سلسلة الرياضيات السهلة

حوليات الرياضيات

■ شعبة : علوم تجريبية

من 2008 إلى 2019

إعداد : خالد بخاخشة ©

مقدمة

المقدمات لا يقرأها أحد ..

إقلب الصفحة

الفهرس

تصحيح مقترح لبكالوريا 2008 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول(4,5ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $z^2-(1+2i)z-1+i=0$.

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث $|z_1|<|z_2|$. بيّن أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

لتكن A، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: 1، z_1 و z_2 .

ليكن z العدد المركب حيث: $z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$.

أ- إنطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$.

برهن أن: $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ بحيث θ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية.

ب- أكتب z على الشكل الأسي.

جـ- أكتب z على الشكل المثلثي و استنتج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A، يطلب تعيين نسبته و زاويته .

التمرين الثاني(4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر المستوي (P) الذي معادلته: $x+2y-z+7=0$.

و النقط: $A(2;0;1)$، $B(3;2;0)$، $C(-1;-2;2)$.

1) تحقق أن النقط A، B و C ليست على استقامية، ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $y+2z-2=0$.

2) أ- تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC)

ب- أحسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;\alpha),(C;\beta)\}$ حيث α,β عددان حقيقيان يحققان $\alpha+\beta+1\neq 0$.

4) عيّن α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ).

التمرين الثالث(4ن)

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1;2]$ بالعبارة: $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

أ- بيّن أن الدالة f متزايدة على I.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي: $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، u_n ينتمي إلى I.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$.

ب- عيّن النهاية: $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الرابع(7,5ن)

I) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1\ cm$.

عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

(C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر النتيجة بيانيا. (نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)

2) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيّراتها .

3) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثييها .

4) أكتب معادلة المماس للمنحى (C_g) عند النقطة I.

5) أرسم (C_g).

6) H الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان .

- عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند 0 .

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g(x^2)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عيّن اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيّراتها .

الموضوع الثاني

التمرين الأول(3ن)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد فقط صحيح ، عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك .

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(1;3;-1)$ ، $B(4;1;0)$ ، $C(-2;0;-2)$ و $D(3;2;1)$.

و المستوي (P) الذي معادلته $x-3z-4=0$.

1) المستوي (P) هو: ج1) (BCD) ج2) (ABC) ج3) (ABD)

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو : ج1) $\vec{n_1}(1;2;1)$ ج2) $\vec{n_2}(-2;0;6)$ ج3) $\vec{n_3}(2;0;-1)$

3) المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي : ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

التمرين الثاني(5ن)

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي : $u_0=\frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$

1) أ- أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+2$.

ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 .

جـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة .

جـ- هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين الثالث(5ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

2) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث : $z_A = 2 + i$ و $z_B = -2 - 2i$.

عيّن z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3) لتكن C النقطة ذات الاحقة z_C حيث : $z_C = \dfrac{4 - i}{1 + i}$.

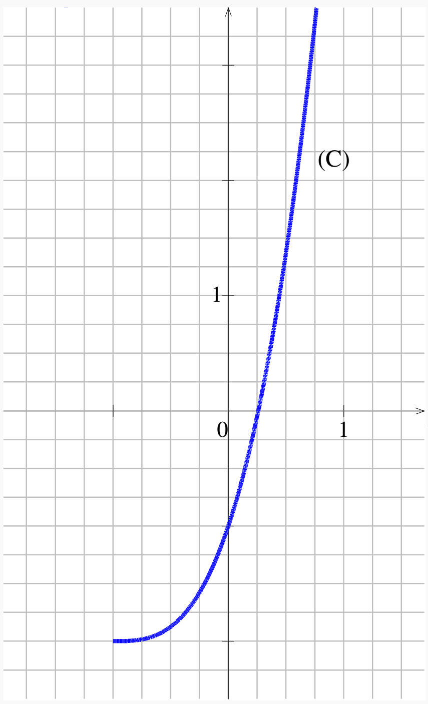
أكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

4) أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k > 0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

ب- **تطبيق** : عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرّف بـ: $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$.

التمرين الرابع(7ن)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$



1) أ- بقراءة بيانية شكّل جدول تغيّرات الدالة g وحدد $g(0)$ و إشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب- علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

جـ- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2) f هي الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O,\vec{i};\vec{j})$

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$.

ب- عيّن دون حساب $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ و فسّر النتيجة بيانيا .

جـ- أحسب $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)]$ و فسّر النتيجتين بيانيا .

د- شكّل جدول تغيرات f .

3) نأخذ $\alpha \approx 0.26$ ،

أ- عيّن مدوّر $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب- أرسم المنحنى (Γ) .

4) أ- أكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

ب- عيّن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقق $F(1)=2$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

1) حل في $\mathbb{C}$، المعادلة: $z^2-(1+2i)z-1+i=0$.

لدينا: $\Delta=(1+2i)^2-4\times1\times(-1+i)=1$ و منه للمعادلة حلين هما:

$z_1=\dfrac{1+2i-1}{2}=i$ و $z_2=\dfrac{1+2i+1}{2}=1+i$.

• تبيان أن $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ حقيقي:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}=\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008}=\left(\frac{i(1-i)}{2}\right)^{2008}=\left(\frac{i+1}{2}\right)^{2008}=\left(\frac{(i+1)^2}{4}\right)^{1004}=\left(\frac{2i}{4}\right)^{1004}=\left(\frac{i}{2}\right)^{1004}=\frac{(i^4)^{251}}{2^{1004}}=\frac{1}{2^{1004}}$$

2) أ- إعتمادا على التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$.

• لبرهان أن: $e^{-i\theta}=\dfrac{1}{e^{i\theta}}$ يكفي إثبات أن: $e^{-i\theta}\times e^{i\theta}=1$.

لدينا: $e^{-i\theta}\times e^{i\theta}=e^{(-i\theta+i\theta)}=e^0=\cos0+i\sin0=1$

• إثبات: $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

لدينا: $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times\dfrac{1}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times e^{-i\theta_2}=e^{i\theta_1-i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

ب- كتابة z على الشكل الأسّي.

لدينا: $z=\dfrac{z_2-1}{z_1-1}$ ومنه $z=\dfrac{z_2-1}{z_1-1}=\dfrac{1+i-1}{i-1}=\dfrac{i}{i-1}=\dfrac{i(-i-1)}{2}=\dfrac{1-i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

لدينا: $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ ومنه: $|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

و بفرض θ عمدة للعدد المركب z، يكون: $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$، و منه $\arg(z)=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن: $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

جـ- كتابة z على الشكل المثلثي:

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

• استنتاج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A، مع تعيين نسبته و زاويته :

لدينا : $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{z_2-1}{z_1-1} = z$ يكافئ $(z_1-1)\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = z_2-1$ و منه C هي صورة B بالتشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.

حل مقترح التمرين الثاني

1) التحقق من أن النقط A ، B و C ليست على استقامية :

لدينا : $A(2;0;1)$ ، $B(3;2;0)$ ، $C(-1;-2;2)$ ، و منه $\overrightarrow{AB}(1;2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;-2;1)$.

لدينا $\frac{-2}{2} \neq \frac{-3}{1}$ و بالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B و C ليست في استقامية و تعيّن مستويا وحيدا و هو المستوي (ABC) .

• تبيان أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $y+2z-2=0$.

علما أن النقط A ، B و C ليست في استقامية، يكفي إثبات أن إحداثياتها تحقق المعادلة.

$A \in (ABC)$ لأن : $y_A+2z_A-2=0+2\times1-2=0$.

$B \in (ABC)$ لأن : $y_B+2z_B-2=2+2\times0-2=0$.

$C \in (ABC)$ لأن : $y_C+2z_C-2=-2+2\times2-2=0$.

2) أ- التحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان :

لدينا : $(P): x+2y-z+7=0$ و $(ABC): y+2z-2=0$.

و منه : $\overrightarrow{n_1}(1;2;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\overrightarrow{n_2}(0;1;2)$ شعاع ناظمي لـ (ABC) .

لدينا $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=1\times0+2\times1+(-1)\times2=0$ و بالتالي $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ متعامدان أي أن (P) و (ABC) متعامدان.

• تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC) :

لدينا : تمثيل ديكارتي للمستقيم (Δ) من الشكل : $\begin{cases} x+2y-z+7=0 \\ y+2z-2=0 \end{cases}$ ، بوضع مثلا : $z=t$

نجد : $\begin{cases} x=-2y+t-7 \\ y=-2t+2 \end{cases}$ و منه تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) من الشكل : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=5t-11 \\ y=-2t+2 \\ z=t \end{cases}$

ب- حساب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) :

المستويان (P) و (ABC) متقاطعان وفق المستقيم (Δ) و $A\in(ABC)$ و منه :

$$d(A;(\Delta))=d(A;(P))=\frac{|2+2\times0-1+7|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

3) G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;\alpha),(C;\beta)\}$ حيث α,β عددان حقيقيان يحققان $\alpha+\beta+1\neq0$

تعيين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ).

لدينا إحداثيات G هي : $\begin{cases} x_G=\frac{3\alpha-\beta+2}{1+\alpha+\beta} \\ y_G=\frac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta} \\ z_G=\frac{2\beta+1}{1+\alpha+\beta} \end{cases}$

$G\in(\Delta)$ معناه $G\in(P)$ لأن $G\in(ABC)$، و بالتالي $x_G+2y_G-z_G+7=0$ ، نجد: $\alpha=-\frac{4}{7}$.

حل مقترح التمرين الثالث

1) $I=[1;2]$ ، $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

أ- تبيان أن الدالة f متزايدة على I.

الدالة f قابلة للإشتقاق على I و $f'(x)=\frac{6}{(-x+4)^2}$.

و منه من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماماعلى I.

ب- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I، $f(x)$ ينتمي إلى I .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على I و منه من أجل كل $x\in[1;2]$، $f(x)\in[f(1);f(2)]$

و لدينا: $f(2)=2$ و $f(1)=1$ ، إذن من أجل كل $x\in I$ ، $f(x)\in I$

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي: $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 2$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=\frac{3}{2}$ و منه $1\le u_0\le 2$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $1\le u_n\le 2$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1\le u_{n+1}\le 2$.

لدينا حسب الفرض $1\le u_n\le 2$ و منه حسب السؤال (أ) $1\le f(u_n)\le 2$ أي: $1\le u_{n+1}\le 2$. و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 2$.

ب- دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لديـنا: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2}{-u_n+4}-u_n=\frac{u_n{}^2-3u_n+2}{-u_n+4}=\frac{(u_n-1)(u_n-2)}{-u_n+4}$.

و بما أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 2$ فإن $u_n-1\ge 0$ و $u_n-2\le 0$ و $-u_n+4>0$

و بالتالي $u_{n+1}-u_n<0$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

ج المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

3) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=\frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0+1}=u_n$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$

أي $u_{n+1}=1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$.

لدينا $u_{n+1}=f\left(u_n\right)=\dfrac{u_n+2}{-u_n+4}=-1+\dfrac{6}{-u_n+4}=-1+\dfrac{6}{4-u_n}=\dfrac{3\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+4}{3\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+2}=1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$

و منه $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1}$.

بـ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1}\right)=1$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n=+\infty$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) f الدالة العددية المعرفة على $[-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

تعيين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

$A\in(C_f)$ معناه : $f(-1)=1$ أي : $(-a+b)e+1=1$ و منه : $a=b$.

معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$ معناه : $f'(-1)=-e$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $[-2;+\infty[$ و : $f'(x)=ae^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(ax+b)=(-ax-b+a)e^{-x}$.

و منه $f'(-1)=(2a-b)e$. و مما سبق $f'(-1)=-e$.

بالمطابقة لدينا $2a-b=-1$ و $a=b$ و منه نجد : $a=b=-1$.

II) الدالة g معرفة على المجال $[-2;+\infty[$ بـ : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-1)e^{-x}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}+1\right)=1$ ، لأن $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

2) دراسة تغيّرات الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$ ، و $g'(x)=-e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(-x-1)=xe^{-x}$.

- إتجاه تغيّر الدالة g :

إشارة $g'(x)$ من إشارة x ، و منه الدالة g متناقصة على المجال $[-2;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	e^2+1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

3) تبيان أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I مع تعيين إحداثييها .

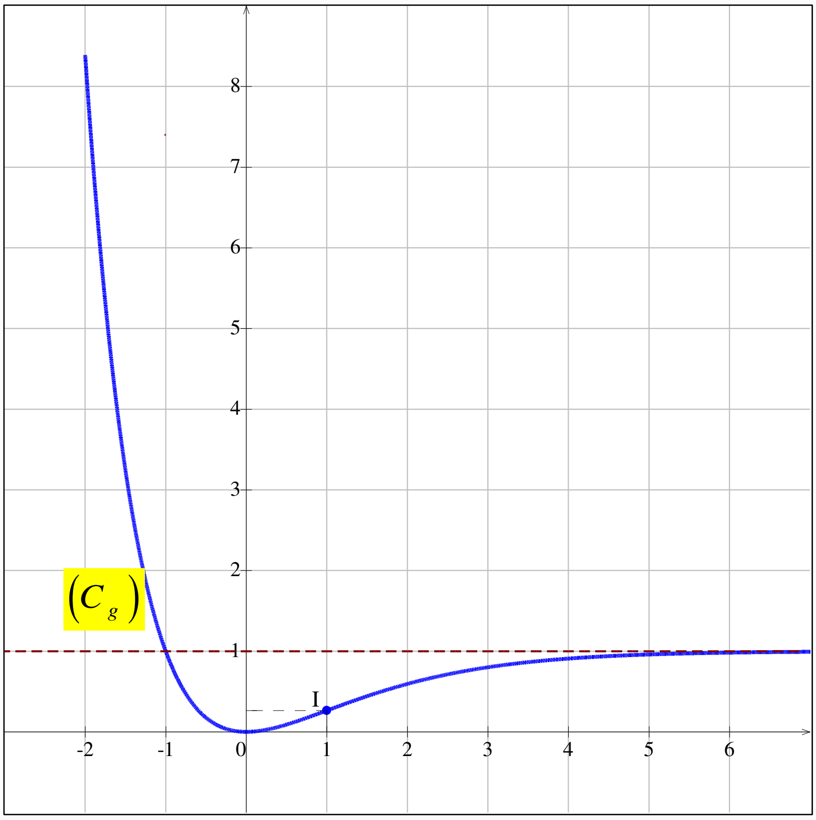
الدالة g' قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$ ، و $g''(x)=(1-x)e^{-x}$.

إشارة $g''(x)$ من إشارة $1-x$ و بالتالي $g''(x)$ ينعدم عند 1 مغيرًا إشارته ، و منه $I\left(1;1-\frac{2}{e}\right)$ هي نقطة إنعطاف لـ (C_g)

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

لدينا : $(T): y=g'(1)(x-1)+g(1)$ و منه $(T): y=\frac{1}{e}x+1-\frac{3}{e}$.

5) الرسم :



6) H الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

- تعيين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$:

الدالة H قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$ ، و $H'(x)=\alpha e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(\alpha x+\beta)=(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}$.

H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$ معناه : $(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$ و منه نجد : $\alpha=1$ و $\beta=2$.

لدينا : $g(x)=g(x)+1-1=H'(x)+1$ و منه الدالة الأصلية للدالة g من الشكل : $G(x)=H(x)+x+c$

الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند 0 هي : $G(x)=(x+2)e^{-x}+x+2$.

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g\left(x^2\right)$

الدالة k قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ،

و $k'(x)=2xg'\left(x^2\right)=2x\left(x^2e^{-x^2}\right)=2x^3e^{-x^2}$.

إتجاه تغير الدالة k :

إشارة $k'(x)$ من إشارة x ، و منه الدالة k متناقصة على المجال $[-2;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة k :

x	-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$1-5e^{-4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

تعيين الجواب الصحيح مع التعليل :

لدينا : $A(1;3;-1)$ ، $B(4;1;0)$ ، $C(-2;0;-2)$ ، $D(3;2;1)$ و $(P): x-3z-4=0$.

1) المستوي (P) هو : ج2) (ABC)

التبرير :

يكفي إثبات أن النقط ليست في إستقامية و أن إحداثياتها تحقق معادلة (P) .

لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;-2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;-3;-1)$ و $\frac{-2}{-3} \neq \frac{-3}{3}$ و بالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B و C ليست في إستقامية .

$A \in (P)$ لأن $x_A - 3z_A - 4 = 1-3\times(-1)-4=0$

$B \in (P)$ لأن $x_B - 3z_B - 4 = 4-3\times 0-4=0$

$C \in (P)$ لأن $x_C - 3z_C - 4 = -2-3\times(-2)-4=0$

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو : ج2) $\overrightarrow{n_2}(-2;0;6)$

التبرير :

لدينا : $\vec{n}(1;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\overrightarrow{n_2}=-2\vec{n}$ و منه $\overrightarrow{n_2}$ شعاع ناظمي للمستوي (P).

(لاحظ أن : كلا من $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_3}$ ليسا مرتبطين خطيا مع $\vec{n}$)

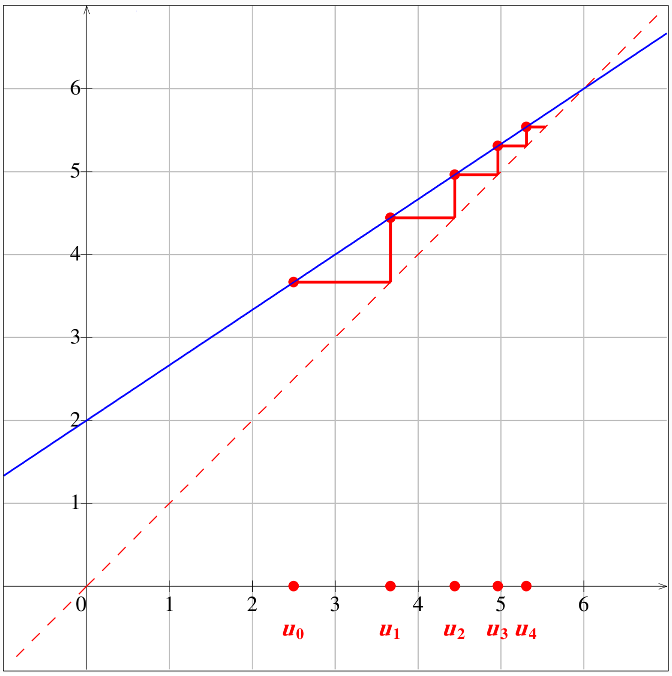
3) المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي: ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

التبرير : $d=(D;(P))=\frac{|1\times3-0\times2-3\times1-4|}{\sqrt{1^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

حل مقترح التمرين الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=\frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$

1) أ- ب- الرسم و تمثيل الحدود :



جـ- التخمين :

نلاحظ من الرسم أن : $u_4 > u_3 > u_2 > u_1 > u_0$

الحدود تتراكم حول العدد 6.

وضع تخمين : المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو 6 .

2) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le 6$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le 6$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0 = \frac{5}{2}$ و منه $u_0 \le 6$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n \le 6$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \le 6$.

لدينا حسب الفرض $u_n \le 6$ و منه $\frac{2}{3}u_n \le \frac{2}{3} \times 6$ و منه $\frac{2}{3}u_n + 2 \le \frac{2}{3} \times 6 + 2$ أي $u_{n+1} \le 6$.

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \le 6$.

ب- التحقق أن (u_n) متزايدة :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 2 = -\frac{1}{3}(u_n - 6)$

و لدينا مما سبق أن : $u_n \le 6$ و منه $u_n - 6 \le 0$. إذن $-\frac{1}{3}(u_n - 6) \ge 0$.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \ge 0$ ، و عليه المتتالية (u_n) متزايدة .

جـ- المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى إذن هي متقاربة.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 = \frac{2}{3}u_n - 4 = \frac{2}{3}u_n - \frac{12}{3} = \frac{2}{3}u_n - \frac{2\times 6}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 6) = \frac{2}{3}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$. الحد الأول : $v_0 = u_0 - 6 = \frac{5}{2} - 6 = -\frac{7}{2}$.

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n : $u_n = v_n + 6 = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$

جـ- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6\right) = 6$. لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (لاحظ أن $0 < \frac{2}{3} < 1$)

حل مقترح التمرين الثالث

1) حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

لدينا : $\Delta = i^2 - 4\times 1 \times (-2-6i) = 7 + 24i = 7 + 2\times 4 \times 3i = 16 - 9 + 2 \times 4 \times 3i = (4+3i)^2$.

(يمكن إستخدام طريقة أخرى للبحث عن الجذرين التربيعيين لـ Δ)

و منه للمعادلة حلين مركبين هما : $z_1 = \frac{-i + 4 + 3i}{2} = 2 + i$ و $z_2 = \frac{-i - 4 - 3i}{2} = -2 - 2i$.

2) تعيين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$:

$$z_\omega=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{-2-2i+2+i}{2}=-\frac{1}{2}i$$

3) كتابة z_C على الشكل الجبري :

$$z_C=\frac{4-i}{1+i}=\frac{(4-i)(1-i)}{2}=\frac{4-i-4i-1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$$

• إثبات أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) :

يكفي أن نثبت أن : $\omega C=\frac{1}{2}AB$ أي : $|z_C-z_\omega|=\frac{1}{2}|z_B-z_A|$.

$|z_B-z_A|=|-2-2i-2-i|=|-4-3i|=5$ ، و $|z_C-z_\omega|=\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i-\left(-\frac{1}{2}i\right)\right|=\left|\frac{3}{2}-2i\right|=\frac{5}{2}=\frac{1}{2}|z_B-z_A|$

و منه $C\in(\Gamma)$.

4) أ - S التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ معناه :

• $S(M_0)=M_0$.

• من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن M_0 ، $S(M)=M'$ معناه :

$$\begin{cases}M_0M'=k\,M_0M\\ \left(\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M'}\right)=\theta\end{cases}\ \text{يكافئ}\ \begin{cases}|z'-z_0|=k\,|z-z_0|\\ \arg\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)=\theta+2k\pi\end{cases}\ \text{يكافئ}\ \begin{cases}\left|\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right|=k\\ \arg\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)=\theta+2k\pi\end{cases}$$

و منه $\frac{z'-z_0}{z-z_0}=ke^{i\theta}$ أي : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$ هي عبارة التشابه S .

