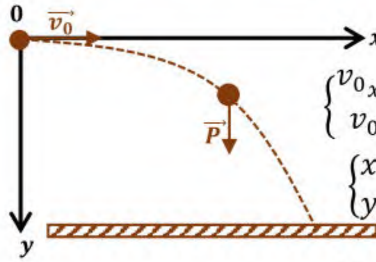
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$



$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + h$$

الحالة 03:



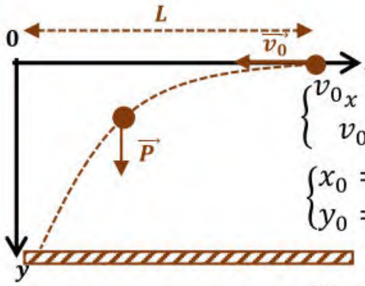
$$\begin{cases} v_{0_x} = v_0 \\ v_{0_y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$$

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

الحالة 04:



$$\begin{cases} v_{0_x} = -v_0 \\ v_{0_y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = L \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$$

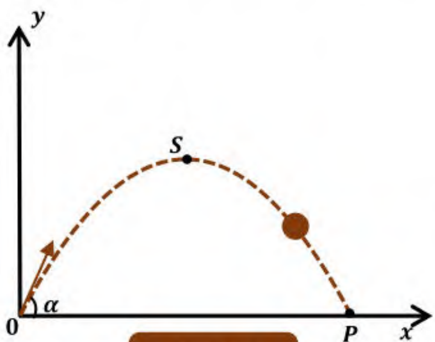
$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2 - \frac{gL}{v_0^2}x + \frac{gL^2}{v_0^2}$$

ملاحظات:

جزء التمارين

التمرين الأول:

يقذف جسم من النقطة O على الأرض بسرعة ابتدائية $\overrightarrow{v_0}$ تصنع زاوية α مع الأفق كما في الشكل -1-، لنفرض أن احتكاكات الهواء مهملة.



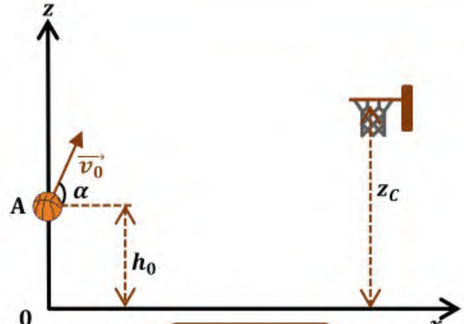
الشكل 1

1. ادرس طبيعة حركة القذيفة.
2. أوجد المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $y(t)$ في المعلم $O,\vec{\imath},\vec{k}$ ثم استنتج معادلة مسار حركتها.
3. احسب أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة.
4. احسب المدى OP.
5. إذا علمت أن السرعة ثابتة على المحور Ox:

- عين قيمة α التي من أجلها يكون المدى أعظمي.

المعطيات: $\alpha = 50°$ ، $v_0 = 10m/s$.

التمرين الثاني:



الشكل 2

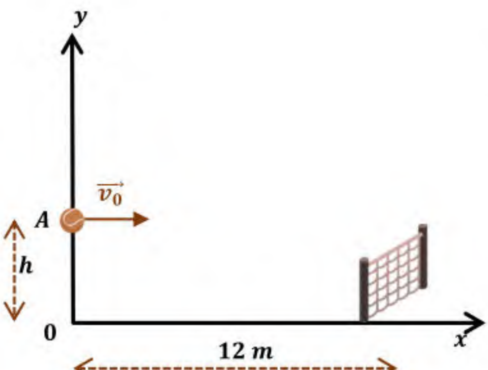
قام لاعب في مقابلة لكرة السلة، بتسديد الكرة نحو السلة من النقطة A منطبقة على مركز الكرة الموجودة على ارتفاع $h_0 = 2.1m$ من سطح الأرض بسرعة ابتدائية $v_0 = 8m/s$ يصنع حاملها زاوية $\alpha = 37°$ مع الأفق (الشكل -2-)، ليمر مركز الكرة G بمركز السلة الذي إحداثياته $(x_C = 4,50\ m\ ; z_C)$ في المعلم السطحي الأرضي $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$ الذي نعتبره غاليليا.