ب - **تطبيق** : تعيين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرّف بـ : $z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$.

التحويل S هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة ذات اللاحقة $-\frac{1}{2}i$ أي ω و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

حل مقترح التمرين الرابع

1) أ - بقراءة بيانية :

جدول تغيّرات الدالة g :

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	-2 $\nearrow$ $+\infty$

$g(0)=-1$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)>0$.

ب - الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $[-1;+\infty[$ و $\left]0;\frac{1}{2}\right[\subset[-1;+\infty[$ و $g(0)\times g\left(\frac{1}{2}\right)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha)=0$.

جـ - إشارة $g(x)$:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) f الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$

أ- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و :

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)\times(x+1)^2-2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(3x^2+6x+3)\times(x+1)-2(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

بـ- $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$ و $f'(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=0$

التفسير : (Γ) يقبل عند النقطة $A(\alpha;f(\alpha))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل.

جـ- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}}\left[\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}\right]=+\infty$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (Γ).

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)=0$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (Γ).

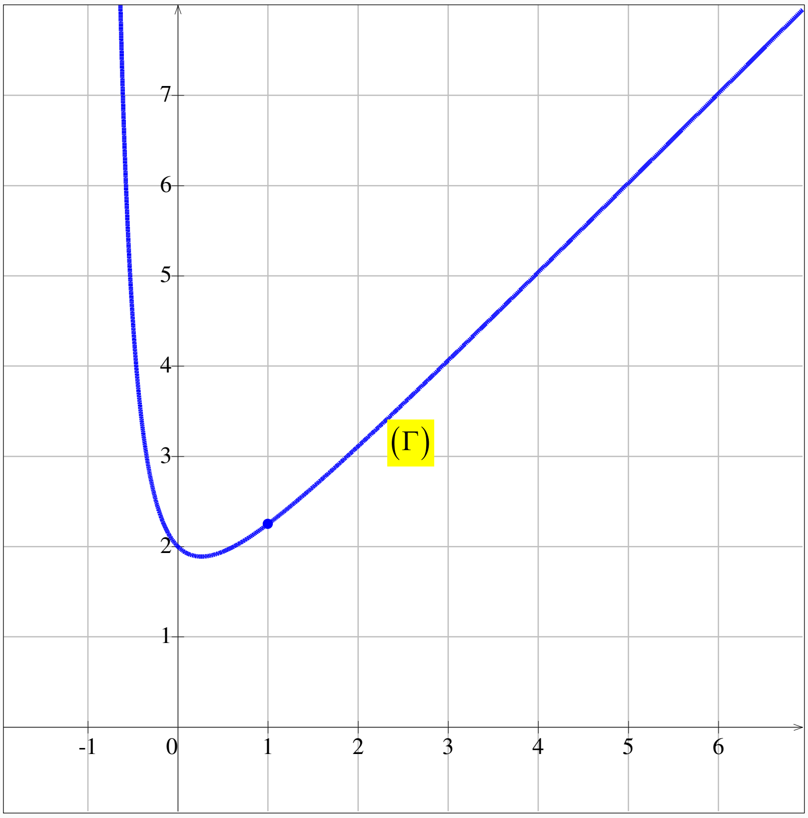
د- جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) نأخذ $\alpha\approx 0.26$ ،

أ- $f(\alpha)\approx 1{,}89$.

بـ- الرسم :



4) أ- كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}=\frac{x^3+3x^2+3x+1+1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^3+1}{(x+1)^2}=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}$$

ب- تعيين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقق $F(1)=2$.

الدالة f مستمرة على $]-1;+\infty[$ و بالتالي فدالتها الأصلية التي تحقق $F(1)=2$ هي الدالة F المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ و منه:

$$F(x)=\int_1^x\left(t+1+\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{t+1}\right]_1^x=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+1$$

تصحيح مقترح لبكالوريا 2009 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول (3,5ن)

المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_{n+2}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$ و $u_1=2$ و $u_0=1$.

المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) أحسب v_0 و v_1.

2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

3) أـ أحسب بدلالة n المجموع S_n: $S_n=v_1+v_2+...+v_{n-1}$.

بـ ـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$

جـ ـ بيّن أن (u_n) متقاربة .

التمرين الثاني (5ن)

$P(z)$ كثير حدود حيث: $P(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)$ و z عدد مركب .

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

2) نضع: $z_1=1+i$ ، $z_2=1-i\sqrt{3}$.

أـ أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

بـ ـ أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي .

جـ ـ إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) أـ n عدد طبيعي ، عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

بـ ـ أحسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$.

التمرين الثالث (4ن)

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط : $A(1;0;2)$ ، $B(0;2;1)$ ، $C(2;1;3)$.

1) (P) مستو معادلة له من الشكل: $x-z+1=0$.

أـ بيّن أن المستوي (P) هو المستوي (ABC).

بـ ـ ما طبيعة المثلث ABC ؟

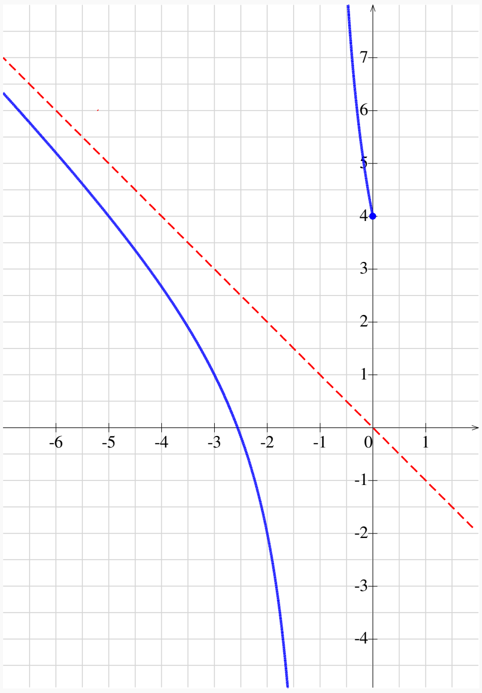
2) أـ تحقق من أن النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .

بـ ـ ما طبيعة $ABCD$ ؟

3) أـ أحسب المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC).

بـ ـ أحسب حجم $ABCD$.

التمرين الرابع(7,5ن)



I) f دالة معرفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ : $f(x)=-x+\dfrac{4}{x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (الشكل)

1) أ ـ أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I.

بـ ـ بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيَر f شكّل جدول تغيّراتها .

2) g دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

أ ـ أحسب نهاية g عند $+\infty$.

بـ ـ تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

جـ ـ أدرس تغيّرات g .

II) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$. ماذا تستنتج ؟

بـ ـ أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

2) أكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

3) أرسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) .

4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=\dfrac{1}{2}$ ، $x=-\dfrac{1}{2}$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4ن)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط :

$A(2;3;-1)$ ، $B(1;-2;4)$ ، $C(3;0;-2)$ ، $D(1;-1;-2)$

و ليكن (π) المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية : $2x-y+2z+1=0$.

المطلوب : أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية :

1) النقط A ، B و C في إستقامية.

2) (ABD) مستو معادلة ديكارتية له : $25x-6y-z-33=0$.

3) المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π).

4) المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطة $H(1;1;-1)$.

التمرين الثاني (4ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$.

2) نسمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة.

أ ـ أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

بـ- A ، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \frac{1}{2}\left(5 + i\sqrt{3}\right)$

أحسب الأطوال AB ، AC و BC ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

جـ- جد الطويلة و عمدة للعدد المركب z حيث : $z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

د- أحسب z^3 ، z^6 ثم استنتج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

التمرين الثالث (5ن)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث : $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

1) أ- أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1

بـ- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ- أحسب S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

2) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ- أحسب v_2 ، v_3 .

بـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ ، بيّن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ- أكتب w_n بدلالة n ثم إستنتج v_n بدلالة n .

التمرين الرابع (7ن)

I) h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} h(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x) = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1}$

و إستنتج اتجاه تغيّر الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها .

3) أحسب $h(0)$ و إستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} f(x)$ ثم فسّر هذه النتيجة بيانيا .

بـ- باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$.

جـ- إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

د- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيّرات الدالة f .

3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

4) أرسم (C_f) .

5) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y = x - 1$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_{n+2}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$ و $u_1=2$ و $u_0=1$.

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) حساب v_0 و v_1 :

لدينا : $v_0=u_1-u_0=2-1=1$ ، $v_1=u_2-u_1=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}$

2) برهان أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n-u_{n+1}=\frac{1}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n=\frac{1}{3}(u_{n+1}-u_n)=\frac{1}{3}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$.

3) أ- حساب المجموع S_n بدلالة n بحيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=v_0\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]=\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right]=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

ب- برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+....+(u_n-u_{n-1})=-u_0+u_n$$

و منه $u_n=S_n+u_0$ أي : $u_n=S_n+1=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$.

(يمكن إستخدام البرهان بالتراجع)

جـ- تبيان أن المتتالية (u_n) متقاربة :

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$ (لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$) و منه المتتالية (u_n) متقاربة .

حل مقترح التمرين الثاني

$P(z)$ كثير حدود حيث : $P(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)$ و z عدد مركب .

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

$P(z)=0$ تكافئ $(z-1-i)(z^2-2z+4)=0$ تكافئ $z=1+i$ أو $z^2-2z+4=0$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+4=0$:

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=-12=(i\sqrt{12})^2=(2i\sqrt{3})^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $S=\{1+i;1+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3}\}$.

2) نضع : $z_1=1+i$ ، $z_2=1-i\sqrt{3}$.

أـ كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1=1+i$ و منه : $|z_1|=\sqrt{2}$.

و بفرض θ_1 عمدة للعدد المركب z_1 ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_1)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_2=1-i\sqrt{3}$ و منه : $|z_2|=2$.

و بفرض θ_2 عمدة للعدد المركب z_2 ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_2=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_2)=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

بـ كتابة $\dfrac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي :

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{4}=\frac{1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}}{4}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

جـ إستنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$:

لدينا : $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ و بالمطابقة مع الشكل الجبري نجد :

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\end{cases}\quad \text{و منه}\quad \begin{cases}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}\\ \sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}\end{cases}\quad \text{أي :}\quad \begin{cases}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}.$$

3) أـ n عدد طبيعي ، تعيين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

لدينا : $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^n=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{7n\pi}{12}}$ ،

$\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n\in\mathbb{R}$ يكافئ $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n=k\pi$ يكافئ $\dfrac{7n\pi}{12}=k\pi$ يكافئ $n=12k$ ، مع $k\in\mathbb{N}$.

بـ حساب قيمة العدد $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{456}$:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}e^{i\frac{7\times456\pi}{12}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{456}e^{266i\pi}=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right)^{228}=\frac{1}{2^{228}}$$

حل مقترح التمرين الثالث

A، B و C النقط من الفضاء بحيث: $A(1;0;2)$، $B(0;2;1)$، $C(2;1;3)$.

1) (P) مستوي معادلة له من الشكل: $x-z+1=0$

أ ـ تبيان أن المستوي (P) هو المستوي (ABC).

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1;2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$ و $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{1}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A، B و C ليست في استقامية و تعين مستويا وحيدا و هو المستوي (ABC). و لدينا من جهة:

$A\in(P)$ لأن $x_A-z_A+1=1-2+1=0$

$B\in(P)$ لأن $x_B-z_B+1=0-1+1=0$

$C\in(P)$ لأن $x_C-z_C+1=2-3+1=0$

إذن: المستوي (P) هو المستوي (ABC).

ب ـ طبيعة المثلث ABC:

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-1\times1+2\times1+(-1)\times1=0$ و منه المثلث ABC قائم في A.

2) أ ـ التحقق من أن النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى المستوي (ABC).

لدينا: $x_D-z_D+1=2-4+1\neq0$ و منه $D\notin(ABC)$.

ب ـ طبيعة $ABCD$:

بما أن $D\notin(ABC)$ فإن $ABCD$ رباعي وجوه.

3) أ ـ حساب المسافة بين D و المستوي (ABC).

$$d\left(D;(ABC)\right)=\frac{|2-4+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ب ـ حساب حجم $ABCD$.

$V=\frac{1}{3}\times S_{ABC}\times h$ حيث: $h=d\left(D;(ABC)\right)$.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ و منه: $V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}.uv$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) f دالة معرفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$

1) أ ـ حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$

ب ـ جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4

2) g دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$

أ- $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$.

ب- لدينا: $\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x+1}\right)=0$

و منه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

جـ- دراسة تغيّرات الدالة g .

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ، و $g'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

لدينا :من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$ ، $x+3>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-1$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $[0;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

II) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$

1) أ- $\lim_{\substack{h\to0\\>}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\>}}\left(\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}\right)=\lim_{\substack{h\to0\\>}}\left(\frac{h-3}{h+1}\right)=-3$

$\lim_{\substack{h\to0\\<}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\<}}\left(\frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h}\right)=\lim_{\substack{h\to0\\<}}\left(\frac{-h-5}{h+1}\right)=-5$.

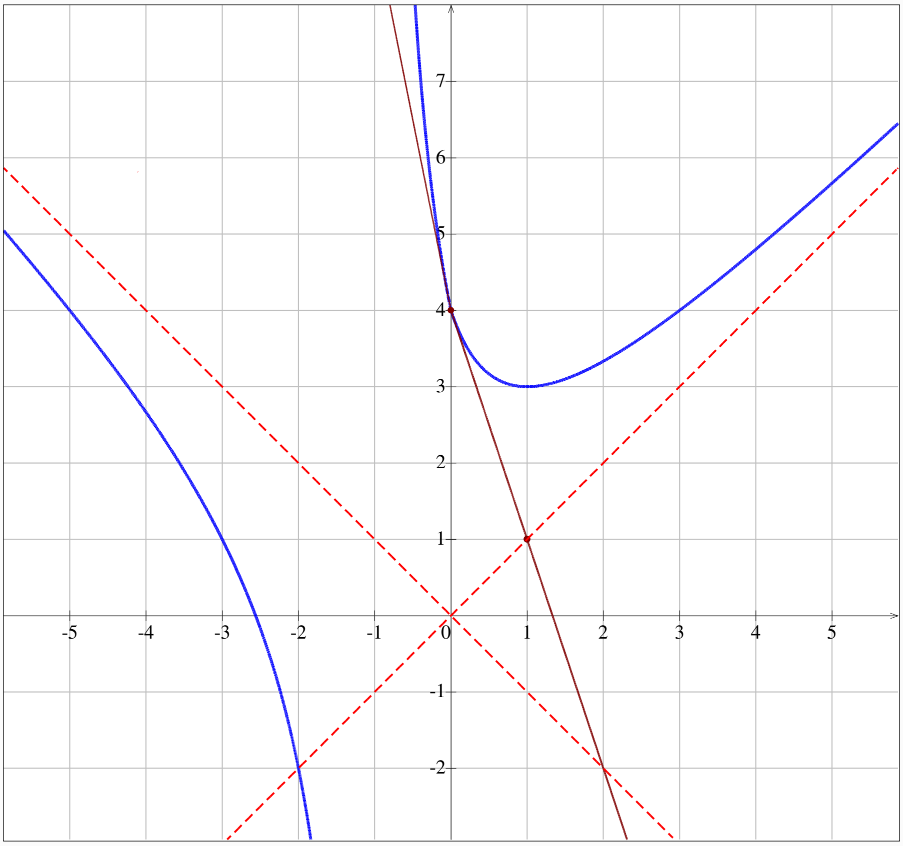
نستنتج أن الدالة k غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

ب- النقطة ذات الفاصلة 0 هي نقطة زاوية و المنحنى (C_k) يقبل نصفي مماسين.

2) كتابة معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$:

$(\Delta_1): y=-3x+4$ و $(\Delta_2): y=-5x+4$

3) الرسم:



4) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ ، $x=-\frac{1}{2}$.

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}k(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}g(x)dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+4\ln(x+1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2+4\ln(x+1)\right]_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}+4\ln 3\,uv$$

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

لدينا : $A(2;3;-1)$ ، $B(1;-2;4)$ ، $C(3;0;-2)$ ، $D(1;-1;-2)$ و $(\pi):2x-y+2z+1=0$.

الإجابة بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة :

1) النقط A ، B و C في إستقامية. ← خطأ

التبرير :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;-5;5)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-3;-1)$ و $\frac{-3}{-5}\neq\frac{1}{-1}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا .

2) (ABD) مستو معادلة ديكارتية له : $25x-6y-z-33=0$. ← صحيح

التبرير :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;-5;5)$ و $\overrightarrow{AD}(-1;-4;-1)$ و $\frac{-4}{-5}\neq\frac{-1}{-1}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ ليسا مرتبطين خطيا ، و

$A\in(ABD)$ لأن : $25\times2-6\times3+1-33=0$.

لأن $B\in(ABD)$: $25\times1-6\times(-2)-4-33=0$

لأن $D\in(ABD)$: $25\times1-6\times(-1)+2-33=0$

3) المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π) . ⟵ خطأ

التبرير :

لدينا : $\vec{n}(2;-1;2)$ شعاع ناظمي لـ (π) و $\overrightarrow{CD}(-2;-1;0)$ و $\frac{-1}{-1}\neq\frac{2}{-2}$ وبالتالي $\vec{n}$ و $\overrightarrow{CD}$ ليسا مرتبطين خطيا .

إذن المستقيم (CD) لا يعامد المستوي (π) .

4) المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطة $H\ (1;1;-1)$. ⟵ خطأ

التبرير :

لدينا : $\vec{n}(2;-1;2)$ شعاع ناظمي لـ (π) و $\overrightarrow{BH}(0;3;-5)$ و $\frac{3}{-1}\neq\frac{0}{2}$ وبالتالي $\vec{n}$ و $\overrightarrow{BH}$ ليسا مرتبطين خطيا .

إذن H ليست المسقط العمودي للنقطة B على (π) .

حل مقترح التمرين الثاني

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$.

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=-12=12i^2=\left(\sqrt{12}i\right)^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$ و $z_2=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$.

2) أ- كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1=1-i\sqrt{3}$ و منه : $|z_1|=2$.

و بفرض θ_1 عمدة للعدد المركب z_1 ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_1)=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_1=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $z_2=\overline{z_1}$ و منه : $z_2=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب- A ، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\dfrac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$

حساب الأطوال :

$AB=|z_B-z_A|=\left|2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$ ، $AC=|z_C-z_A|=\left|\dfrac{3}{2}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right|=3$ و $BC=|z_C-z_B|=\left|\dfrac{3}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{3}$

طبيعة المثلث ABC:

لدينا : $AB^2=AC^2+BC^2$ و منه المثلث ABC قائم في C حسب النظرية العكسية لفيثاغورس .

جـ- إيجاد الطويلة و عمدة للعدد المركب z حيث : $z=\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

لدينا : $|z|=\left|\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=\dfrac{|z_C-z_B|}{|z_A-z_B|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

و $\frac{1}{4}\left(1+i\sqrt{3}\right)=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2i\sqrt{3}}=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=z$ ومنه $\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

د- حساب z^3 ، z^6 ثم استنتاج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

لدينا : $z=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z^3=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=\frac{1}{2^3}e^{i\frac{3\pi}{3}}=\frac{1}{8}e^{i\pi}=-\frac{1}{8}$

و $z^6=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6=\frac{1}{2^6}e^{i\frac{6\pi}{3}}=\frac{1}{8}e^{i2\pi}=\frac{1}{64}$

ولدينا : $z^{3k}=\left(z^3\right)^k=\left(-\frac{1}{8}\right)^k$ ومنه z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

حل مقترح التمرين الثالث

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث : $\begin{cases}u_1+2u_2+u_3=32\\u_1\times u_2\times u_3=216\end{cases}$

1) أ- حساب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية :

لدينا : $u_1\times u_2\times u_3=216$ و حسب خاصية الوسط الهندسي $(u_2)^2=u_1\times u_3$ ومنه نجد : $(u_2)^3=216$ أي $u_2=6$.

- حساب الأساس q :

لدينا : $u_1+2u_2+u_3=32$ و كون المتتالية (u_n) هندسية فإن $u_3=q\times u_2$ و $u_1=\frac{u_2}{q}$.

إذن : $u_1+2u_2+u_3=32$ تكافئ $\frac{6}{q}+12+6q=32$ أي : $3q^2-10q+3=0$.

لنحل المعادلة $3q^2-10q+3=0$:

لدينا : $\Delta=64$ و منه للمعادلة حلان هما : $q_1=3$ و $q_2=\frac{1}{3}$.

و بما أنها المتتالية متزايدة تماما فإن أساسها q أكبر تماما من الواحد و منه $q=3$.

- حساب الحد الأول u_1 :

لدينا $u_1=\frac{u_2}{q}$ و منه $u_1=\frac{6}{3}=2$.

ب- كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا :من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=u_1\times q^{n-1}$ و منه : $u_n=2\times 3^{n-1}$.

جـ- حساب S_n بدلالة n :

$$S_n=u_1+u_2+...+u_n=u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=2\left(\frac{1-3^n}{1-3}\right)=-\left(1-3^n\right)=3^n-1$$

- تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n=728$:

لدينا : $S_n=728$ يكافئ $3^n-1=728$ أي $3^n=729$ أي $3^n=3^6$ و منه $n=6$. (يمكن إستخدام اللوغاريتم)

2) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_1=2$ و $v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n$

أ- حساب v_2 و v_3 :

$v_2=\frac{3}{2}v_1+u_1=\frac{3}{2}\times 2+2=5$ ، $v_3=\frac{3}{2}v_2+u_2=\frac{3}{2}\times 5+6=\frac{27}{2}$

ب- من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$.

• تبيان أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$w_{n+1}=\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}-\frac{2}{3}=\frac{\frac{3}{2}v_n+u_n}{3u_n}-\frac{2}{3}=\frac{3}{2\times 3}\frac{v_n}{u_n}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{v_n}{2u_n}-\frac{1}{3}=\frac{v_n}{2u_n}-\frac{1\times 2}{3\times 2}=\frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}w_n$$

و منه المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ- كتابة w_n بدلالة n :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n=w_1\times q^{n-1}$ و منه : $w_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

• إستنتاج v_n بدلالة n :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$ و منه $\frac{v_n}{u_n}=w_n+\frac{2}{3}$ أي $v_n=\left(w_n+\frac{2}{3}\right)u_n$.

إذن : $v_n=\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\right]\times 2\times 3^{n-1}$ أي : $v_n=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+\frac{4}{3}\times 3^{n-1}$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}h(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2x+\ln(x+1)\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1}h(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left(x^2+2x+\ln(x+1)\right)=-\infty$$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=2x+2+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

إتجاه تغير الدالة h :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $x+1>0$ و $1+2(x+1)^2>0$ و منه $h'(x)>0$

و بالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة h :

x	-1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

حساب $h(0)$ و إستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x :

$$h(0)=0^2+2\times 0+\ln(0+1)=0$$

• إشارة $h(x)$:

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

1) حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)$:

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left(x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}\ln(x+1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

ب- باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، نبرهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

نضع $t=\ln u$ فيكون $u=e^t$ و منه : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^t}{t}\right)}=0$.

جـ- إستنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=0$ حسب السؤال (ب)

د- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=0$$

التفسير البياني : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

هـ- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل :

لندرس إشارة الفرق $f(x)-(x-1)$.

$f(x)-(x-1)=-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ و بالتالي إشارة $f(x)-(x-1)$ من إشارة $-\ln(x+1)$ لأن $x+1>0$.

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;-1)$	(C_f) تحت (Δ)	

2) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)-1\times\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=1-\left(\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)$$

$$=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

و منه : من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

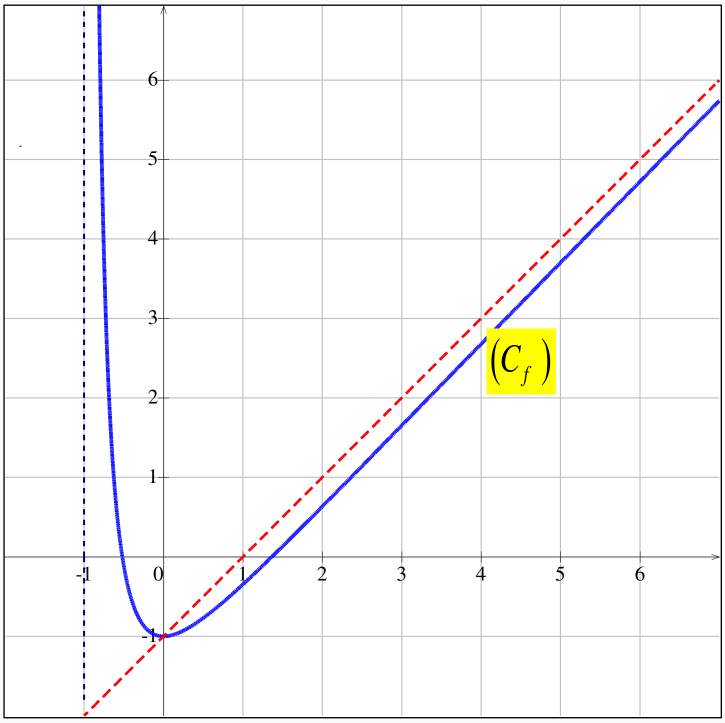
3) تبيان أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3{,}3$ و $3{,}4$.

معناه لنثبت أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا محصورا بين $3{,}3$ و $3{,}4$.

الدالة f مستمرة على المجال $]-1;+\infty[$ و بالتالي فهي مستمرة على $[3{,}3;3{,}4]$ كون $[3{,}3;3{,}4] \subset]-1;+\infty[$.

ولدينا $\begin{cases} f(3{,}3) \approx 1{,}96 \\ f(3{,}4) \approx 2{,}06 \end{cases}$ و بالتالي $f(3{,}3) < 2 < f(3{,}4)$، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا في المجال $[3{,}3;3{,}4]$.

4) الرسم :



5) حساب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y = x - 1$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

$$S = \int_0^1 [(x-1) - f(x)]dx = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

تصحيح مقترح لبكالوريا 2010 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول (5ن)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب :

$$z_A = 1+i \quad \text{و} \quad z_B = 3i$$

1) أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي.

2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z' = 2iz + 6 + 3i$

أ- عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

ب- عيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

جـ- استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-2);(C,2)\}$.

أ- عيّن z_D لاحقة النقطة D .

ب- عيّن مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B و عن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\dfrac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

ب- أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\dfrac{z_B - z}{z_D - z}$. عيّن حينئذ المجموعة (Δ).

التمرين الثاني (5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A(1;1;0)$ ، $B(2;1;1)$ و $C(-1;2;-1)$.

1) أ- بيّن أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

ب- بيّن أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $x+y-z-2=0$

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب : $(P): x+2y-3z+1=0$ ، $(Q): 2x+y-z-1=0$

و المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0;4;3)$ و $\vec{u}(-1;5;3)$ شعاع توجيه له.

أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

ب- تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).

3) عيّن تقاطع المستويات الثلاث (ABC) ، (P) و (Q).

التمرين الثالث (10ن)

I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x) = 1+\ln(2x-1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x)$.

2) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

4) أ- أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب- استنتج أنه يمكن رسم (C_f) إنطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية "ln" ثم أرسم (C) و (C_f).

II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ: $g(x)=f(x)-x$

1) أحسب $\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)$ ثم بيّن أن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) أدرس إتجاه تغير الدالة g على I ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ- أحسب $g(1)$ ثم بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α. تحقق أن $2<\alpha<3$.

ب- أرسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2};5\right[$ في المعلم السابق.

4) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d).

5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]1;\alpha[$ فإن: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

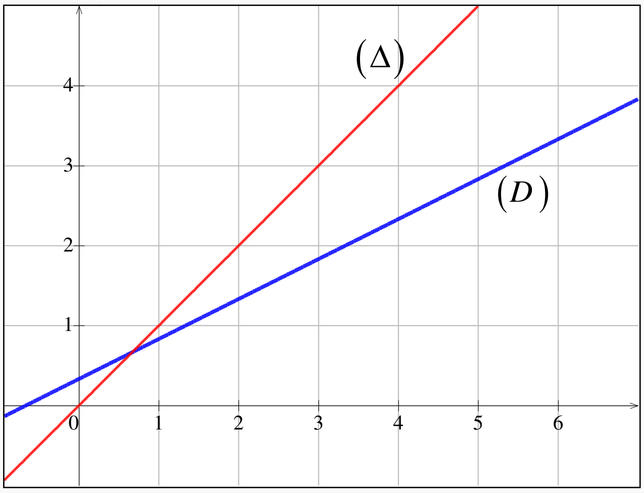
III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي: $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

1) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$.

2) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (5ن)



في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مثلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب: $y=x$ و $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}$

أ- أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية: u_0,u_1,u_2,u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب- عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D).

جـ- أعط تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) أ- باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq \frac{2}{3}$.

ب- إستنتج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n-\frac{2}{3}$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول.

ب- أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n، و استنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$، إستنتج المجموع S'_n حيث: $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$.

التمرين الثاني (4ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسّي.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب:

$z_A = 3+3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$.

أ- بيّن أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O.

بـ- عيّن زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى B .

جـ- بيّن أن النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D .

د - إستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث (4ن)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته: $x-2y+z+3=0$.

1) نذكر أن حامل محور الفواصل $\left(O;\vec{i}\right)$ يعرف بالجملة $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

عيّن إحداثيات A نقطة تقاطع حامل $\left(O;\vec{i}\right)$ مع المستوي (P).

2) B و C النقطتان من الفضاء حيث: $B(0;0;-3)$ و $C(-1;-4;2)$.

أ- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P).

بـ- أحسب الطول AB.

جـ- أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي (P).

3) أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة C و العمودي على المستوي (P).

بـ- تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ- أحسب مساحة المثلث ABC.

التمرين الرابع (7ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = x - \dfrac{1}{e^x - 1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

بـ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x)$ و فسر هندسيا النتيجة.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ- بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب: $y=x$ و $y=x+1$.

بـ- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1.4 < \beta < -1.3$.

بـ- هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

جـ- أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

د - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة: $(m-1)e^{-x} = m$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

1) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي:

لدينا: $z_A = 1+i$ ومنه: $|z_A| = \sqrt{2}$.

وبفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A، يكون: $\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$، ومنه $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن: $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا: $z_B = 3i$ و منه: $|z_B| = 3$.

وبفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B، يكون: $\begin{cases} \cos\theta_B = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin\theta_B = \frac{3}{3} = 1 \end{cases}$، ومنه $\arg(z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن: $z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$.

2) S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث: $z' = 2iz + 6 + 3i$

الكتابة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل: $z' = \alpha z + \beta$ بحيث: $\alpha = 2i$ و $\beta = 6 + 3i$.

أ- تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S:

نسبة التشابه المباشر S هي: $k = |\alpha| = 2$.

زاوية للتشابه المباشر S هي: $\theta = \arg(\alpha) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

مركز التشابه المباشر S هو النقطة ذات اللاحقة $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

لدينا: $\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{6+3i}{1-2i} = \frac{(6+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{15i}{5} = 3i = z_B$ و منه النقطة B هي مركز التشابه المباشر S.

بـ- تعيين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S.

لدينا $z_C = 2iz_A + 6 + 3i$ و منه $z_C = 2i(1+i) + 6 + 3i$، إذن: $z_C = 4 + 5i$.

جـ- طبيعة المثلث ABC:

لدينا: النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S الذي مركزه B ونسبته 2 و هذا يعني: $\begin{cases} BC = 2BA \\ \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

و منه المثلث ABC مثلث قائم في النقطة B.

3) النقطة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-2);(C,2)\}$.

أ- تعيين z_D لاحقة النقطة D:

لدينا: $z_D = \frac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2-2+2}$ و منه $z_D = \frac{2(1+i) - 2(3i) + 2(4+5i)}{2}$ إذن: $z_D = 5 + 3i$.

بـ- تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$ مع التبرير:

لدينا: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3i - (1+i) = -1 + 2i$ و $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 4 + 5i - (5+3i) = -1 + 2i$

و منه الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

ولدينا مما سبق : ABC مثلث قائم و $BC=2BA$ و بالتالي الرباعي $ABCD$ مستطيل.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B و عن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- التحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

لدينا : $\frac{z_B-z_E}{z_D-z_E}=\frac{3i-(6+3i)}{5+3i-(6+3i)}=\frac{-6}{-1}=6$ و منه العدد $\frac{z_B-z_E}{z_D-z_E}$ حقيقي موجب تماما و بالتالي $E\in(\Delta)$.

ب- $\left(\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB}\right)=\arg\left(\frac{z_B-z}{z_D-z}\right)$.

العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ حقيقي موجب تماما يكافئ $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_D-z}\right)=0+2k\pi$ أي $\left(\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB}\right)=0+2k\pi$.

و بالتالي المجموعة (Δ) هي : $(\mathrm{BD})-[\mathrm{BD}]$ (المستقيم (BD) باستثناء القطعة $[\mathrm{BD}]$)

حل مقترح التمرين الثاني

A، B و C النقط من الفضاء بحيث : $A(1;1;0)$ ، $B(2;1;1)$ و $C(-1;2;-1)$.

1) أ- تبيان أن النقط A، B و C ليست في استقامية :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$

ولدينا : $\frac{0}{1}\neq\frac{1}{-2}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A، B و C ليست في استقامية.

ب- تبيان أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $x+y-z-2=0$

لدينا $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين ، و بالتالي يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A، B و C تحقق المعادلة المعطاة.

$A\in(ABC)$ لأن $x_A+y_A-z_A-2=1+1-0-2=0$

$B\in(ABC)$ لأن $x_B+y_B-z_B-2=2+1-1-2=0$

$C\in(ABC)$ لأن $x_C+y_C-z_C-2=-1+2-(-1)-2=0$

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب : $(P): x+2y-3z+1=0$ ، $(Q): 2x+y-z-1=0$

و المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0;4;3)$ و $\vec{u}(-1;5;3)$ شعاع توجيه له.

أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) :

(D) يشمل F و $\vec{u}(-1;5;3)$ شعاع توجيه له ، و منه تمثيل وسيطي لـ (D) من الشكل : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=-t\\y=5t+4\\z=3t+3\end{cases}$.

ب- التحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) :

لدينا : $(D)\subset(P)$ لأن : $-t+2(5t+4)-3(3t+3)+1=0$.

و $(D)\subset(Q)$ لأن : $2(-t)+(5t+4)-(3t+3)-1=0$.

و بالتالي تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).

(كطريقة ثانية يمكن حل الجملة $\begin{cases}x+2y-3z+1=0\\2x+y-z-1=0\end{cases}$ للحصول على التمثيل الوسيطي لمستقيم التقاطع و هو (D))

3) تعيين تقاطع المستويات الثلاث (ABC)، (P) و (Q) :

لدينا : المستويان (P) و (Q) متقاطعان وفق المستقيم (D) و بالتالي لدراسة تقاطع المستويات الثلاث (ABC)، (P) و (Q) يكفي دراسة تقاطع المستقيم (D) مع المستوي (ABC) .

نحل الجملة: $\begin{cases} x=-t \\ y=5t+4 \\ z=3t+3 \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$ فنجد: $t=1$ و بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي نجد $(-1;9;6)$.

و منه المستويات الثلاث (ABC)، (P) و (Q) تتقاطع في النقطة $\Omega(-1;9;6)$.

حل مقترح التمرين الثالث

I) الدالة f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=1+\ln(2x-1)$.

1) حساب النهايات:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(1+\ln(2x-1))=+\infty$ ، $\lim_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}}(1+\ln(2x-1))=-\infty$.

2) تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I:

الدالة f قابلة للإشتقاق على I، و من أجل كل x من I، $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$

لدينا: من أجل كل عدد حقيقي x من I، $2x-1>0$ أي $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

جدول تغيّرات الدالة f:

x	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

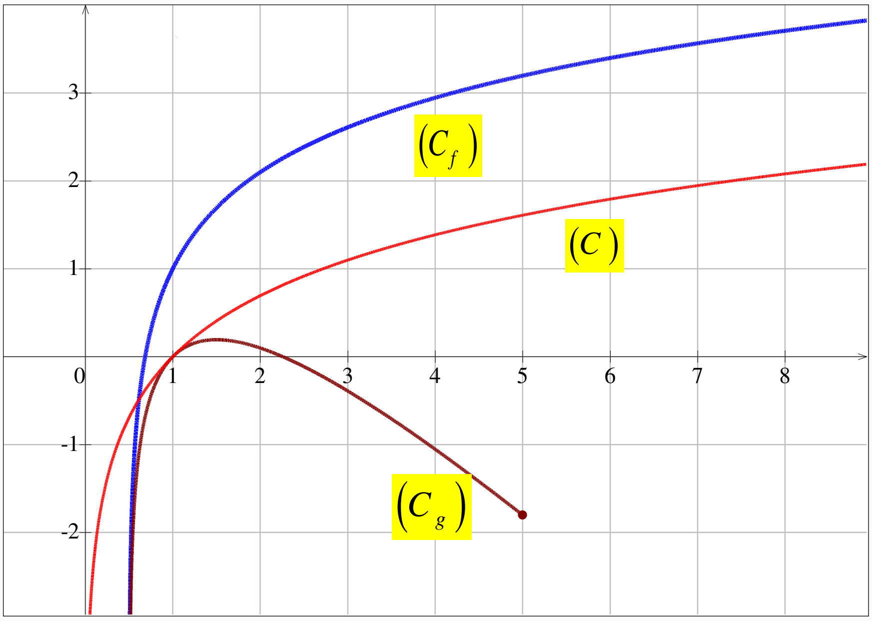
فاصلة هذه النقطة هي حل للمعادلة $f'(x)=1$ في I.

$f'(x)=1$ تكافئ $\dfrac{2}{2x-1}=1$ تكافئ $2=2x-1$ أي $x=\dfrac{3}{2}$.

4) أ- من أجل كل x من I: $f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=1+\ln 2+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$، و منه: $a=-\dfrac{1}{2}$ و $b=1+\ln 2$.

بـ- لدينا: $f(x)=h(x+a)+b$ حيث: $h(x)=\ln x$ و منه (C_f) هو صورة $(\mathscr{C})$ منحى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-a \\ b\end{pmatrix}$ أي $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} \\ 1+\ln 2\end{pmatrix}$.

الرسم :



II) g الدالة العددية المعرفة على المجال I بـ : $g(x)=f(x)-x$

1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} (f(x)-x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} (1-x+\ln(2x-1))=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\left[\dfrac{1-x}{2x-1}+\dfrac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]=-\infty$ (تذكر أن : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$)

2) دراسة إتجاه تغير الدالة g على I :

الدالة g قابلة للإشتقاق على I ، و $g'(x)=-1+\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{-2x+3}{2x-1}$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x-1>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+3$.

إشارة $g'(x)$:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}+\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

3) أ- لدينا : $g(1)=0$.

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ و $\begin{cases} g\left(\frac{3}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}\approx 0{,}19 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ ، و منه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α .

التحقق أن $2<\alpha<3$:

لدينا : $\begin{cases} g(2)\approx 0,09 \\ g(3)\approx -0,39 \end{cases}$ أي : $g(2)\times g(3)<0$ ومنه $2<\alpha<3$.

بـ-رسم المنحنى (C_g) : أنظر الشكل السابق.

4) إشارة $g(x)$:

x	$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-x=g(x)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $g(x)$.

إذن : من أجل $x\in\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]\alpha;+\infty\right[$ ، يكون (C_f) واقعا أسفل (d).

من أجل $x\in\left]1;\alpha\right[$ ، يكون (C_f) واقعا أعلى من (d) .

(C_f) يقطع (d) في النقطتين $A(1;1)$ و $B(\alpha;\alpha)$.

5) الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]1;\alpha\right[$ و منه : من أجل كل $x\in\left]1;\alpha\right[$ فإن : $f(x)\in\left]f(1);f(\alpha)\right[$.

و لدينا : $f(1)=1$ و $f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha=\alpha$.

إذن : من أجل كل $x\in\left]1;\alpha\right[$ فإن : $f(x)\in\left]1;\alpha\right[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

1) تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$.

لدينا : $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1+\ln\left[2\left(1+\frac{1}{2n}\right)-1\right]=1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

و منه : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$ يعني $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln 3^2-\ln 2^3=\ln 9-\ln 8=\ln\frac{9}{8}$ أي : $n=8$.

2) حساب، بدلالة n ، المجموع S_n بحيث : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

لدينا : من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

و منه : $S_n=u_1+u_2+...+u_n=1+\ln\left(\frac{2}{1}\right)+1+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+...+1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

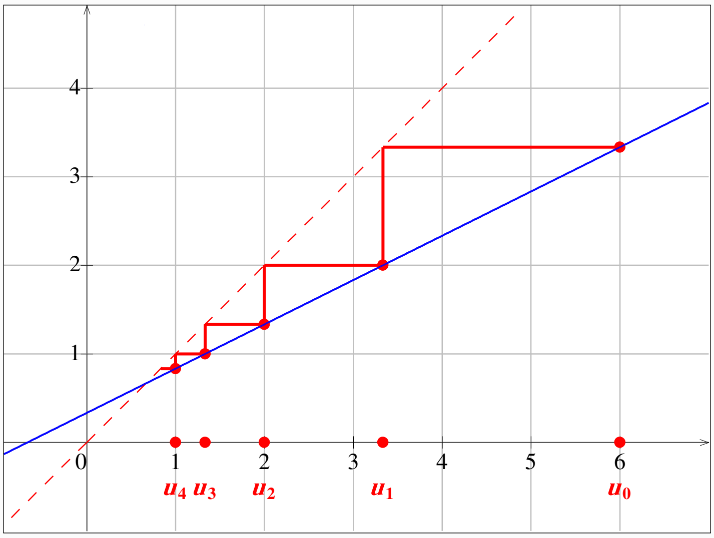
أي : $S_n=(1+1+...+1)+\ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+...+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=n+\ln\left(\frac{2\times 3\times ...\times n\times(n+1)}{1\times 2\times ...\times n}\right)=n+\ln(n+1)$

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}$.

1) أ ـ الرسم :



بـ ـ تعيين إحداثيي نقطة تقاطع (Δ) و (D) :

نحل المعادلة : $f(x)=x$.

$f(x)=x$ تكافئ $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}=x$ تكافئ $\frac{1}{2}x-x=-\frac{1}{3}$ تكافئ $-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{3}$ تكافئ $x=\frac{2}{3}$

و بالتالي المستقيمان (Δ) و (D) يتقطعان في النقطة $A\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

جـ ـ التخمين :

نلاحظ من الرسم أن: $u_4<u_3<u_2<u_1<u_0$

المتتالية (u_n) متناقصة .

2) أ ـ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\ge\frac{2}{3}$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\ge\frac{2}{3}$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=6$ و منه $u_0\ge\frac{2}{3}$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n\ge\frac{2}{3}$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}\ge\frac{2}{3}$.

لدينا حسب الفرض $u_n\ge\frac{2}{3}$ و منه $\frac{1}{2}u_n\ge\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ و منه $\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}\ge\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ أي $u_{n+1}\ge\frac{2}{3}$. و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\ge\frac{2}{3}$.

بـ ـ إتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-u_n=-\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)$

و لدينا ممّا سبق أن: $u_n \geq \frac{2}{3}$ و منه $u_n - \frac{2}{3} \geq 0$. إذن $-\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) \leq 0$.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ، و عليه المتتالية (u_n) متناقصة.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}v_n$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$. و حدها الأول: $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$.

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = v_0 \times q^n = \frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n: $u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$

جـ- المجاميع:

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{32}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = v_0 + \frac{2}{3} + v_1 + \frac{2}{3} + ... + v_n + \frac{2}{3} = S_n + \frac{2}{3}(n+1) .$$

حل مقترح التمرين الثاني

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 18 = 0$.