1. أوجد المعادلات الزمنية للسرعة والموضع ثم استنتج معادلة مسار حركتها.
2. احسب z_C.
3. يعبر مركز عطالة الكرة من مركز السلة بسرعة v_c التي يصنع حاملها مع الأفق زاوية β.
   - أوجد قيمتي كل من $\overrightarrow{v_c}$ و β.

المعطيات: $g = 9,8m.s^{-2}$.

التمرين الثالث:

لإنجاز ارسال يقذف لاعب تنس بمضربه الكرة بسرعة أفقية $\overrightarrow{v_0}$ ومن النقطة A الواقعة على ارتفاع $h = 2m$ من سطح الأرض وعليها أن تجتاز الشباك علوه $0,90\ m$ (الشكل - 3). البعد بين اللاعب والشباك هو $12\ m$.



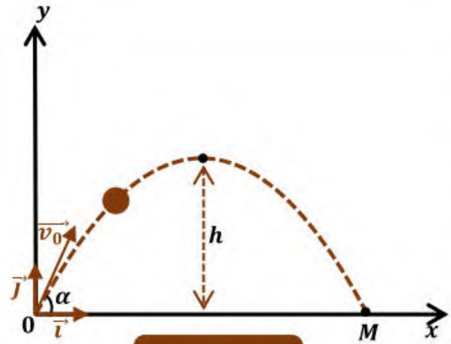
الشكل 3

1. ادرس طبيعة حركة مركز عطالة الكرة في المعلم $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ معتبرا مبدأ الأزمنة لحظة ضرب الكرة مع اهمال تأثير الهواء عليه.
2. اكتب المعادلات الزمنية للسرعة والموضع.
3. بين أن معادلة المسار هي: $y = -\frac{g}{2{v_0}^2} \times x^2 + y_0$
4. ماهي قيمة السرعة حتى تمر الكرة ب $10\ cm$ فوق الشباك؟
5. احسب قيمة السرعة عند اجتياز الشباك.
6. احسب مدة السقوط، ثم استنتج مدى القذيفة.

المعطيات: $g = 9,8m.s^{-2}$.

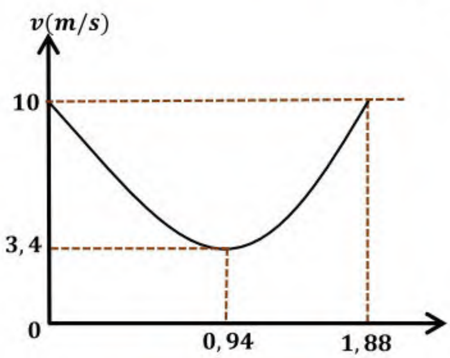
التمرين الرابع:

نقذف عند اللحظة $t = 0$ كرة كتلتها m بسرعة ابتدائية $\overrightarrow{v_0}$ من النقطة O كما هو مبين في (الشكل -4). نعتبر أن حركة الجسم تتم في المستوي المزود بمعلم $O,\vec{i},\vec{j}$ وتدرس بالنسبة للمرجع السطحي الأرضي الذي نعتبره غاليليا، نهمل كلا من مقاومة الهواء ودافعة أرخميدس. يمثل البيان الموضح في الشكل-5- تغيرات قيمة سرعة القذيفة بدلالة الزمن بين الموضعين O و M.



الشكل 4

1. مثل القوى الخارجية المؤثرة على الجسم الصلب.
2. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بين طبيعة الحركة.
3. أوجد المعادلات الزمنية لكل من السرعة والموضع.
4. أوجد من البيان:
   1.4. القيمة v_0 لشعاع السرعة $\overrightarrow{v_0}$.
   2.4. قيمة المركبة v_{0_x} لشعاع السرعة $\overrightarrow{v_0}$.
5. استنتج قيمة كل من الزاوية α التي قذف بها الجسم وقيمة v_{0_y}.
6. مثل كل من $v_x(t)$ و $v_y(t)$ في المجال الزمني $(0 \le t \le 1,88)s$
7. استنتج من المنحنيين كل من المسافة الأفقية OM وأقصى ارتفاع تبلغه القذيفة h.