لدينا: $\Delta = (-6)^2 - 4\times1\times18 = -36 = 36i^2 = (6i)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما:

$z_1 = \frac{6+6i}{2} = 3+3i$ و $z_2 = \frac{6-6i}{2} = 3-3i$.

كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي:

لدينا: $z_1 = 3+3i$ و منه: $|z_1| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

و بفرض θ_1 عمدة للعدد المركب z_1 ، يكون: $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ، و منه $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، مع $k \in \mathbb{Z}$.

إذن: $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا: $z_2 = \overline{z_1}$ و منه: $z_2 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب:

$z_A = 3+3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$.

أ- تبيان أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O:

لدينا: $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 3\sqrt{2}$ أي: $OA = OB = OC = OD$ و منه النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $3\sqrt{2}$.

بـ- تعيين زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى B :

$\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=\arg\left(\frac{\overline{z_A}}{z_A}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

جـ- إثبات أن النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D .

يكفي إثبات أن كلا من $\frac{z_A-z_O}{z_C-z_O}$ و $\frac{z_B-z_O}{z_D-z_O}$ حقيقي .

لدينا : $\frac{z_A-z_O}{z_C-z_O}=\frac{z_A}{z_C}=-1$ و $\frac{z_B-z_O}{z_D-z_O}=\frac{z_B}{z_D}=-1$.

(يمكن استخدام كون $z_A+z_C=0$ و $z_B+z_D=0$ و بالتالي O منتصف كل من $[AC]$ و $[BD]$)

د- طبيعة الرباعي $ABCD$:

الرباعي $ABCD$ قطراه متناصفان و متقايسان بالتالي فهو متوازي أضلاع ، و لدينا $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{2}$ و منه $ABCD$ مربع .

حل مقترح التمرين الثالث

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته : $x-2y+z+3=0$

1) نذكر أن حامل محور الفواصل $(O;\vec{i})$ يعرف بالجملة $\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}$.

إحداثيات A نقطة تقاطع حامل $(O;\vec{i})$ مع المستوي (P) هي حل الجملة : $\begin{cases}y=0\\z=0\\x-2y+z+3=0\end{cases}$ ، أي : $A(-3;0;0)$.

2) B و C النقطتان من الفضاء حيث: $B(0;0;-3)$ و $C(-1;-4;2)$.

أ- التحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P) :

لدينا : $x_B-2y_B+z_B+3=0+0-3+3=0$ و منه $B\in(P)$.

بـ- حسب الطول AB :

$$AB=\sqrt{(0+3)^2+(0-0)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

جـ- حساب المسافة بين النقطة C و المستوي (P) :

$$d(C;(P))=\frac{|-1+8+2+3|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$$

3) أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار بالنقطة C و العمودي على المستوي (P) :

لدينا (Δ) يعامد (P) و $\vec{n}(1;-2;1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و منه شعاع $\vec{n}$ توجيه لـ (Δ) و بالتالي تمثيل

و سيطي لـ (Δ) من الشكل : $\begin{cases}x=-1+t\\y=-4-2t\\z=2+t\end{cases}$.

بـ- التحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) :

بتعويض إحداثيات النقطة A في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد : $t=-2$ ، و منه $A\in(\Delta)$.

جـ- حساب مساحة المثلث ABC :

المثلث ABC قائم في A لأن : $C\in(\Delta)$ ، $A\in(\Delta)$ ، $(\Delta)\perp(P)$ و $B\in(P)$.

$$S_{ABC}=\frac{AB.AC}{2}=\frac{3\sqrt{2}\times2\sqrt{6}}{2}=3\sqrt{12}=6\sqrt{3}\ ua$$

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$

1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$.

ب) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x)=1-\dfrac{-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=1+\dfrac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$

و منه : من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=0$ و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{1}{e^x-1}-1\right]=0$ و منه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=-\dfrac{1}{e^x-1}=\dfrac{1}{1-e^x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $1-e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	‖	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)

• دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ') :

لدينا : $f(x)-y=-\dfrac{1}{e^x-1}-1=\dfrac{e^x}{1-e^x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $1-e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	‖	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ')	‖	(C_f) تحت (Δ')

4) إثبات أن النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $-x \in \mathbb{R}^*$

و $f(-x)+f(x)=-\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^{-x}-1}=-\frac{1}{e^x-1}+\frac{e^x}{e^x-1}=1=2\times\frac{1}{2}$

و منه النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) أ- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و $]\ln 2;1[\subset]0;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1)\approx 0{,}41 \\ f(\ln 2)\approx -0{,}31 \end{cases}$

أي $f(1)\times f(\ln 2)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α، حيث $\ln 2<\alpha<1$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و $]-1{,}4;-1{,}3[\subset]-\infty;0[$ و $\begin{cases} f(-1.3)\approx 0{,}07 \\ f(-1.4)\approx -0{,}07 \end{cases}$

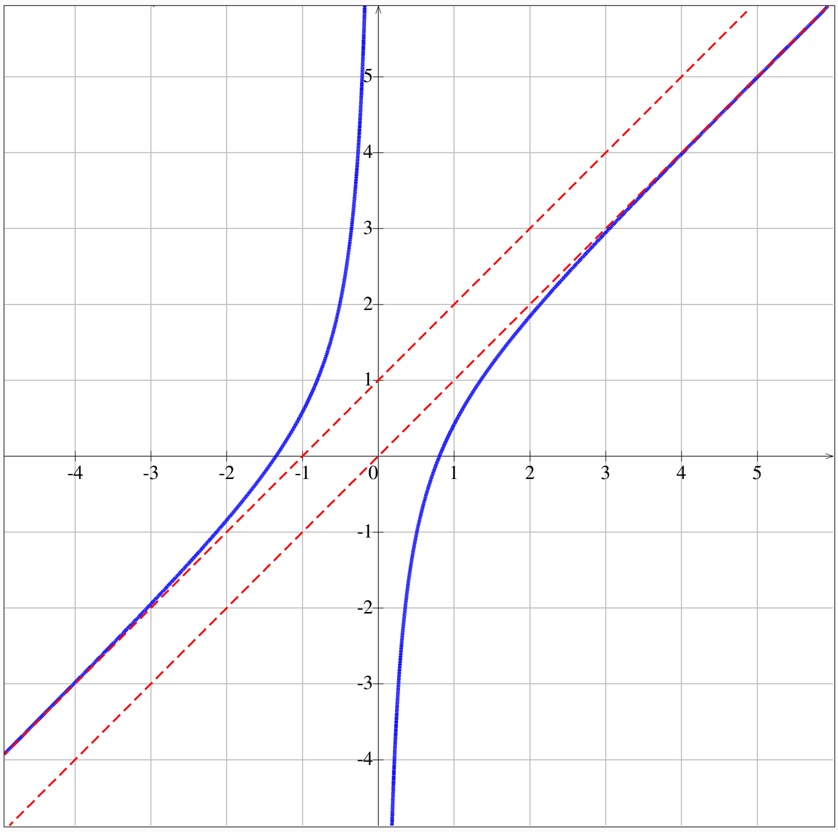
أي $f(-1{,}4)\times f(-1{,}3)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حلا وحيدا β، حيث $-1.4<\beta<-1.3$.

ب- دراسة وجود مماسات للمنحنى (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

لنحل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة : $f'(x)=1$.

لدينا : $f'(x)=1$ تكافئ $1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=1$ تكافئ $\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$ أي $e^x=0$ و هذا مستحيل و بالتالي المعادلة ليس لها حلول أي أنه لا توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ).

جـ- الرسم :



د ـ المناقشة البيانية :

لدينا : $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $m-1=me^{x}$ تكافئ $m=-\frac{1}{e^{x}-1}$ تكافئ $m+x=x-\frac{1}{e^{x}-1}$

تكافئ $f(x)=x+m$ ، و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$

إذا كان $m\in]-\infty;0[$ فإن للمعادلة حل واحد موجب .

إذا كان $m\in[0;1]$ فإن المعادلة ليس لها حلول .

إذا كان $m\in]1;+\infty[$ فإن للمعادلة حل واحد سالب .

تصحيح مقترح لبكالوريا 2011 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول (3ن)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n+1$.

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل.

1) المتتالية (v_n) : أ ـ حسابية. بـ ـ هندسية. جـ ـ لا حسابية ولا هندسية.

2) نهاية المتتالية (u_n) هي : أ ـ $+\infty$. بـ ـ $-\frac{1}{2}$. جـ ـ $-\infty$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+\ldots+e^{n\ln 3}\right]$.

أ ـ $S_n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ بـ ـ $S_n=\frac{1-3^n}{4}$ جـ ـ $S_n=\frac{1-3^{n+1}}{4}$.

التمرين الثاني (5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، المستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$.

و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له، وليكن (Q) المستوي ذو المعادلة $x+2y-7=0$.

1) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

2) أ ـ تحقق أن النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q) .

بـ ـ بيّن أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

3) لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$.

أ ـ أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي (P) ثم المسافة بين النقطة C و المستوي (Q) .

بـ ـ أثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

جـ ـ استنتج المسافة بين النقطة C و المستقيم (Δ).

التمرين الثالث (5ن)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$$z_A=-i \quad , \quad z_B=2+3i \quad و \quad z_C=-4+i$$

1) أ ـ أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

بـ ـ عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

2) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z، النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث :

$$z'=iz-1-i$$

أ ـ عيّن طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

بـ ـ ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

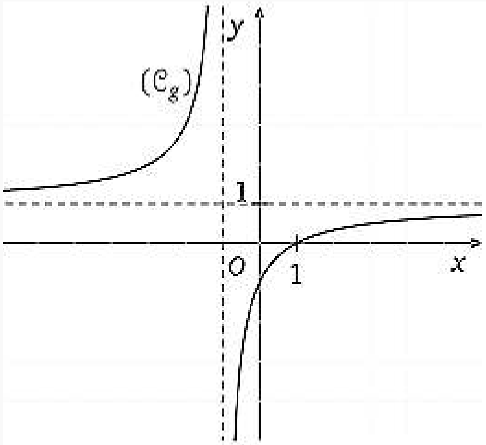
3) لتكن D ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$

أ- بيّن أن النقط A ، C و D في استقامية.

ب- عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D .

جـ- عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

التمرين الرابع (7ن)



I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل)

بقراءة بيانية :

أ- شكّل جدول تغيّرات الدالة g .

ب- حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

جـ- عيّن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 1^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

ب- أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيّرات الدالة f .

3) أ- باستعمال الجزء I) السؤال جـ ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب- α عدد حقيقي. بيّن أن الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

جـ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\alpha u_n+1$.

(v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n+\dfrac{1}{\alpha-1}$.

1) أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

ب- أكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n.

جـ- عيّن قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2) نضع: $\alpha=\dfrac{3}{2}$.

أ- أحسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

التمرين الثاني (4ن)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$$z_A = 3-2\boldsymbol{i} \quad ، \quad z_B = 3+2\boldsymbol{i} \quad و \quad z_C = 4\boldsymbol{i}$$

1) أـ علم النقط A ، B و C .

بـ ـ ما هي طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل إجابتك .

جـ ـ عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2) عيَن ثم أنشئ $\left(E\right)$ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$

3) أـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+13=0$.

نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة .

بـ ـ لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z.

ـ عيَن مجموعة النقطة M من المستوي التي تحقق : $\left|z-z_0\right|=\left|z-z_1\right|$

التمرين الثالث (5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A\left(0;1;5\right)$ ، $B\left(2;1;7\right)$ و $C\left(3;-3;6\right)$.

1) أـ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}\left(1;-4;-1\right)$ شعاع توجيه له .

بـ ـ تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم $\left(\Delta\right)$.

جـ ـ بيَن أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د ـ استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم $\left(\Delta\right)$.

2) نعتبر النقطة $M\left(2+t;1-4t;7-t\right)$ حيث t عدد حقيقي ، و لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h\left(t\right)=AM$.

أـ أكتب عبارة $h\left(t\right)$ بدلالة t .

بـ ـ بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي t ، $h'\left(t\right)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$

جـ ـ استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي من أجلها تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

ـ قارن بين القيمة الصغرى للدالة h ، و المسافة بين النقطة A و المستقيم $\left(\Delta\right)$.

التمرين الرابع (7ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=e^x-ex-1$.

$\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أـ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$.

بـ ـ أحسب $f'\left(x\right)$ ، ثمّ أدرس إشارتها.

جـ ـ شكل جدول تغيَرات الدالة f .

2) أـ بيَن أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ ذي المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $\left(-\infty\right)$.

بـ ـ أكتب معادلة للمستقيم $\left(T\right)$ مماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

جـ ـ بيَن أن المعادلة $f\left(x\right)=0$ ، تقبل في المجال $\left]1,75;1,76\right[$ حلا وحيدا α.

د ـ أرسم المستقيمين $\left(\Delta\right)$ و $\left(T\right)$ ثم المنحنى $\left(C_f\right)$ على المجال $\left]-\infty;2\right]$.

3) أـ أحسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ؛ $x=\alpha$.

بــ أثبت أن : $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات)

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n+1$.

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\frac{1}{2}$.

إختيار الإجابة مع التبرير :

1) المتتالية (v_n) : $\longleftarrow$ بـ هندسية.

التبرير :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{2}=3u_n+1+\frac{1}{2}=3u_n+\frac{3}{2}=3\left(u_n+\frac{1}{2}\right)=3v_n$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=3$ و حدها الأول $v_0=u_0+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

2) نهاية المتتالية (u_n) هي : $\longleftarrow$ جـ $-\infty$.

التبرير :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=v_n-\frac{1}{2}$ ومنه $u_n=-\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ لأن :

$\lim\limits_{n\to+\infty}3^n=+\infty$

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+...+e^{n\ln 3}\right]=\frac{1-3^{n+1}}{4}$.

التبرير :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+...+e^{n\ln 3}\right]=-\frac{1}{2}\left[3^0+3^1+3^2+...+3^n\right]=-\frac{1}{2}\left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right)=\frac{1-3^{n+1}}{4}$$

حل مقترح التمرين الثاني

1) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) :

لدينا: $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و منه معادلة لـ (P) من الشكل $-2x+y+5z+d=0$.

و $A\in(P)$ يعني $-2-2+5+d=0$ أي: $d=-1$ و عليه معادلة للمستوي (P) من الشكل $-2x+y+5z-1=0$.

2) أـ التحقق أن النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q) :

لدينا : $-2x_B+y_B+5z_B-1=-2\times(-1)+4+5\times(-1)-1=0$ و منه $B\in(P)$

و لدينا : $x_B+2y_B-7=-1+2\times4-7=0$ و منه $B\in(Q)$

إذن : $B\in(P)\cap(Q)$.

بـ- تبيان أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) مع تعيين تمثيل وسيطي له .

لدينا : $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n'}(1;2;0)$ شعاع ناظمي لـ (Q) .

$\vec{n}$ و $\vec{n'}$ ليسا مرتبطين خطيا و بالتالي المستويان (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

المستقيم (Δ) المعرف بـ: $\begin{cases} -2x+y+5z-1=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases}$ و منه بوضع $z=t$ نجد $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-2t+7 \\ y=t \\ z=-t+3 \end{cases}$ و هذه

الجملة هي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

3) لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$.

أ- المسافة بين C و (P) :

$$d_1=d(C,(P))=\frac{|-2x_C+y_C+5z_C-1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+5^2}}=\frac{|-2\times5-2+5\times(-1)-1|}{\sqrt{30}}=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$$

المسافة بين C و (Q) : $$d_2=d(C,(Q))=\frac{|x_C+2y_C-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|5+2\times(-2)-7|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

بـ- إثبات أن المستويين (P) و (Q) متعامدان :

لدينا : $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n'}(1;2;0)$ شعاع ناظمي لـ (Q) .

و $\vec{n}.\vec{n'}=-2\times1+1\times2+5\times0=0$ و منه $\vec{n}$ يعامد $\vec{n'}$ و بالتالي المستويان (P) و (Q) متعامدان .

جـ- استنتاج المسافة بين النقطة C و المستقيم (Δ) :

$$d(C,(\Delta))=\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2+\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

حل مقترح التمرين الثالث

$z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$

1) أ- كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-4+i-(-i)}{2+3i-(-i)}=\frac{-4+2i}{2+4i}=\frac{(-4+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=\frac{20i}{20}=i$$

بـ- طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له :

لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i$ و منه $\begin{cases} \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|i|=1 \\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

طبيعة المثلث ABC:

لدينا: $\begin{cases} \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1 \\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ معناه $\begin{cases} \frac{AC}{AB}=1 \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} AB=AC \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

و منه المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في A .

2) T التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z، النقطة M' ذات الاحقة z' بحيث: $z'=iz-1-i$

أـ تعيين طبيعة التحويل T مع تحديد عناصره المميزة:

الكتابة المركبة للتحويل النقطي T من الشكل: $z'=\alpha z+\beta$ بحيث: $\alpha=i$ و $\beta=-1-i$.

لدينا: $\alpha\in\mathbb{C}$ و $|\alpha|=|i|=1$ و منه التحويل T هو دوران.

زاوية للدوران T هي: $\theta=\arg(\alpha)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

مركز الدوران T هو النقطة ذات اللاحقة $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

لدينا: $\frac{\beta}{1-\alpha}=\frac{-1-i}{1-i}=\frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-i=z_A$ و منه النقطة A هي مركز الدوران T .

بـ- صورة النقطة B بالتحويل T:

نسمي النقطة B' صورة النقطة B بالتحويل T و منه $z_{B'}=iz_B-1-i=i(2+3i)-1-i=i-4$ أي: $z_{B'}=z_C$

إذن صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C .

3) لتكن D ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$

أـ تبيان أن النقط A ، C و D في استقامية:

يكفي إثبات أن $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}$ حقيقي.

لدينا: $\frac{2}{3}=\frac{2(-2+i)}{3(-2+i)}=\frac{-4+2i}{-6+3i}=\frac{-4+i-(-i)}{-6+2i-(-i)}=\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}$ و منه النقط A ، C و D في استقامية.

بـ- تعيين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D :

العبارة المركبة للتحاكي h من الشكل: $z_D-z_A=k(z_C-z_A)$ بحيث: k هي نسبة التحاكي h .

لدينا: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\frac{3}{2}$ و منه نسبة التحاكي h هي: $k=\frac{3}{2}$.

جـ- تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

العبارة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل: $z_D-z_A=a(z_B-z_A)$

لدينا: $\frac{3}{2}i=\frac{3i(2i+1)}{2(1+2i)}=\frac{-6+3i}{2+4i}=\frac{-6+2i-(-i)}{2+3i-(-i)}=\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=a$ و منه:

نسبة التشابه المباشر S هي: $k=|a|=\frac{3}{2}$.

زاوية للتشابه المباشر S هي: $\theta=\arg(a)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

(يمكن إثبات أن: $S=h\circ T$)

حل مقترح التمرين الرابع

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$

أـ جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	‖	+
$g(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

بـ- حل المتراجحة $g(x)>0$ بيانيا: $g(x)>0$ تكافئ $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

جـ- تعيين قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$:

$0<g(x)<1$ تكافئ $x\in]1;+\infty[$.

II) الدالة f معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left[\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]=1$ ، لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0\end{cases}$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

2) أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ يكون : $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{1\times(x+1)-1\times(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

بـ ـ حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{(x+1)^2}\left(\frac{2x}{x-1}\right)=\frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 1

3) أ ـ باستعمال الجزء **I)** السؤال جـ ، تعيين إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

لدينا حسب الجزء **I)** السؤال جـ : من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ ، فإن $0<\dfrac{x-1}{x+1}<1$ و منه $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)<0$.

بـ ـ α عدد حقيقي.

تبيان أن الدالة h بحيث $h(x)=(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على $]\alpha;+\infty[$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]\alpha;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]\alpha;+\infty[$:

$$h'(x)=1\times\ln(x-\alpha)+\frac{1}{x-\alpha}\times(x-\alpha)-1=\ln(x-\alpha)$$

جـ ـ التحقق :

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$.

تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1-\frac{2}{x+1}+\ln(x-1)-\ln(x+1)$

و بالتالي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$ من الشكل :

$$F(x)=x-2\ln(x+1)+\left[(x-1)\ln(x-1)-x\right]-\left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]$$
$$=x-(x+3)\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)$$

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 .

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\alpha u_n+1$.

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\frac{1}{\alpha-1}$.

1) أ ـ تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n،

$$v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{\alpha-1}=\alpha u_n+1+\frac{1}{\alpha-1}=\alpha u_n+\frac{\alpha}{\alpha-1}=\alpha\left(u_n+\frac{1}{\alpha-1}\right)=\alpha v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\alpha$ و حدها الأول $v_0=u_0+\frac{1}{\alpha-1}=6+\frac{1}{\alpha-1}=\frac{6\alpha-5}{\alpha-1}$.

بـ ـ كتابة v_n بدلالة n و α:

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=\left(\frac{6\alpha-5}{\alpha-1}\right)\times\alpha^n$.

- كتابة u_n بدلالة n و α:

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=v_n-\frac{1}{\alpha-1}$ و منه $u_n=\left(\frac{6\alpha-5}{\alpha-1}\right)\times\alpha^n-\frac{1}{\alpha-1}$.

جـ ـ تعيين قيَم العدد الحقيقة α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

تكون المتتالية (u_n) متقاربة إذا و فقط إذا كان $\alpha\in]0;1[$ ، لأن في هذه الحالة يكون $\lim_{n\to+\infty}\alpha^n=0$

و يكون $\lim_{n\to+\infty}u_n=-\frac{1}{\alpha-1}$

2) من أجل : $\alpha=\frac{3}{2}$ يكون أساس المتتالية (v_n) هو $q=\frac{3}{2}$ و حدها الأول $v_0=8$.

ـ حساب المجموعين S_n و T_n :

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n=v_0+v_1+...+v_n=v_0\times\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=8\times\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}\right)=16\times\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right)$$

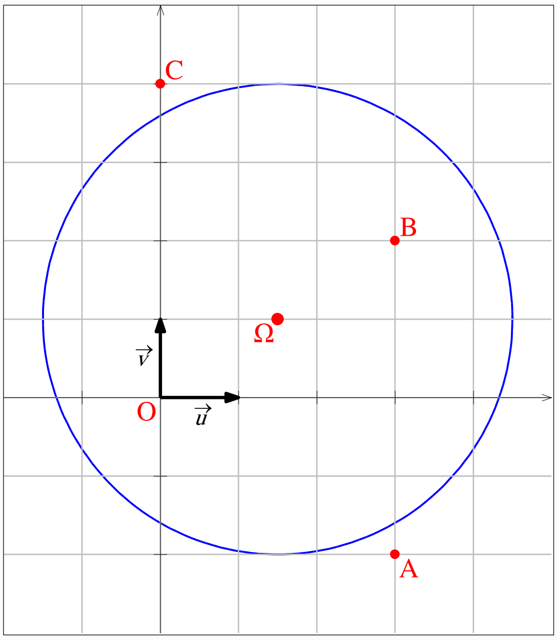
لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n - \frac{1}{\alpha - 1} = v_n - \frac{1}{\frac{3}{2} - 1} = v_n - 2$ و منه

$$T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + ... + (v_n - 2) = S_n - 2(n+1) = 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 2n - 18$$

حل مقترح التمرين الثاني

$z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ و $z_C = 4i$

1) أ- تعليم النقط A ، B و C :



ب- طبيعة الرباعي $OABC$:

لدينا : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 + 2i - (3 - 2i) = 4i$ و $z_{\overrightarrow{OC}} = z_{\overrightarrow{AB}}$ أي : $z_{\overrightarrow{OC}} = z_C - z_O = 4i$ و منه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$

و بالتالي $OABC$ متوازي أضلاع .

جـ- تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$:

النقطة Ω هي مرجح الجملة $\{(O,1);(A,1);(B,1);(C,1)\}$ و منه : $z_\Omega = \frac{z_O + z_A + z_B + z_C}{4}$ أي : $z_\Omega = \frac{3}{2} + i$.

2) تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$ Ω

$\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\| = 12$ أي $M\Omega = 3$ و بالتالي (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة Ω و نصف قطرها 3 .

الرسم : أنظر الشكل .

3) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_0 = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i = z_A$ و $z_1 = \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i = z_B$.

ب- تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $|z - z_0| = |z - z_1|$

$|z - z_0| = |z - z_1|$ معناه $AM = BM$ و بالتالي المجموعة المطلوبة هي محور القطعة $[AB]$. (محور الفواصل) .

حل مقترح التمرين الثالث

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث: $A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$.

1) أـ كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ):

لدينا: (Δ) يشمل B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له و منه تمثيل وسيطي لـ (Δ)

من الشكل: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-4t \\ z=7-t \end{cases}$

بـ التحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ):

بتعويض إحداثيات النقطة C في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $t=1$ و منه $C\in(\Delta)$.

جـ تبيان أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(2;0;2)$ و $\overrightarrow{AB}(1;-4;-1)$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=2\times1+0\times(-4)+2\times(-1)=0$ و منه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان .

دـ استنتاج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ):

لدينا B هي المسقط العمودي لـ A على المستقيم (Δ) و منه $d(A,(\Delta))=AB=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

2) نعتبر النقطة $M(2+t;1-4t;7-t)$ حيث t عدد حقيقي، و لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(t)=AM$.

أـ كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة t : $h(t)=AM=\sqrt{(2+t)^2+(-4t)^2+(2-t)^2}=\sqrt{18t^2+8}$

بـ الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي t ، $h'(t)=\dfrac{36t}{2\sqrt{18t^2+8}}=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$

جـ استنتاج قيمة العدد الحقيقي t التي من أجلها تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

جدول تغيّرات الدالة h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$\sqrt{8}$	$\nearrow$	

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن من أجل $t=0$ و $AM=\sqrt{h(0)}=\sqrt{8}$.

ـ المقارنة بين القيمة الصغرى للدالة h، و المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

$d(A,(\Delta))=h(0)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

حل مقترح التمرين الرابع

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$.

1) أـ حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-ex-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{e^x}{x}-e-\dfrac{1}{x}\right)\right]=+\infty$.

بـ حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^x-e$

$f'(x)=0$ تكافئ $e^x-e=0$ تكافئ $e^x=e$ تكافئ $x=1$.

من أجل $x\in]-\infty;1]$ ، يكون $e^x\le e$ أي $f'(x)\le0$ و بالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

من أجل $x\in[1;+\infty[$ ، يكون $e^{x}\geq e$ أي $f'(x)\geq 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

جـ ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-ex-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{x}-ex-1-(-ex-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$.

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ ـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

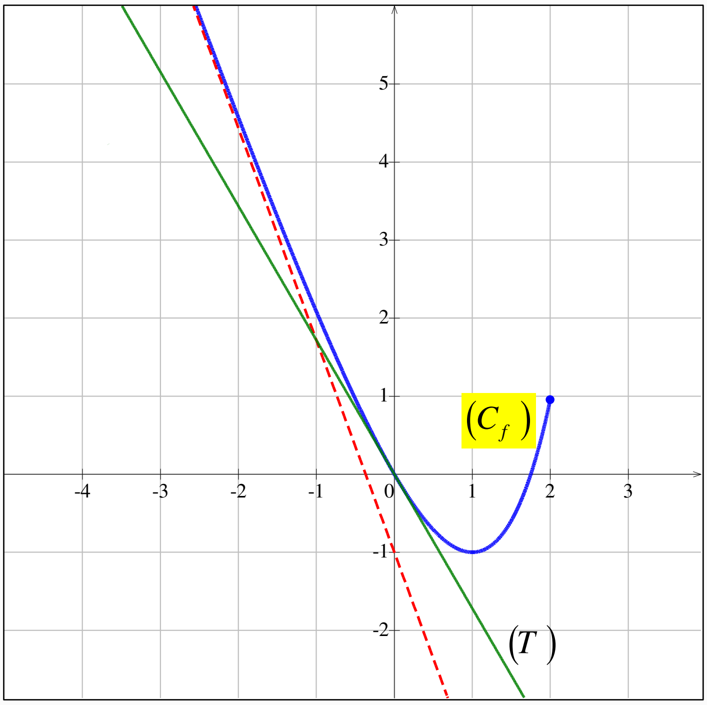
لدينا : $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و منه $(T):y=(1-e)x$.

جـ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و $]1,75;1,76[\subset[1;+\infty[$ و $\begin{cases}f(1.75)\approx-0,002\\ f(1.76)\approx 0,02\end{cases}$

أي $f(1,75)\times f(1,76)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.75<\alpha<1.76$.

د ـ الرسم :



3) أ ـ حساب، بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

$$A(\alpha)=-\int_0^{\alpha}f(x)dx=-\int_0^{\alpha}\left(e^{x}-ex-1\right)dx=-\left[e^{x}-\frac{1}{2}ex^{2}-x\right]_0^{\alpha}=1-\left(e^{\alpha}-\frac{1}{2}e\alpha^{2}-\alpha\right)$$

بـ ـ إثبات أن: $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^{2}-e\alpha+\alpha\right)ua$

لدينا : $f(\alpha)=0$ و منه $e^{\alpha}-e\alpha-1=0$ أي $e^{\alpha}=e\alpha+1$ و بالتالي :

$A(\alpha)=-e^{\alpha}+\frac{1}{2}e\alpha^{2}+\alpha+1=-(e\alpha+1)+\frac{1}{2}e\alpha^{2}+\alpha+1=\left(\frac{1}{2}e\alpha^{2}-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات)

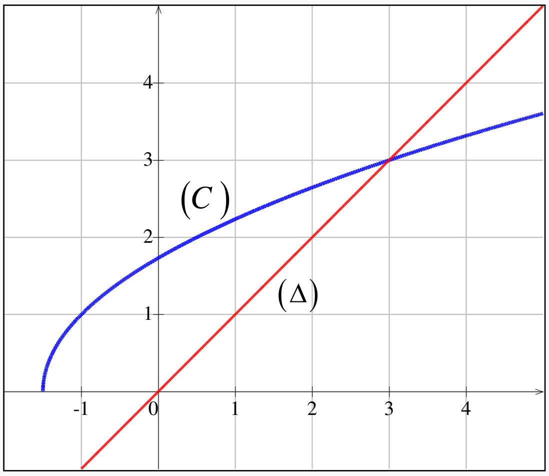
تصحيح مقترح لبكالوريا 2012 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول (5ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $h(x) = \sqrt{2x+3}$ و (C) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (أنظر الشكل المقابل).



أ ـ أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية u_0, u_1, u_2 و u_3 (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)

بـ ـ ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

3) أ ـ أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

بـ ـ إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين الثاني (4ن)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z = \dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z \neq 2-3i$)

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة .

2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث :

$z_A = 1 + i\sqrt{5}$ و $z_B = 1 - i\sqrt{5}$

- تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = \dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $z_C = -2i$ ، $z_D = 2-3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ ـ عبر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .

بـ ـ إستنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

تحقق أن E تنتمي إلى (γ) .

التمرين الثالث (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة : $14x+16y+13z-47=0$ ،

و النقط $A(1;-2;5)$ ، $B(2;2;-1)$ و $C(-1;3;1)$.

1) أ ـ تحقق أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

بـ ـ بيّن أن المستوي (ABC) هو (P) .

2) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .

3) أ- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

ب- تحقق أن النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى (Q).

جـ- أحسب المسافة بين النقطة D و المستقيم (AB).

التمرين الرابع (7ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ ، ثمّ فسر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

إستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

ب- بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها.

7) لتكن g الدالة المعرّفة على $]-\infty;0[$ كما يلي: $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4,5ن)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3<u_n<4$

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماما.

3) برر لماذا (u_n) متقاربة.

4) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n-3)$.

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم أحسب حدها الأول.

ب- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

جـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times\ldots\times(u_n-3)$.

أكتب P_n بدلالة n ، ثم بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=\frac{1}{16}$.

التمرين الثاني (4ن)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-1;0;1)$ ، $B(2;1;0)$ و $C(1;-1;0)$.

1) بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا .

2) بيّن أن : $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) D و H نقطتان من الفضاء حيث : $D(2;-1;3)$ و $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$.

أ- تحقق أن النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .

بـ- بيّن أن H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

جـ- استنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان ، ثم جد تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما .

التمرين الثالث (4,5ن)

1) $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$

أ- تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

بـ- حدّد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$.

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب

$z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ و $z_C=3-i\sqrt{3}$

أ- أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

بـ- أكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي.

جـ- إستنتج طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S.

بـ- عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

جـ- بيّن أن النقط A ، B و A' في إستقامية.

التمرين الرابع (7ن)

I) لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-xe^x$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$

بـ- تحقق أن $0.5<\alpha<0.6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي : $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن : $f'(x)=-g(x)$ ،

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) بيّن أن $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

4) أ ـ بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب ـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

5) أ ـ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

ب ـ أنشئ (Δ) و (C_f) .

6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=(ax+b)e^{x}$

أ ـ عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{x}$ على $\mathbb{R}$.

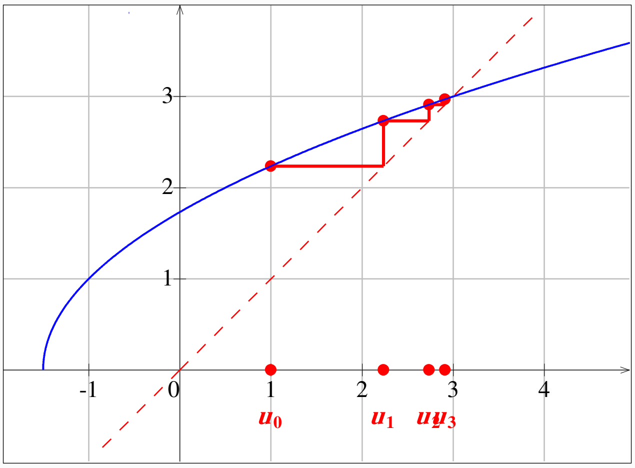
ب ـ إستنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

1) الرسم :



ب ـ التخمين :

المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو 3 .

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=1$ و منه $0<u_0<3$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0<u_n<3$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<3$.

لدينا حسب الفرض $0<u_n<3$ و منه $0<2u_n<6$ و منه $3<2u_n+3<9$ و منه $\sqrt{3}<\sqrt{2u_n+3}<\sqrt{9}$

أي $3 < \sqrt{3} < u_{n+1} < 0$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < u_n < 3$.

3) أ- دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \frac{\left(\sqrt{2u_n+3} - u_n\right)\left(\sqrt{2u_n+3} + u_n\right)}{\sqrt{2u_n+3} + u_n} = \frac{2u_n + 3 - u_n^2}{\sqrt{2u_n+3} + u_n}$$

و منه $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(3-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$

بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $3 - u_n > 0$ و $1 + u_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

ب- إستنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 3 ، إذن فهي متقاربة .

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ إذن $h(l) = l$.

$h(l) = l$ تكافئ $\sqrt{2l+3} = l$ تكافئ $\begin{cases} 2l + 3 = l^2 \\ l > 0 \end{cases}$ تكافئ $l^2 - 2l - 3 = 0$

المعادلة لها حلين هما $l_1 = 3$ و $l_2 = -1$ و l_2 مرفوض

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

حل مقترح التمرين الثاني

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z = \dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z \neq 2 - 3i$)

لنحل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

$z = \dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ تكافئ $z(z-2+3i) = 3i(z+2i)$ تكافئ $z^2 - 2z + 6 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times6 = -20 = 20i^2 = \left(\sqrt{20}i\right)^2 = \left(2\sqrt{5}i\right)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1 = \dfrac{2+2\sqrt{5}i}{2} = 1 + i\sqrt{5}$ و $z_2 = \dfrac{2-2\sqrt{5}i}{2} = 1 - i\sqrt{5}$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث :

$z_A = 1 + i\sqrt{5}$ و $z_B = 1 - i\sqrt{5}$

التحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها :

لدينا : $|z_A| = \left|1 + i\sqrt{5}\right| = \sqrt{6}$ و $|z_B| = \left|1 - i\sqrt{5}\right| = \sqrt{6}$ و منه $|z_A| = |z_B|$ أي: $OA = OB$.

و بالتالي A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{6}$.

3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = \dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $z_C = -2i$ ، $z_D = 2 - 3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- التعبير عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM :

لدينا : $z' = \dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ أي $z' = \dfrac{z_E(z-z_C)}{z-z_D}$ و منه $|z'| = \left|\dfrac{z_E(z-z_C)}{z-z_D}\right| = \dfrac{|z_E|.|z-z_C|}{|z-z_D|}$ أي : $OM' = \dfrac{3CM}{DM}$

بـ- $M \in (\Delta)$ معناه: $CM = DM$ ومنه $OM' = 3$ أي أن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها O ونصف قطرها 3 .

التحقق أن $E \in (\gamma)$:

لدينا: $|z_E| = |3i| = 3$ أي: $OE = 3$ ومنه $E \in (\gamma)$.

حل مقترح التمرين الثالث

A، B و C النقط من الفضاء بحيث: $A(1;-2;5)$ ، $B(2;2;-1)$ و $C(-1;3;1)$.

(P) المستوي ذو المعادلة: $14x + 16y + 13z - 47 = 0$.

1)أ- التحقق أن النقط A، B و C ليست في استقامية:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1;4;-6)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;5;-4)$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A، B و C ليست في استقامية .

بـ- تبيان أن المستوي (ABC) هو (P):

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A، B و C تحقق معادلة (P) .

$A \in (P)$ لأن $14x_A + 16y_A + 13z_A - 47 = 14 + 16\times(-2) + 13\times 5 - 47 = 0$

$B \in (P)$ لأن $14x_B + 16y_B + 13z_B - 47 = 14\times 2 + 16\times 2 + 13\times(-1) - 47 = 0$

$C \in (P)$ لأن $14x_C + 16y_C + 13z_C - 47 = 14\times(-1) + 16\times 3 + 13\times 1 - 47 = 0$

2)إيجاد تمثيل وسيطي للمستقيم (AB):

لدينا $\overrightarrow{AB}(1;4;-6)$ ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) من الشكل: $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 4t - 2 \\ z = -6t + 5 \end{cases}$.

3)أ- كتابة معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$:

لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ ومنه $I\left(\frac{3}{2};0;2\right)$ وبالتالي (Q) هو المستوي الذي $\overrightarrow{AB}(1;4;-6)$ شعاع ناظمي له

ويشمل I ومنه لـ (Q) معادلة من الشكل: $x + 4y - 6z + d = 0$

ولدينا $I \in (Q)$ يعني $\frac{3}{2} + 4\times 0 - 6\times 2 + d = 0$ أي $d = \frac{21}{2}$.

إذن $x + 4y - 6z + \frac{21}{2} = 0$ هي معادلة للمستوي (Q) .

(طريقة أخرى: المستوي (Q) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث: $MA = MB$ .....)

بـ- التحقق أن النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى (Q) :

لدينا $x_D + 4y_D - 6z_D + \frac{21}{2} = -1 + 4\times(-2) - 6\times\frac{1}{4} + \frac{21}{2} = 0$ ومنه $D \in (Q)$.

جـ- حساب المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB):

لدينا : $D \in (Q)$ ومنه I هي المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) .

ومنه: $d(D,(AB)) = ID = \sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2 + (0+2)^2 + \left(2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{213}}{4}$.

f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ : $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

1) أ. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left[x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}(x+5)=5\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty\end{cases}$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f).

بـ. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+5)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0\end{cases}$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$:

$$f'(x)=1+6\left(\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}\right)=1-\frac{6}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x}=1-\frac{6}{x(x-1)}=\frac{x(x-1)-6}{x(x-1)}=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $\frac{x}{x-1}>0$ و منه $x(x-1)>0$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ و منه :

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;-2]$ و متناقصة على المجال $[-2;0[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3+6\ln\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

3) أ. $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+5)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0$ و منه المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ. دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-(x+5)=6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $x>x-1$ و منه $\frac{x}{x-1}<1$ و بالتالي $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)<0$.

إذن نستنتج أن (C_f) يقع تحت (Δ) .

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

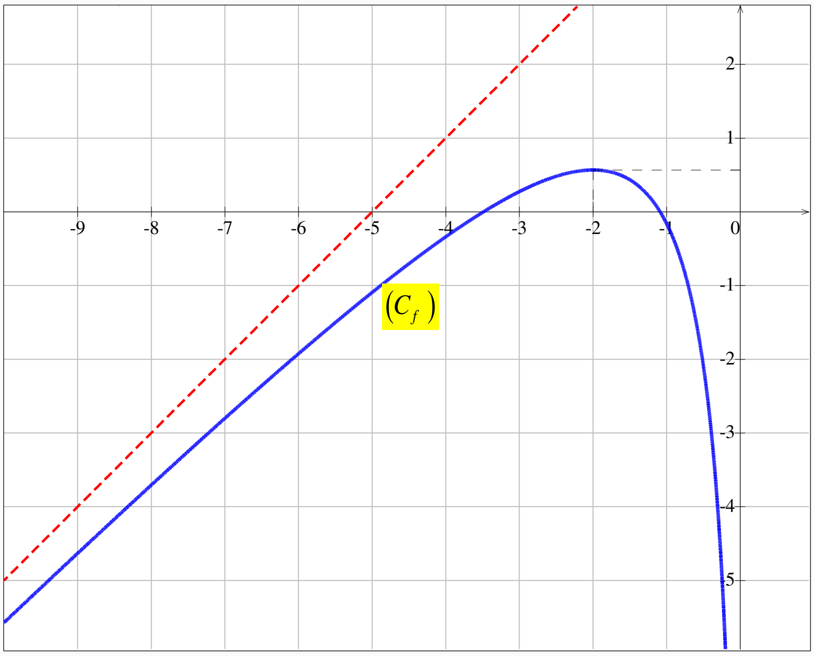
• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2[$ و $]-3,5;-3,4[\subset]-\infty;-2[$ و $\begin{cases} f(-3.4)\approx 0,05 \\ f(-3.5)\approx -0,01 \end{cases}$

أي $f(-3,4)\times f(-3,5)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و يحقق $f(\alpha)=0$.

• الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-2;0[$ و $]-1,1;-1[\subset]-2;0[$ و $\begin{cases} f(-1.1)\approx 0,02 \\ f(-1)\approx -0,16 \end{cases}$

أي $f(-1,1)\times f(-1)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي β حيث $-1.1<\beta<-1$ و يحقق $f(\beta)=0$.

5) الرسم :



6) أ- لدينا : $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

تبيان أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

يمكن التحقق أن إحداثيات كلا من النقطتين A و B تحقق المعادلة المعطاة .

$$y_A=\frac{1}{2}x_A+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=3+6\ln\frac{3}{4} \quad ، \quad y_B=\frac{1}{2}x_B+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{4}$$

(أو يمكن كتابة معادلة للمستقيم (AB) و الحصول على المعادلة المعطاة)

ب- تبيان أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها .

لدينا : معامل توجيه المستقيم (AB) هو $\frac{1}{2}$ و بالتالي نحل في المجال $]-\infty;0[$ المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$.

$f'(x)=\frac{1}{2}$ تكافئ $\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\frac{1}{2}$ تكافئ $x^2-x-12=0$.

المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حل و هو $x_0=-3$.

إذن : المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0;y_0)$ ، مع $y_0=f(-3)=2+6\ln\frac{3}{4}$.

7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.

تبيان أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل $x\in]-\infty;0[$:

$$g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6x}{x(x-1)}-\frac{6}{1-x}=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6}{x-1}+\frac{6}{x-1}=f(x)$$

و منه الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3<u_n<4$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $3<u_n<4$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\frac{13}{4}$ و منه $3<u_0<4$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $3<u_n<4$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $3<u_{n+1}<4$.