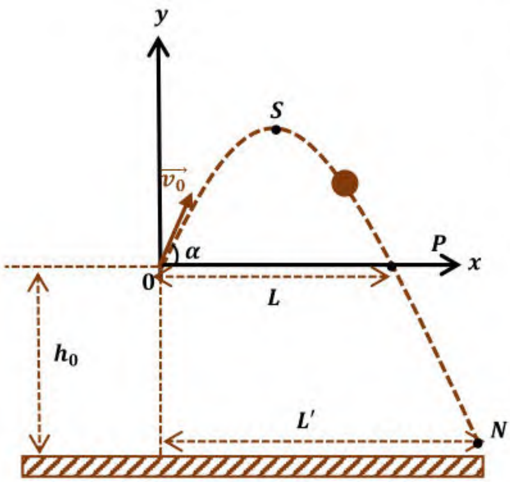


الشكل 5

التمرين الخامس:

من النقطة O تقع على ارتفاع $h_0 = 5m$ من سطح الأرض نقذف عند اللحظة $t = 0s$ كرة S كتلتها m بسرعة ابتدائية $v_0 = 20m.s^{-1}$ يصنع شعاعها الزاوية $\alpha = 60°$ ، تهمل كل قوى الاحتكاك وكذا دافعة أرخميدس، نعتبر مبدأ الأزمنة والفواصل عند النقطة O (الشكل-6-).

1. ادرس طبيعة لحركة الكرة.
2. اكتب المعادلات الزمنية للسرعة والموضع.
3. اكتب معادلة المسار وما طبيعته.
4. أوجد أقصى ارتفاع تبلغه الكرة بالنسبة للأرض.
5. أوجد مدى الكرة L وكذا الزمن اللازم لذلك.
6. تأكد أن زمن بلوغ المدى ضعف زمن بلوغ الذروة.
7. احسب المسافة الأفقية L' بين موضع سقوط الكرة على الأرض والمحور Oy.
8.
   1.8. احسب سرعة الكرة عند المواضع S، P، N.
   2.8. ماذا تلاحظ فيما يخص السرعة عند P.



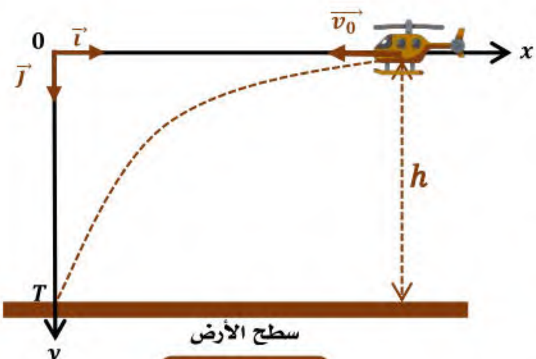
الشكل 6

المعطيات: $g = 10\, m.s^{-2}$.

التمرين السادس:

تستعمل الطائرات المروحية في بعض الحالات لإيصال مساعدات إنسانية إلى مناطق منكوبة يتعذر الوصول اليها.

تتحرك طائرة مروحية على ارتفاع $h = 450m$ من سطح الأرض بسرعة أفقية $v_0 = 50m.s^{-1}$ ثابتة، ونسقط الصندوق نعتبره نقطي عند اللحظة $t = 0$ انطلاقا من النقطة $A(450\, m\, ; 0)$ فيرتطم بالأرض عند النقطة T.



الشكل 7

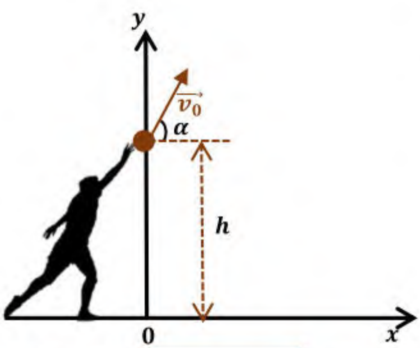
ندرس حركة الصـــــندوق في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ المرتبط بالأرض الذي نعتبره غاليليا (الشكل-7-) ، نهمل تأثير الهواء:

1. ادرس طبيعة الحركة.
2. أوجد المعادلات الزمنية للسرعة والموضع.
3. بين أن معادلة المسار تكتب من الشكل: $y = 2\times 10^{-3}x^2 - 1.8x + 405$.
4. احسب لحظة ارتطام الصندوق بالأرض.
5. ماهي سرعة الصندوق لحظة ارتطامها بالأرض.