لدينا حسب الفرض $3<u_n<4$ و منه $0<u_n-3<1$ و منه $0<\sqrt{u_n-3}<1$ و منه $3<\sqrt{u_n-3}<4$

أي $3<u_{n+1}<4$ بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $3<u_n<4$.

2) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$.

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=3+\sqrt{u_n-3}-u_n=\frac{\left(3+\sqrt{u_n-3}-u_n\right)\left(\sqrt{u_n-3}+u_n-3\right)}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}=\frac{u_n-3-(3-u_n)^2}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}=\frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$$

• استنتاج أن (u_n) متزايدة تماما:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،
$$u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}=\frac{(4-u_n)(u_n-3)}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$$

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3<u_n<4$ فإن $4-u_n>0$ و $u_n-3>0$ و منه $u_{n+1}-u_n>0$.

و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3) تبرير تقارب المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 4 ، إذن فهي متقاربة .

4) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n-3)$.

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-3)=\ln\left(3+\sqrt{u_n-3}-3\right)=\ln\left(\sqrt{u_n-3}\right)=\frac{1}{2}\ln(u_n-3)=\frac{1}{2}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدّها الأول $v_0=\ln(u_0-3)=\ln\left(\frac{13}{4}-3\right)=\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-\ln 4$.

بـ- كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=\ln\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- كتابة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(u_n-3)$ و منه $u_n=3+e^{v_n}$ أي: $u_n=3+e^{\ln\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(3+e^{\ln\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)=3+1=4$$
، لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

جـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times\ldots\times(u_n-3)$

كتابة P_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(u_n-3)$ و منه $u_n-3=e^{v_n}$ و منه:

$$P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times\ldots\times(u_n-3)=e^{v_0}\times e^{v_1}\times e^{v_2}\times\ldots\times e^{v_n}=e^{v_0+v_1+\ldots+v_n}=e^{2\left(\ln\frac{1}{4}\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

- تبيان أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=\frac{1}{16}$.

$$\lim_{n\to+\infty}P_n=\lim_{n\to+\infty}e^{2\left(\ln\frac{1}{4}\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}=e^{2\left(\ln\frac{1}{4}\right)}=e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$
، لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$.

حل مقترح التمرين الثاني

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث: $A(-1;0;1)$ ، $B(2;1;0)$ و $C(1;-1;0)$.

1) تبيان أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(2;-1;-1)$

لاحظ أن $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{AC}}$ لكن $x_{\overrightarrow{AB}}\neq x_{\overrightarrow{AC}}$ و منه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا إذن النقط A ، B و C ليست في استقامية و بالتالي فهي تعيّن مستويا.

2) تبيان أن: $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة.

$A\in(ABC)$ لأن $2x_A-y_A+5z_A-3=2\times(-1)-0+5\times1-3=0$

$B\in(ABC)$ لأن $2x_B-y_B+5z_B-3=2\times2-1+5\times0-3=0$

$C\in(ABC)$ لأن $2x_C-y_C+5z_C-3=2\times1-(-1)+5\times0-3=0$

3) D و H النقطتان من الفضاء حيث: $D(2;-1;3)$ و $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$.

أ- التحقق أن النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) :

لدينا: $2x_D-y_D+5z_D-3=2\times2-(-1)+5\times3-3=17$ و منه $D\notin(ABC)$.

بـ- تبيان أن H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) :

يكفي إثبات أن : $H\in(ABC)$ و $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AC}=0$.

(أو $H\in(ABC)$ و $\overrightarrow{DH}$ ناظمي لـ (ABC))

لدينا : $2x_H-y_H+5z_H-3=2\times\frac{13}{15}-\left(-\frac{13}{30}\right)+5\times\frac{1}{6}-3=\frac{52}{30}+\frac{13}{30}+\frac{25}{30}-3=3-3=0$ و منه $H\in(ABC)$.

ولدينا : $\overrightarrow{DH}\left(-\frac{17}{15};\frac{17}{30};-\frac{17}{6}\right)$ و منه

$$\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AB}=3\times\left(-\frac{17}{15}\right)+1\times\frac{17}{30}+(-1)\times\left(-\frac{17}{6}\right)=-\frac{102}{30}+\frac{17}{30}+\frac{85}{30}=0$$

و $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AC}=2\times\left(-\frac{17}{15}\right)+(-1)\times\frac{17}{30}+(-1)\times\left(-\frac{17}{6}\right)=-\frac{68}{30}-\frac{17}{30}+\frac{85}{30}=0$.

جـ- استنتاج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان :

لدينا $A\in[(ADH)\cap(ABC)]$ و $H\in[(ADH)\cap(ABC)]$ و بالتالي (ADH) و (ABC) متقاطعان وفق المستقيم (AH) و لكون $(DH)\perp(ABC)$ فالمستويان (ADH) و (ABC) متعامدان.

- إيجاد تمثيل وسيطي للمستقيم (AH) :

لدينا $\overrightarrow{AH}\left(\frac{28}{15};-\frac{13}{30};-\frac{5}{6}\right)$ و منه تمثيل وسيطي للمستقيم (AH) من الشكل : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=\frac{28}{15}t-1\\ y=-\frac{13}{30}t\\ z=-\frac{5}{6}t+1\end{cases}$.

حل مقترح التمرين الثالث

1) $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$

أ- التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$:

$$P(6)=6^3-12\times6^2+48\times6-72=216-432+288-72=0$$

بـ- تعيين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$

$$\begin{aligned}P(z)&=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)\\&=z^3+\alpha z^2+\beta z-6z^2-6\alpha z-6\beta\\&=z^3+(\alpha-6)z^2+(\beta-6\alpha)z-6\beta\\&=z^3-12z^2+48z-72\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد $\alpha=-6$ ، $\beta=12$ و منه $P(z)=(z-6)(z^2-6z+12)$.

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$:

$P(z)=0$ تكافئ $(z-6)(z^2-6z+12)=0$ معناه : $z-6=0$ أو $z^2-6z+12=0$.

نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6z+12=0$.

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times12=-12=12i^2=\left(\sqrt{12}i\right)^2=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\frac{6-2\sqrt{3}i}{2}=3-i\sqrt{3}$ و $z_2=\frac{6+2\sqrt{3}i}{2}=3+i\sqrt{3}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $S=\{6;3-i\sqrt{3};3+i\sqrt{3}\}$.

2) أ- كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي:

لدينا: $z_A=6$ ومنه $|z_A|=6$ إذن $z_A=6e^{i0}$.

لدينا : $z_B=3+i\sqrt{3}$ و منه : $|z_B|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

و بفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_B=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_B=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_B)=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_B=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

لدينا : $z_C=\overline{z_B}$ و منه : $z_C=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

ب- كتابة العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي :

$$\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{6-\left(3+i\sqrt{3}\right)}{6-\left(3-i\sqrt{3}\right)}=\frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}=\frac{\left(3-i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}=\frac{6-6i\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

لدينا : $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و منه $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ إذن $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

جـ- إستنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يكافئ $\begin{cases}\left|\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right|=1\\ \arg\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right)=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ معناه $\begin{cases}BA=CA\\ \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BA}\right)=-\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$

و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

أ- الكتابة المركبة للتشابه S :

لدينا : $z'=az+b$ بحيث $a=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}=i\sqrt{3}$ و $b=(1-a)z_C$ ، أي : $b=\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)=-4i\sqrt{3}$

و منه $z'=i\sqrt{3}z-4i\sqrt{3}$ هي العبارة المركبة للتشابه S .

ب- تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S :

$$z_{A'}=i\sqrt{3}z_A-4i\sqrt{3}=6i\sqrt{3}-4i\sqrt{3}=2i\sqrt{3}$$

جـ- تبيان أن النقط A ، B و A' في إستقامية.

يكفي إثبات أن $\dfrac{z_A-z_{A'}}{z_A-z_B}$ حقيقي .

لدينا : $\dfrac{z_A-z_{A'}}{z_A-z_B}=\dfrac{6-2i\sqrt{3}}{6-\left(3+i\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2\left(3-i\sqrt{3}\right)}{3-i\sqrt{3}}=2$ و بالتالي النقط A ، B و A' في إستقامية.

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^{x}$.

1) حساب النهايات: $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-xe^{x}\right)=1$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-xe^{x}\right)=-\infty$.

2) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=-1\times e^{x}+(-x)e^{x}=-(x+1)e^{x}$

بما أن $e^{x}>0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $-(x+1)$ ، و منه :

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-1;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty;-1]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$g(x)$	1 $\nearrow$ $1+e^{-1}$ $\searrow$ $-\infty$

3) أ- تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$:

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(-1)=1+e^{-1} \\ \lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$.

ب - التحقق أن $0.5<\alpha<0.6$:

لدينا : $]0,5;0,6[\subset[-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(0.5)\approx 0,18 \\ g(0.6)\approx -0,09 \end{cases}$ و منه $0.5<\alpha<0.6$.

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\quad$ α $\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي : $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$.

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{x}-x-1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[xe^{x}-e^{x}-x-1\right]=+\infty$.

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن : $f'(x)=-g(x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;2]$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;2]$:

$$f'(x)=1\times e^{x}+(x-1)e^{x}-1=e^{x}+xe^{x}-e^{x}-1=xe^{x}-1=-\left(1-xe^{x}\right)=-g(x)$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$:

x	$-\infty$ $\quad$ α $\quad$ 2
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	e^2-3

3) تبيان أن: $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$.

لدينا : $f(\alpha)=(\alpha-1)e^{\alpha}-\alpha-1$ ، و لدينا من جهة $g(\alpha)=0$ يكافئ $1-\alpha e^{\alpha}=0$ يكافئ $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$.

و منه $f(\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)}{\alpha}-\alpha-1=\dfrac{(\alpha-1)-\alpha^2-\alpha}{\alpha}=\dfrac{-\alpha^2-1}{\alpha}$ أي : $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$.

إيجاد حصر للعدد $f(\alpha)$:

$0,5<\alpha<0,6$ يكافئ $\begin{cases}\dfrac{1}{0,6}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{0,5}\\ 1,25<\alpha^2+1<1,36\end{cases}$ يكافئ $\dfrac{1,25}{0,6}<\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}<\dfrac{1,36}{0,5}$

يكافئ $-\dfrac{1,25}{0,6}<-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)<-\dfrac{1,36}{0,5}$ أي : $-2,72<f(\alpha)<-2,08$.

4) أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{x}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}-e^{x}\right)=0$

و منه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=(x-1)e^{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $x-1$ على المجال $]-\infty;2]$.

x	$-\infty$		1		2
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;-2)$	(C_f) فوق (Δ)	

5) أ- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

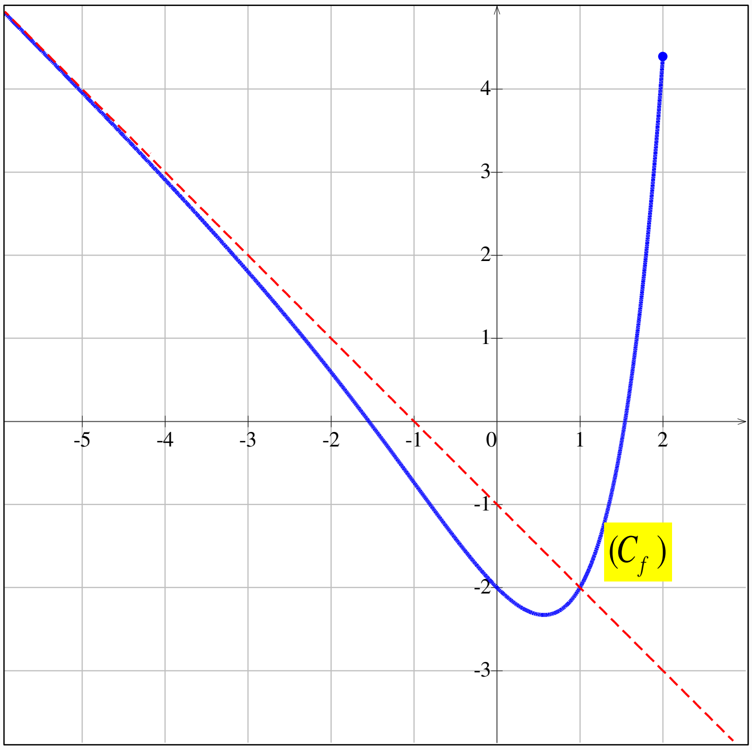
• الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و $]-1,6;-1,5[\subset]-\infty;\alpha]$ و $\begin{cases}f(-1.5)\approx-0,05\\ f(-1.6)\approx0,07\end{cases}$

أي $f(-1,6)\times f(-1,5)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_1 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و يحقق $f(x_1)=0$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;2]$ و $]1,5;1,6[\subset[\alpha;2]$ و $\begin{cases}f(1.5)\approx-0,26\\ f(1.6)\approx0,37\end{cases}$

أي $f(1,5)\times f(1,6)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_2 حيث $1.5<x_2<1.6$ و يحقق $f(x_2)=0$.

بـ ـ الرسم :



6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=(ax+b)e^x$.

أ ـ تعيين العددين الحقيقين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$

الدالة h أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ يعني : $h'(x)=xe^x$ ، و منه بالمطابقة نجد : $a=1$ و $b=-1$.

أي $h(x)=(x-1)e^x$.

بـ ـ إستنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا : $g(x)=1-xe^x$ و منه دالة أصلية للدالة g من الشكل : $G(x)=x-(x-1)e^x$.

تصحيح مقترح لبكالوريا 2013 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط :

$A\left(-1;1;3\right)$ ، $B\left(1;0;-1\right)$ ، $C\left(2;-1;1\right)$ و $D\left(2;0;-1\right)$.

و المستوي (P) ذا المعادلة : $2y+z+1=0$.

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له : $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي .

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) ، ثم تحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P) .

2) بيّن أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

3) أ- أحسب المسافة بين النقطة A و المستوي (P) .

ب- بيّن أن D نقطة من (P) ، و أن المثلث BCD قائم.

4) بيّن أن $ABCD$ رباعي وجوه ، ثم أحسب حجمه .

التمرين الثاني (4ن)

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\dfrac{5^{n+1}}{6^n}$.

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

2) أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$

1) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le 6$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3) أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $6-u_{n+1}\le\dfrac{5}{6}\left(6-u_n\right)$.

ب- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 6-u_n\le v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث (5ن)

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية :

$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ ...... (I) حيث α وسيط حقيقي .

2) من أجل $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . بيّن أن $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$.

أ- أنشئ النقط A ، B و C .

بـ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و يطلب تعيين نسبته و زاويته.

جـ- عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$ ، ثم أنشئ G.

د- أحسب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع .

التمرين الرابع (6,5ن)

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2) أحسب $f'(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α .

4) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) أدرس تغيرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ- تحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثم بين أن : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

بـ- إستنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

جـ- تحقق من أن : $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4,5ن)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية : $z^2+4z+13=0 \quad ...... \quad (E)$

1) تحقق أن العدد المركب $-2-3i$ حل للمعادلة (E) ، ثم جد الحل الآخر .

2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب.

S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ- بين أن : $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

بـ- أحسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

3) لتكن النقطة D حيث : $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{O}$.

أ- بين أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما .

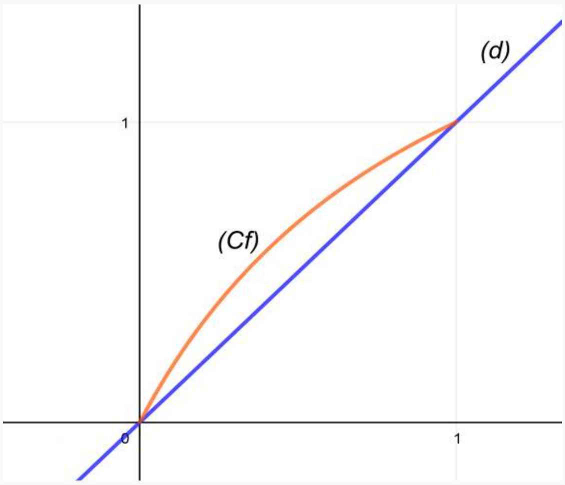
بـ- أحسب z_D لاحقة النقطة D.

جـ- بين أن $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

التمرين الثاني (4ن)

في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ،

و (d) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$



1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ ،

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة ، ثم مثل الحدود u_2, u_1, u_0 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

بـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ- أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

بـ- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

جـ- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

أ- برهن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0.

بـ- أحسب نهاية (u_n) .

التمرين الثالث (4,5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط : $A(2;1;-1)$ ، $B(1;-1;3)$ ، $C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$

و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$. و لتكن I منتصف القطعة $[AB]$.

1) أ- أحسب إحداثيات النقطة I .

بـ- بيَن أن : $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ (P) ، المستوي المحوري لـ $[AB]$.

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له .

3) أ- جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ) .

بـ- بيَن أن (Δ) و (AB) من نفس المستوي ، ثم استنتج أن المثلث IEC قائم .

4) أ- بيَن أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE) .

بـ- أحسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

التمرين الرابع (7ن)

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$.

1) أدرس تغيَرات الدالة g ، ثمَ شكَل جدول تغيَراتها.

2) إستنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أـ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

بـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أـ بيّن أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

بـ أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

جـ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم تحقق أن $0<\alpha<0{,}5$.

3) أـ بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

أـ أحسب x_0.

بـ أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f).

جـ عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

A ، B ، C و D النقط من الفضاء بحيث: $A(-1;1;3)$، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ و $D(2;0;-1)$.

و المستوي (P) ذا المعادلة: $2y+z+1=0$، و (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases}x=-1\\y=2+\beta\\z=1-2\beta\end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي.

1) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (BC):

لدينا $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ و منه تمثيل وسيطي للمستقيم (BC) من الشكل: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=t+1\\y=-t\\z=2t-1\end{cases}$.

• التحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P):

$(BC)\subset(P)$ لأن $2(-t)+(2t-1)+1=0$. (أو يمكن إثبات أن: $B\in(P)$ و $C\in(P)$)

2) تبيان أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي:

لنثبت أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا متوازيين و ليسا متقاطعين.

لندرس التوازي:

لدينا $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (BC) و $\vec{u}(0;1;-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و منه $\overrightarrow{BC}$ و $\vec{u}$ ليسا مرتبطين خطيا لأن $\dfrac{-1}{1}\neq\dfrac{0}{1}$ و بالتالي المستقيمان (Δ) و (BC) ليسا متوازيين.

لندرس التقاطع : $\begin{cases}-1=t+1\\2+\beta=-t\\1-2\beta=2t-1\end{cases}$ معناه $\begin{cases}t=-2\\\beta=0\\1\neq-5\end{cases}$ ، الجملة لا تقبل حل و بالتالي المستقيمان (Δ) و (BC) ليسا متقاطعين.

3) أ- حساب المسافة بين النقطة A و المستوي (P):

$$d(A,(P))=\frac{|2y_A+z_A+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|2+3+1|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب- تبيان أن D نقطة من (P):

لدينا $2y_D+z_D+1=2\times0-1+1=0$ و منه $D\in(P)$.

تبيان أن المثلث BCD قائم:

لدينا: $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ ، $\overrightarrow{BD}(1;0;0)$ ، $\overrightarrow{DC}(0;-1;2)$ و منه $BC=\sqrt{6}$ ، $BD=1$ ، $DC=\sqrt{5}$.

و لدينا: $DC^2+DB^2=1+5=6=BC^2$ و منه حسب عكس نظرية فيتاغورث المثلث BCD قائم في D .

(طريقة أخرى: $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DC}=1\times0+(-1)\times0+2\times0=0$ و منه المثلث BCD قائم في D)

4) تبيان أن $ABCD$ رباعي وجوه:

لدينا : $\begin{cases}(BC)\subset(P)\\D\in(P)\end{cases}$ و $A\notin(P)$ لأن $d(A,(P))\neq0$ و BCD مثلث و منه $ABCD$ رباعي وجوه.

حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}\times h$ مع $h=d(A,(P))$ و منه : $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}DB\times DC\right)\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{5}\times\frac{6}{\sqrt{5}}=1$.

حل مقترح التمرين الثاني

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{5^{n+1}}{6^n}$.

1) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية:

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=\frac{5^{n+2}}{6^{n+1}}=\frac{5\times5^{n+1}}{6\times6^n}=\frac{5}{6}\times\frac{5^{n+1}}{6^n}=\frac{5}{6}v_n$.

و منه المتتالية هندسية أساسها $q=\frac{5}{6}$ و حدها الأول $v_0=\frac{5^{0+1}}{6^0}=5$.

2) حساب $\lim\limits_{n\to\infty}v_n$:

$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[5\times\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]=0$ لأن: $0<q<1$.

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$

1) البرهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\leq u_n\leq6$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\leq u_n\leq6$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=1$ و منه $1\leq u_0\leq6$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $1\leq u_n\leq6$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1\leq u_{n+1}\leq6$.

لدينا حسب الفرض $1\leq u_n\leq6$ و منه $5\leq5u_n\leq30$ و منه $11\leq5u_n+6\leq36$ و منه $\sqrt{11}\leq\sqrt{5u_n+6}\leq\sqrt{36}$

أي $1\leq\sqrt{11}\leq u_{n+1}\leq6$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\leq u_n\leq6$.

2) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\sqrt{5u_n+6}-u_n=\frac{\left(\sqrt{5u_n+6}-u_n\right)\left(\sqrt{5u_n+6}+u_n\right)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}=\frac{5u_n+6-u_n^2}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$

و منه $u_{n+1}-u_n=\frac{(6-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$

بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $6-u_n>0$ و $1+u_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

3) أ- برهان أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$6-u_{n+1}=6-\sqrt{5u_n+6}=\frac{\left(6-\sqrt{5u_n+6}\right)\left(6+\sqrt{5u_n+6}\right)}{6+\sqrt{5u_n+6}}=\frac{30-5u_n}{6+\sqrt{5u_n+6}}=\frac{5(6-u_n)}{6+\sqrt{5u_n+6}}$.