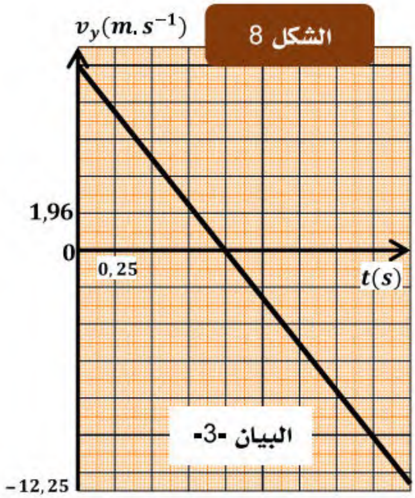
التمرين السابع:

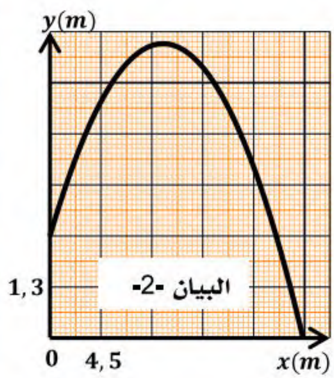
خلال الألعاب الأولمبية التي جرت بالبرازيل سنة 2016 . تحصل الأمريكي ريان كروزي $(Rayan\ Crouser)$ على الميدالية الذهبية في رياضـــة رمي الجلة لألعاب القوى على إثر رمية قدرها (D).

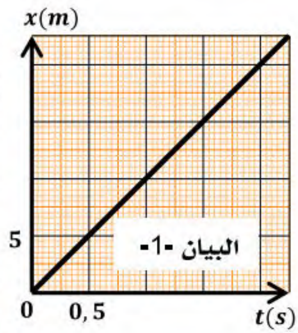
بإهمال تأثير الهواء، تمت دراســـة محاكات حركة مركز عطالة الجملة G في المعلم (O,x,y) المرتبط بالمرجع الأرضي الذي نعتبره غاليليا، ابتداء من لحظة رميها $(t=0)$ على ارتفاع h من ســطح الأرض إلى غاية ارتطامها به (الشــكل-8-) فتم الحصول على المنحنيات البيانية التالية:



الشكل 8







1. بالاعتماد على المنحنيات البيانية:

1.1. حدد طبيعة حركة مركز عطالة الجملة G على كل من المحورين Ox و Oy مع تبرير إجابتك.

2.1. حدد قيمة المقادير التالية: مركبتي السرعة الابتدائية v_{0_x} و v_{0_y} ، مركبة التسارع a_x و a_y والارتفاع h.

3.1. اكتب المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $y(t)$ لحركة G في المعلم (O,x,y).

4.1. اكتب معادلة البيان -2- ، ماذا تمثل؟

5.1. ماهي قيمة كل من الزاوية α والسرعة التي قذفت بها الجلة v_0؟

6.1. ماهي قيمة المسافة الأفقية D التي مكنت الرياضي من الفوز بالمدالية الذهبية.

2. أنجز مخطط الحصيلة الطاقوية للجملة (الجلة) بين اللحظتين $t = 0$ و $t = 2.25s$ ثم اكتب معادلة انحفاظ الطاقة واستنتج سرعة مركز عطالة الجلة عند لحظة ارتطامها بسطح الأرض $t = 2.25s$.

3. حدد خصائص شعاع سرعة مركز عطالة G عند اللحظة $t = 2.25s$.

4. جد عبارة الطاقة الكلية للجملة (جلة+الأرض) عند اللحظتين المذكورتين سابقا بدلالة كل من v_0 ، h ، g و m(كتلة الجلة). ماذا تستنتج؟
(نعتبر مستو سطح الأرض مرجعا لقياس الطاقة الكامنة الثقالية).

المعطيات : $g = 9,8\, m.s^{-2}$