و من جهة أخرى : $1\le u_n\le 6$ يكافئ $\frac{1}{6+\sqrt{5u_n+6}}\le\frac{1}{6}$ و منه $6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)$.

ب- تبيان أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 6-u_n\le v_n$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 6-u_n\le v_n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=1$ و $v_0=5$ منه $0\le 6-u_0\le v_0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0\le 6-u_n\le v_n$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0\le 6-u_{n+1}\le v_{n+1}$

لدينا حسب الفرض $0\le 6-u_n\le v_n$ و لدينا $6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-u_n)$ منه $0\le 6-u_{n+1}\le\frac{5}{6}v_n$

و منه $0\le 6-u_{n+1}\le v_{n+1}$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le 6-u_n\le v_n$.

(يمكن إستخدام طريقة أخرى غير البرهان بالتراجع)

- استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le 6-u_n\le v_n$ و لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}(6-u_n)=0$ أي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=6$

حل مقترح التمرين الثالث

1) حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية : (I) ...... $z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ حيث α وسيط حقيقي .

لدينا : $\Delta=(-4\cos\alpha)^2-4\times1\times4=16\cos^2\alpha-16=16(\cos^2\alpha-1)=-16\sin^2\alpha=(4\boldsymbol{i}\sin\alpha)^2$

و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\frac{4\cos\alpha+4\boldsymbol{i}\sin\alpha}{2}=2(\cos\alpha+\boldsymbol{i}\sin\alpha)=2e^{i\alpha}$ و

$z_2=\frac{4\cos\alpha-4\boldsymbol{i}\sin\alpha}{2}=2(\cos\alpha-\boldsymbol{i}\sin\alpha)=2e^{-i\alpha}$.

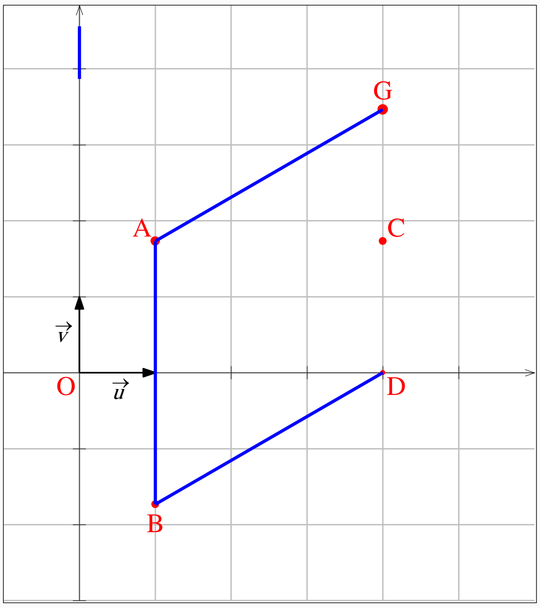
2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$ ، نجد : $z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}=1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}$ و $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}=1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}$.

تبيان أن : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

لدينا : $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

و منه $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2013}=e^{i\frac{4026\pi}{3}}=e^{i(1342\pi)}=e^{i(0+671\times 2\pi)}=e^{0}=1$.

3) أ ـ تعليم النقط A ، B و C .



بـ ـ كتابة العدد المركّب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{4+i\sqrt{3}-\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1-i\sqrt{3}-\left(1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{3}{-2i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

إستنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A مع تعيين نسبته و زاوية له .

لدينا $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ و منه $z_C-z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\left(z_B-z_A\right)$ إذن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A

و نسبته $\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و زاوية له $\arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

جـ ـ تعيين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$:

$$z_G=\frac{z_A-z_B+2z_C}{2}=\frac{1+i\sqrt{3}-\left(1-i\sqrt{3}\right)+2\left(4+i\sqrt{3}\right)}{2}=4+2i\sqrt{3}$$

د ـ تعيين z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع :

$ABDG$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GD}$ معناه $z_B-z_A=z_D-z_G$ و بالتالي $z_D=z_B-z_A+z_G=4$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=2$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)=1\end{cases}$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C).

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left[\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right] = -\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\frac{x}{x-1} \right) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(e^{\frac{1}{x-1}} \right) = 0 \end{cases}$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C).

2) حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$:

$$f'(x) = \frac{1\times(x-1) - 1\times x}{(x-1)^2} + \left(\frac{-1}{(x-1)^2} \right) e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{-1}{(x-1)^2} \times \left(1 + e^{\frac{1}{x-1}} \right)$$

بما أن $f'(x) < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty;1[$ ، فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↘	2

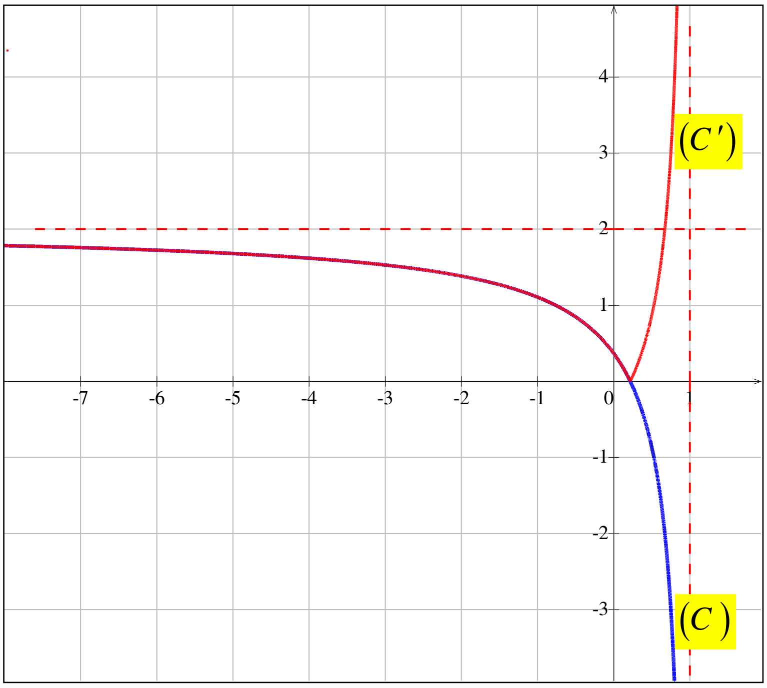
3) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α.

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty \end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α.

حسب جدول القيم : $0,21 < \alpha < 0,22$.

4) الرسم :



5) تعيين مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

حلول المعادلة $|f(x)| = m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C') مع المستقيم ذي المعادلة $y = m$.

من أجل $m \in \left]\frac{1}{e};2\right[$ المعادلة $|f(x)| = m$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x) = f(2x-1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} f(2x-1) = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(2x-1) = -\infty$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$: $g'(x) = 2f'(2x-1)$

بما أنه من أجل كل $x \in]-\infty;1[$ ، $(2x-1) \in]-\infty;1[$ فإن $f'(2x-1) < 0$ ، و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$

2) أ ـ التحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$:

لدينا : $g(x) = f(2x-1)$ ومنه $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = f(\alpha) = 0$.

تبيان أن : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.

لدينا : $g'(x) = 2f'(2x-1)$ و منه $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = 2f'(\alpha)$.

بـ ـ إستنتاج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

لدينا : $(T): y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x - \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ و منه $(T): y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$.

جـ ـ التحقق من أن : $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

لدينا : $f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} \times \left(1 + e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$ ، لكن $f(\alpha) = 0$ و هذا يعني $e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1}$ و منه $f'(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)^3}$

إذن : $(T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$ أي $(T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$.

حل مقترح التمرين الأول

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية : (E) ...... $z^2+4z+13=0$

1) التحقق أن العدد المركب $-2-3i$ حل للمعادلة (E):

$$(-2-3i)^2+4(-2-3i)+13=4-9+12i-8-12i+13=0$$

بما أن $-2-3i$ حل للمعادلة (E) فإن $\overline{-2-3i}=-2+3i$ كذلك حل للمعادلة (E) .

((E) معادلة في $\mathbb{C}$ بمعاملات حقيقية)

2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب.

S التشابه المباشر الذي مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ- تبيان أن : $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$

العبارة المركبة للتشابه S : $z'-z_A=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$ أي $z'=\frac{1}{2}iz+\frac{1}{2}iz_A+z_A$ و منه $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

ب- حساب z_C لاحقة النقطة C هي صورة B بالتشابه S :

$$z_C=\frac{1}{2}iz_B-\frac{7}{2}-2i=\frac{1}{2}i(i)-\frac{7}{2}-2i=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}-2i=-4-2i$$

3) لتكن النقطة D حيث : $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{O}$.

أ- تبيان أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقين يطلب تعيينهما :

لدينا $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{O}$ و منه $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\vec{O}$ أي $-3\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{O}$ إذن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين -3 و 1 على الترتيب.

ب- حساب z_D لاحقة النقطة D.

$$z_D=\frac{-3z_A+z_B}{-2}=\frac{-3(-2-3i)+i}{-2}=\frac{6+9i+i}{-2}=-3-5i$$

جـ- تبيان أن : $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$

$$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-3-5i-(-2-3i)}{-4-2i-(-2-3i)}=\frac{-1-2i}{-2+i}=\frac{i(i-2)}{-2+i}=i$$

طبيعة المثلث ACD :

$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ يكافئ $\begin{cases}\left|\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ معناه $\begin{cases}AD=AC\\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

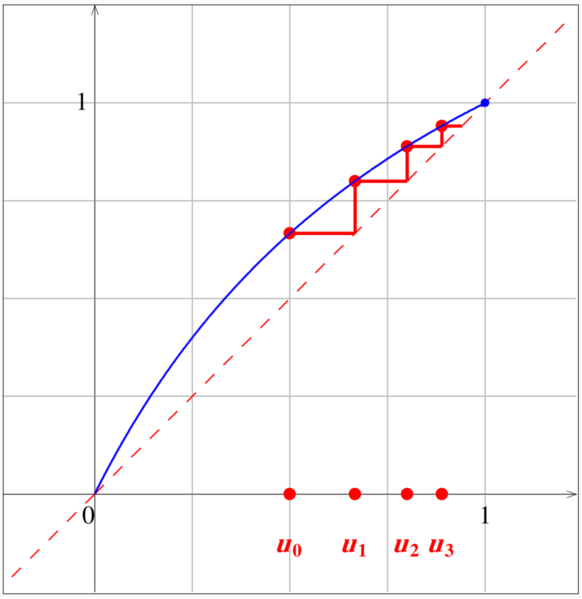
و منه المثلث ACD قائم في A و متساوي الساقين.

حل مقترح التمرين الثاني

f الدالة المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$.

1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول ، $u_0=\dfrac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ ـ الرسم :



بـ ـ التخمين:

المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو العدد 1 .

2) أ ـ إثبات أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;1]$ و $f'(x)=\dfrac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

لدينا : من أجل كل $x\in[0;1]$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

بـ ـ البرهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\dfrac{1}{2}$ و منه $0<u_0<1$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0<u_n<1$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<1$.

لدينا حسب الفرض $0<u_n<1$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما فإن $f(0)<f(u_n)<f(1)$ أي $0<u_{n+1}<1$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

جـ ـ دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n}{u_n+1}-u_n=\dfrac{2u_n-u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\dfrac{-u_n^{\,2}+u_n}{u_n+1}=\dfrac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $1-u_n>0$ و $u_n>0$ فإن : $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$.

أ ـ إثبات (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$:

لديا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}=\frac{\frac{2u_n}{u_n+1}-1}{\frac{2u_n}{u_n+1}}=\frac{\frac{2u_n-(u_n+1)}{u_n+1}}{\frac{2u_n}{u_n+1}}=\frac{u_n-1}{2u_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0}=-1$.

بـ- حساب نهاية (u_n) :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ ومنه $v_n=1-\frac{1}{u_n}$ ومنه $u_n=\frac{1}{1-v_n}$ أي $u_n=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right]=1$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

حل مقترح التمرين الثالث

A، B، C و D النقط من الفضاء بحيث: $A(2;1;-1)$، $B(1;-1;3)$، $C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$

1) أ- حساب إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

لدينا $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ ومنه $I\left(\frac{2+1}{2};\frac{1-1}{2};\frac{-1+3}{2}\right)$ أي $I\left(\frac{3}{2};0;1\right)$.

بـ- تبيان أن: $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ (P)، المستوي المحوري لـ $[AB]$:

يكفي إثبات أن: $I\in(P)$ و $\overrightarrow{AB}$ ناظمي لـ (P) .

لدينا: $2x_I+4y_I-8z_I+5=2\times\frac{3}{2}+4\times0-8\times1+5=0$ ومنه $I\in(P)$.

لدينا: $\vec{n}(2;4;-8)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) ولدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ ومنه $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\vec{n}$

إذن $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي لـ (P) .

2) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له:

تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) من الشكل: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=t-\frac{3}{2}\\ y=2t-2\\ z=-4t+1\end{cases}$.

3) أ- إيجاد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) :

نحل الجملة $\begin{cases}x=t-\frac{3}{2}\\ y=2t-2\\ z=-4t+1\\ 2x+4y-8z+5=0\end{cases}$ وهذا يكافئ $2\left(t-\frac{3}{2}\right)+4(2t-2)-8(-4t+1)+5=0$ أي $t=\frac{1}{3}$.

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $(-\frac{7}{6};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3})$ وهي إحداثيات النقطة E .

بـ- تبيان أن (Δ) و (AB) من نفس المستوي :

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ و $\vec{u}(1;2;-4)$ منه $\overrightarrow{AB}=-\vec{u}$ أي (Δ) و (AB) متوازيان و بالتالي هما من نفس المستوي .

- استنتاج أن المثلث IEC قائم :

المثلث قائم في E لأن E هي المسقط العمودي لـ I على (Δ) . ($\begin{cases}(AB)\perp(P)\\(AB)\parallel(\Delta)\end{cases}$ و بالتالي $\begin{cases}(EC)\perp(P)\\E\in(P)\end{cases}$)

(يمكن إستخدام نظرية فيتاغورث)

4) أـ تبيان أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE) .

لدينا : $\overrightarrow{ID}(2;-3;-1)$ ، $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ و $\overrightarrow{IE}\left(-\frac{8}{3};-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

و $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{ID}=-1\times 2+(-2)\times(-3)+4\times(-1)=0\\ \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{ID}=\left(-\frac{8}{3}\right)\times 2+\left(-\frac{4}{3}\right)\times(-3)+\left(-\frac{4}{3}\right)\times(-1)=0\end{cases}$ و منه $\begin{cases}(AB)\perp(ID)\\(IE)\perp(ID)\end{cases}$.

بـ- حساب حجم رباعي الوجوه $DIEC$:

$V_{DIEC}=\frac{1}{3}S\times h=\frac{1}{3}S_{IEC}\times ID=\frac{89}{4}u.v$ ، لأن : $S_{IEC}=\frac{1}{2}IE\times EC$ ، $EC=\frac{\sqrt{21}}{3}$ ، $IE=\frac{4\sqrt{6}}{3}$ و $ID=\sqrt{14}$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$.

1) دراسة تغيّرات الدالة g :

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left[x^2+2x+4-2\ln(x+1)\right]=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\ln(x+1)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{x^2+2x+4}{x+1}-2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+4}{x+1}\right)=+\infty\end{cases}$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ، و $g'(x)=2x+2-\frac{2}{x+1}=\frac{2x(x+2)}{x+1}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة x ، لأنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ فإن : $x+1>0$ و $x+2>0$.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $]-1;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

2) من جدول التغيّرات : من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)\geq 4$ و بالتالي نستنتج أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

1) أ ـ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left[x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}\right]=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left[x(x+1)-1+2\ln(x+1)\right]=-\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذا المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

بـ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$.

2) أ ـ تبيان أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ، و من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$:

$$f(x)=1-\frac{\frac{-2}{x+1}(x+1)-1\times(1-2\ln(x+1))}{(x+1)^2}=1-\frac{-3+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2+3-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

بـ ـ دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

لدينا :من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$ و بالتالي $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f:

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

جـ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty\end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-1;+\infty[$ حلا وحيدا α.

التحقق أن $0<\alpha<0,5$.

لدينا : $]0;0,5[\subset]-1;+\infty[$ و $\begin{cases}f(0)=-1\\ f(0.5)\approx 0,37\end{cases}$ أي $f(0)\times f(0,5)<0$ و منه $0<\alpha<0,5$.

3) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$ و منه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

لدينا : $f(x)-x=\dfrac{-1+2\ln(x+1)}{x+1}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-1+2\ln(x+1)$.

x	-1	$-1+\sqrt{e}$	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(-1+\sqrt{e};-1+\sqrt{e})$	(C_f) فوق (Δ)

4) المستقيم (T) ذا المعادلة $y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

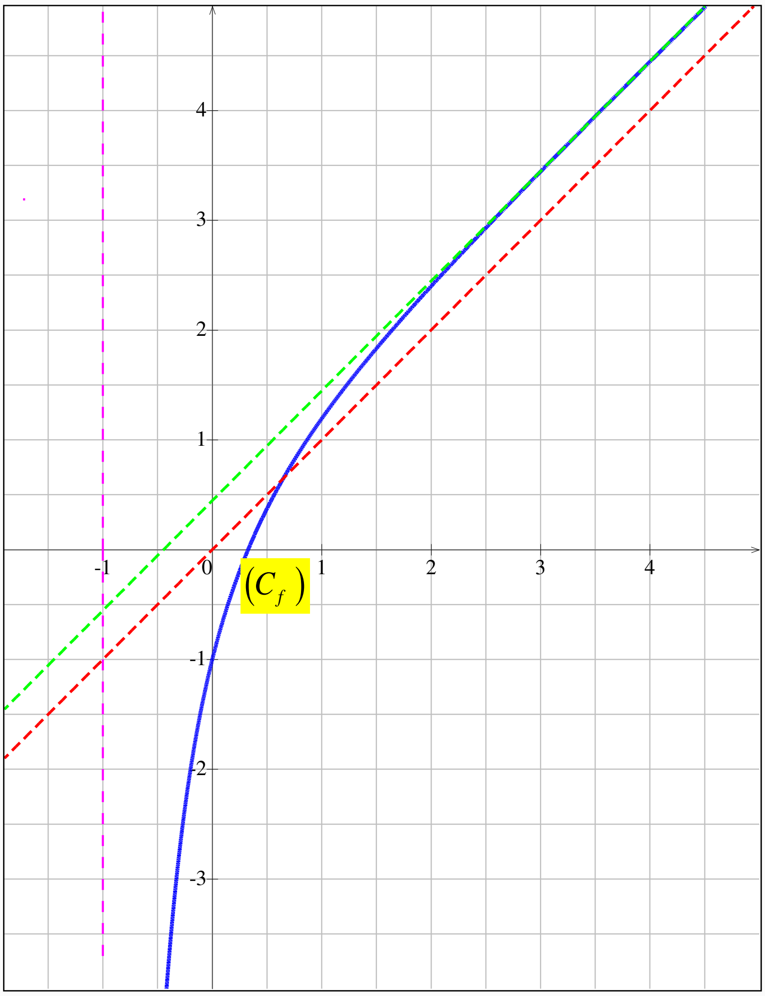
أ ـ حساب x_0:

لدينا :

$f'(x_0)=1$ تكافئ $\frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ تكافئ $g(x_0)=(x_0+1)^2$ تكافئ $2\ln(x_0+1)=3$ تكافئ

$x_0=-1+\sqrt{e^3}$.

ب ـ الرسم :



جـ ـ بيانيا ، حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذن : تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين إذا و فقط إذا كان $0<m<\frac{2}{\sqrt{e^3}}$.

تصحيح مقترح لبكالوريا 2014 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n+4$

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

2) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

3) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n=5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$.

أ- بيّن أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)$.

التمرين الثاني (5ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط: $A(2;-1;1)$، $B(-1;2;1)$، $C(1;-1;2)$ و $D(1;1;1)$.

1) أ- تحقق أن النقط A، B و C تعيّن مستويا.

ب- بيّن أن $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

جـ- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

أ- أحسب إحداثيات G.

ب- لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$.

بيّن أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

جـ- أثبت أن معادلة (Γ) هي: $6x-4y+2z+3=0$.

3) بيّن أن المستويين (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

التمرين الثالث (5ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقط A، B، C و D لواحقها على الترتيب:

$z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\frac{z_C}{2}$.

أ- أكتب z_A، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي.

ب- أحسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

جـ-بيّن أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها .

د- أحسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- أكتب العبارة المركّبة للدوران R .

بـ-عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط A ، C و C' في إستقامية.

جـ-عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

التمرين الرابع (6ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجتين هندسيا.

بـ-أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيّراتها.

2) أ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = 1$.

بـ-أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ-بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.

3) أنشئ (T) و (C_f).

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$.

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج ؟

بـ-أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).

جـ-ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن)

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ (e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) بيّن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

2) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري) .

1) عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

2) أ- أحسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n)$

بـ-عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$.

التمرين الثاني (5ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط : $A\left(1;-1;-2\right)$ ، $B\left(1;-2;-3\right)$ و $C\left(2;0;0\right)$.

1) أ- برهن أن A ، B و C ليست في استقامية.

ب- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC) .

جـ- تحقق أن $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلتيهما كما يلي: $(P): x-y-2z+5=0$ و $(Q): 3x+2y-z+10=0$.

برهن أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي: $(t\in\mathbb{R})$ ، $\begin{cases} x=t-3 \\ y=-t \\ z=t+1 \end{cases}$.

3) عين تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q) .

4) لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء. نسمي $d(M,(P))$ المسافة بين M و (P) و $d(M,(Q))$ المسافة بين M و (Q)

عين المجموعة (Γ) للنقط M بحيث : $\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$.

التمرين الثالث (5ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $\left(z-i\right)\left(z^2-2z+5\right)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (وحدة الطول $1cm$)

تعطى النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ ، $z_C=1-2i$.

أ- أنشئ النقط A ، B و C .

ب- جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

جـ- أحسب مساحة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- عين الكتابة المركبة للتشابه S .

ب- بين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$.

4) M نقطة لاحقتها z ، عين مجموعة النقط M حيث : $|z|=|iz+1+2i|$.

التمرين الرابع (7ن)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}7<\alpha<0{,}8$.

ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

و ليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)}$

بـ- استنتج أن المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

جـ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى $\left(C_f\right)$ و (Δ) .

3) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{x\cdot g(x)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$

بـ- استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.(نأخذ $f(\alpha)\approx -0{,}1$)

4) أحسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى $\left(C_f\right)$.

6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$.

و $\left(C_h\right)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$.

بـ- استنتج أن $\left(C_h\right)$ هو صورة $\left(C_f\right)$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ، ثم أنشئ $\left(C_h\right)$

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

$\left(u_n\right)$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n-\dfrac{4}{3}$

و $\left(v_n\right)$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n+4$

1) تبيان أن $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}+4=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}+\frac{12}{3}=\frac{2}{3}u_n+\frac{8}{3}=\frac{2}{3}\left(u_n+4\right)=\frac{2}{3}v_n$$

و منه المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها $q=\dfrac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0=u_0+4=5$.

2) كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=5\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

• كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=v_n-4$ و منه $u_n=5\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-4$.

3) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية $\left(u_n\right)$:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=\left[5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-4\right]-\left[5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-4\right]=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=5\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(\frac{2}{3}-1\right)=-\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n<0$ فإن المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

4) حساب المجموع S_n حيث :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (v_0 + v_1 + ... + v_n) - (4 + 4 + ... + 4)$$
$$= v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right] - 4(n+1) = 15\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] - 4(n+1)$$

5) (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n+5} - 1\right)$.

أ- تبيان أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$:

لدينا : المتتالية (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n < v_{n+1}$

و منه $v_n + 5 < v_{n+1} + 5$ و بالتالي $\frac{1}{v_n+5} < \frac{1}{v_{n+1}+5}$ أي $\frac{1}{v_n+5} - 1 < \frac{1}{v_{n+1}+5} - 1$

و منه $5\left(\frac{1}{v_n+5} - 1\right) < 5\left(\frac{1}{v_{n+1}+5} - 1\right)$

إذن : $w_n < w_{n+1}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n ، و عليه المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- حساب : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - w_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - 4 - w_n) = 0$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 5\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_n+5} - 1\right) = -4$

حل مقترح التمرين الثاني

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث : $A(2;-1;1)$ ، $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ و $D(1;1;1)$.

1) أ- التحقق أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$ و $\frac{0}{3} \neq \frac{-1}{-3}$ بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي A ، B و C ليست في استقامية و بالتالي فهي تعيّن مستويا .

ب- تبيان أن $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

لدينا : $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB} = -3\times1 + 3\times1 + 0\times1 = 0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = -1\times1 + 0\times1 + 1\times1 = 0\end{cases}$ و منه $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$ إذن الشعاع $\vec{n}(1;1;1)$ ناظمي للمستوي (ABC).

جـ- كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

لدينا: $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و منه معادلة لـ (ABC) من الشكل $x + y + z + d = 0$.

و $A \in (ABC)$ يعني $2 - 1 + 1 + d = 0$ أي : $d = -2$ و عليه معادلة للمستوي (ABC) من الشكل: $x + y + z - 2 = 0$.

2) النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

أ- حساب إحداثيات G :

لدينا : $\begin{cases}x_G = \frac{x_A + 2x_B - y_C}{1+2-1} = \frac{2+2\times(-1)-1}{2} = -\frac{1}{2}\\ y_G = \frac{y_A + 2y_B - y_C}{1+2-1} = \frac{-1+2\times2-(-1)}{2} = 2\\ z_G = \frac{z_A + 2z_B - z_C}{1+2-1} = \frac{1+2\times1-2}{2} = \frac{1}{2}\end{cases}$ و منه $G\left(-\frac{1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$.

ب- (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ تكافئ $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ تكافئ $MG = MD$

و منه المجموعة (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

جـ- إثبات أن معادلة (Γ) هي : $6x-4y+2z+3=0$.

يكفي إثبات أن : $I\in(\Gamma)$ و $\overrightarrow{n'}=k\overrightarrow{GD}$ ، بحيث $I\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right)$ منتصف القطعة $[GD]$ و $\overrightarrow{n'}(6;-4;2)$ شعاع ناظم لـ (Γ)

لدينا : $6x_I-4y_I+2z_I+3=\frac{6}{4}-4\times\frac{3}{2}+2\times\frac{3}{4}+3=0$ ومنه $I\in(\Gamma)$ ، ولدينا $\overrightarrow{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ ومنه $\overrightarrow{n'}=4\overrightarrow{GD}$.

(يمكن إستخدام طرق أخرى)

3) تبيان أن المستويين (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) مع تعيين تمثيل وسيطي له .

لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC) و $\overrightarrow{n'}(6;-4;2)$ شعاع ناظمي لـ (Γ) .

$\vec{n}$ و $\overrightarrow{n'}$ ليسا مرتبطين خطيا و بالتالي المستويان (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

المستقيم (Δ) المعرف بـ : $\begin{cases}x+y+z-2=0\\6x-4y+2z+3=0\end{cases}$ ومنه بوضع $z=t$ نجد $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=\frac{1}{2}-\frac{3}{5}t\\y=\frac{3}{2}-\frac{2}{5}t\\z=t\end{cases}$ وهذه

الجملة هي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

حل مقترح التمرين الثالث

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$

لدينا : $\Delta=\left(-6\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times36=-2\times36=\left(6i\sqrt{2}\right)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\frac{6\sqrt{2}-6i\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}=3\sqrt{2}(1-i)$ و $z_2=\frac{6\sqrt{2}+6i\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}=3\sqrt{2}(1+i)$.

2) لدينا : $z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\frac{z_C}{2}=3\sqrt{2}$.

أ- كتابة z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي .

لدينا: $z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ومنه: $|z_A|=6$.

وبفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_A=\frac{3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\\sin\theta_A=\frac{3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ، ومنه $\arg(z_A)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن: $z_A=6e^{i\frac{\pi}{4}}$.

و لدينا: $z_B=\overline{z_A}=6e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $(1+i)z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times6e^{i\frac{\pi}{4}}=6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

بـ- حساب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=\left(\frac{6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2014}=e^{i1007\pi}=e^{i(\pi+503\times2\pi)}=e^{i\pi}=-1$$

جـ- تبيان أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D :

لنثبت أن: $DO=DA=DB=DC$

لدينا: $|z_O-z_D|=|-3\sqrt{2}|=3\sqrt{2}$ و $|z_A-z_D|=|3\sqrt{2}(1+i)-3\sqrt{2}|=|3\sqrt{2}i|=3\sqrt{2}$

و $|z_B-z_D|=|3\sqrt{2}(1-i)-3\sqrt{2}|=|-3\sqrt{2}i|=3\sqrt{2}$ و $|z_C-z_D|=|6\sqrt{2}-3\sqrt{2}|=3\sqrt{2}$

و منه $DO=DA=DB=DC=3\sqrt{2}$ و بالتالي النقط O، A، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها $3\sqrt{2}$

د- حساب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$:

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{3\sqrt{2}(1-i)-6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(1+i)-6\sqrt{2}}=\frac{-3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}}=\frac{i\left(3i\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)}{-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}}=i$$

إيجاد قيس للزاوية $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$:

لدينا $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ و منه $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{2}$.

طبيعة الرباعي $OACB$:

لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=i$ يعني : $\begin{cases}\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ و منه $\begin{cases}CA=CB\\ \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ و بالتالي المثلث ACB قائم في C و متساوي الساقين و لدينا النقطة D منتصف القطعة $[AB]$ لأن $z_D=\frac{z_A+z_B}{2}$ و كذلك منتصف القطعة $[OC]$ لأن $z_D=\frac{z_C}{2}$ و منه الرباعي $OACB$ مربع.

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- العبارة المركّبة للدوران R : $z'-z_O=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_O)$ و منه $z'=iz$.

ب- تعيين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R : $z_{C'}=iz_C=6i\sqrt{2}$

- التحقق أن النقط A، C و C' في إستقامية :

يكفي إثبات أن : $\frac{z_{C'}-z_C}{z_A-z_C}\in\mathbb{R}$.

لدينا : $\frac{z_{C'}-z_C}{z_A-z_C}=\frac{6i\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{3i\sqrt{2}-3\sqrt{2}}=2$ و منه النقط A، C و C' في إستقامية.

جـ- تعيين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R : $z_{A'}=iz_A=i\,3\sqrt{2}(1+i)=3\sqrt{2}(-1+i)$

تعيين صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R :

أولا لنعيّن لاحقة النقطة B' صورة B بالدوران R : $z_{B'}=iz_B=i\,3\sqrt{2}(1-i)=3\sqrt{2}(1+i)=z_A$

إذن: صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R هي الرباعي $OAC'A'$. لأن : $R(O)=O$، $R(A)=A'$، $R(C)=C'$ و $R(B)=A$

حل مقترح التمرين الرابع

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$

1) أ- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(1+\frac{2\ln x}{x}\right)=-\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$: لأن ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2\ln x}{x}\right)=1$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـدراسة إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، و من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-1\times 2\ln x}{x^2}=\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-\ln x$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]0;e]$ و متناقصة على المجال $[e;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1+2e^{-1}$	↘	$+\infty$

2) أ ـدراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=1$.

لدينا : $f(x)-y=1+\frac{2\ln x}{x}-1=\frac{2\ln x}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ لأن $\frac{2}{x}>0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

بـ ـكتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

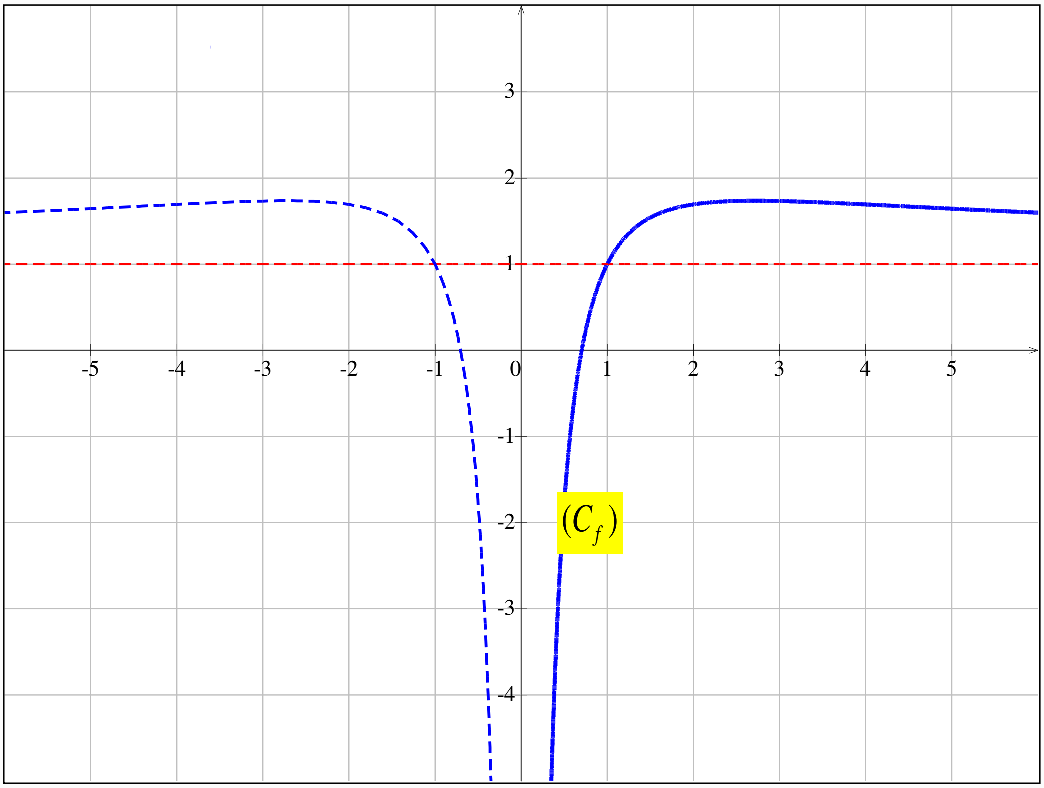
لدينا : $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T):y=2x-1$.

جـ ـتبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و $\left]e^{-0,4};e^{-0,3}\right[\subset]0;1]$ و $\begin{cases}f\left(e^{-0,4}\right)\approx-0,2\\ f\left(e^{-0,3}\right)\approx 0,2\end{cases}$

أي $f\left(e^{-0,4}\right)\times f\left(e^{-0,3}\right)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

3) الرسم :



4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

أ ـ من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$h(x)-h(-x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|-x|}{|-x|}=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|x|}{|x|}=0$$

نستنتج أن الدالة h زوجية و تمثيلها البياني (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب .

بـ ـ كيفية إنشاء المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) :

من أجل $x\in]0;+\infty[$ ، يكون $f(x)=h(x)$ و بالتالي (C_h) منطبق على (C_f) .

من أجل $x\in]-\infty;0[$ ، (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب لكون الدالة h زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

جـ ـ المناقشة البيانية :

$$h(x)=m \text{ أي } 1+\frac{2\ln|x|}{|x|}=m \text{ تكافئ } 2\ln|x|=(m-1)|x| \text{ تكافئ } \ln x^2=(m-1)|x|$$

و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_h) و المستقيم ذي المعادلة $y=m$.

لما $m\in]-\infty;0]$ المعادلة تقبل حلين .

لما $m\in\left]0;1+\dfrac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل أربعة حلول .

لما $m=1+\dfrac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلين (مضاعفين).

لما $m\in\left]1+\dfrac{2}{e};+\infty\right[$ المعادلة ليس لها حلول .

❧ تصحيح مقترح للموضوع الثاني ☙

حل مقترح التمرين الأول

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

1) تبيان أن (u_n) متتالية هندسية:

لدينا: من من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-(n+1)} = e^{\frac{1}{2}-n-1} = e^{\frac{1}{2}-n} \times e^{-1} = \frac{1}{e}u_n$

و منه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$ و حدها الأول $u_0 = e^{\frac{1}{2}-0} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

2) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{e}\times\left(\frac{1}{e}\right)^n\right] = 0$$

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) حساب المجموع S_n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \sqrt{e}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}}\right] = \frac{e\sqrt{e}}{e-1}\left(1-e^{-n-1}\right)$$

II) من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \ln(u_n)$

1) كتابة v_n بدلالة n :

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \ln(u_n)$ و منه $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}-n}\right) = \frac{1}{2} - n$.

استنتاج نوع المتتالية (v_n) :

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} - (n+1) - \left(\frac{1}{2} - n\right) = -1$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = -1$ و حدها الأول $v_0 = \ln(u_0) = \ln\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2}$.

2) أ- حساب العدد P_n :

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n،

$$P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n) = \ln u_0 + \ln u_1 + \dots + \ln u_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

و منه $P_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n\right) = \frac{(n+1)(1-n)}{2} = \frac{1-n^2}{2}$

ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$.

$P_n + 4n > 0$ يكافئ $\frac{1-n^2}{2} + 4n > 0$ يكافئ $\frac{1+8n-n^2}{2} > 0$ يكافئ $-\frac{1}{2}n^2 + 4n + \frac{1}{2} > 0$

و لدينا: $-\frac{1}{2}n^2 + 4n + \frac{1}{2} > 0$ يكافئ $n \in \left]4-\sqrt{17}; 4+\sqrt{17}\right[$ أي $n \in [0;8]$

و منه مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث $P_n + 4n > 0$ هي: $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

حل مقترح التمرين الثاني

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث: $A(1;-1;-2)$ ، $B(1;-2;-3)$ و $C(2;0;0)$.

1) أـ إثبات أن A ، B و C ليست في استقامية.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;2)$ و $\frac{-1}{1} \neq \frac{0}{1}$ بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن A ، B و C ليست في استقامية ، إذن فهي تعيّن مستويا .

بـ- كتابة تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) :

بما أن النقط A ، B و C ليست في استقامية فإن $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ أساس للمستوي (ABC) .

و منه تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) من الشكل : $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ ، $\begin{cases} x = 1+\beta \\ y = -1-\alpha+\beta \\ z = -2-\alpha+2\beta \end{cases}$.

جـ- التحقق أن $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة.

$A\in(ABC)$ لأن $x_A+y_A-z_A-2=1-1-(-2)-2=0$

$B\in(ABC)$ لأن $x_B+y_B-z_B-2=1-2-(-3)-2=0$

$C\in(ABC)$ لأن $x_C+y_C-z_C-2=2+0-0-2=0$

2) (P) و (Q) المستويان (P) و (Q) المعرفان بالمعادلتين: $(P): x-y-2z+5=0$ و $(Q): 3x+2y-z+10=0$.

إثبات أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي: $(t\in\mathbb{R})$ ، $\begin{cases} x = t-3 \\ y = -t \\ z = t+1 \end{cases}$.

لدينا : $\vec{n}(1;-1;-2)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n'}(3;2;-1)$ شعاع ناظمي لـ (Q) .

$\vec{n}$ و $\vec{n'}$ ليسا مرتبطين خطيا و بالتالي المستويان (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم .

و لدينا : $\begin{cases} (t-3)-(-t)-2(t+1)+5=0 \\ 3(t-3)+2(-t)-(t+1)+10=0 \end{cases}$ و منه $(\Delta)\subset(P)$ و $(\Delta)\subset(Q)$ أي $(Q)\cap(P)=(\Delta)$.

3) تعيين تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q) .

لدينا : $(ABC)\cap(Q)\cap(P)=(\Delta)\cap(ABC)$

لدينا $\begin{cases} x = t-3 \\ y = -t \\ z = t+1 \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$ يكافئ $(t-3)+(-t)-(t+1)-2=0$ أي $t=-6$.

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $(-9;6;-5)$ و هي إحداثيات النقطة E نقطة تقاطع (ABC) ، (P) و (Q) .

4) $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء. نسمي $d(M,(P))$ المسافة بين M و (P) و $d(M,(Q))$ المسافة بين M و (Q) .

تعيين المجموعة (Γ) للنقط M بحيث : $\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$.

$\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$ معناه $|x-y-2z+5|=|3x+2y-z+10|$

أي : $\begin{cases} x-y-2z+5=3x+2y-z+10 \\ \text{أو} \\ x-y-2z+5=-(3x+2y-z+10) \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 2x+3y+z+5=0 \\ \text{أو} \\ 4x+y-3z+15=0 \end{cases}$

و منه مجموعة النقط (Γ) هي إتحاد مستويين معادلتاهما : $2x+3y+z+5=0$ و $4x+y-3z+15=0$.

حل مقترح التمرين الثالث

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

$(z-i)(z^2-2z+5)=0$ تكافئ: $z=i$ أو $z^2-2z+5=0$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+5=0$

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times5=-16=16i^2=(4i)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

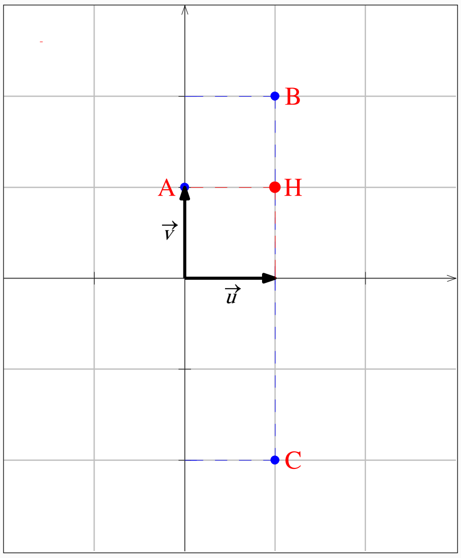
$z_1=\dfrac{2-4i}{2}=1-2i$ و $z_2=\dfrac{2+4i}{2}=1+2i$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $(z-i)(z^2-2z+5)=0$ هي : $S=\{i\,;1-2i\,;1+2i\}$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الطول $1cm$)

تعطى النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ ، $z_C=1-2i$.

أ- إنشاء النقط A ، B و C :



ب- تعيين z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) : $z_H=1+i$

جـ- حساب مساحة المثلث ABC:

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC=\dfrac{1}{2}\times1\times4=2cm^2$ لأن $AH=|z_H-z_A|=|1+i-i|=1$ و $BC=|z_C-z_B|=|-4i|=4$

3) S التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\dfrac{1}{2}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

أ- تعيين الكتابة المركبة للتشابه S :

لدينا: $z'-z_A=\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$ و منه $z'=\dfrac{1}{2}i(z-i)+i$ أي : $z'=\dfrac{1}{2}iz+\dfrac{1}{2}+i$.

ب- تبيان أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\dfrac{1}{2}cm^2$:

بما أن نسبة التشابه S هي $\dfrac{1}{2}$ فإن: $S'=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times S_{ABC}=\dfrac{1}{4}\times2=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}cm^2$.

4) تعيين مجموعة النقط M حيث : $|z|=|iz+1+2i|$.

$|z|=|iz+1+2i|$ تكافئ $|z|=|i(z-i+2)|$ تكافئ $|z|=|z-i+2|$ تكافئ $|z|=|z-(i-2)|$.

و منه مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[OD]$ بحيث D هي النقطة التي لاحقتها $z_D=i-2$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$

1) أ- $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

ب- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x)=6x^2-8x+7$.

من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)>0$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

(لأن: $6x^2-8x+7=6\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{13}{3}$ أو لأن: مميّز العبارة $6x^2-8x+7$ سالب و معامل x^2 موجب تماما)

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) أ- تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7<\alpha<0,8$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(0.7)\approx -0,37 \\ g(0.8)\approx 0,06 \end{cases}$ أي $g(0.7)\times g(0.8)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,7<\alpha<0,8$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$.

2) أ- من أجل كل عدد حقيقي x،

$$\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}=f(x)$$

ب- لدينا: $\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{-3x}{4x^2}\right]=0$

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}(x+1)$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

جـ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) :

لدينا: $f(x)-y=f(x)-\frac{1}{2}(x+1)=\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$ و منه إشارة الفرق $f(x)-y$ من إشارة $1-3x$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$	(C_f) تحت (Δ)

3) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x،

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1)-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2}=\frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x+1)^2}=\frac{x\cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

ب- إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

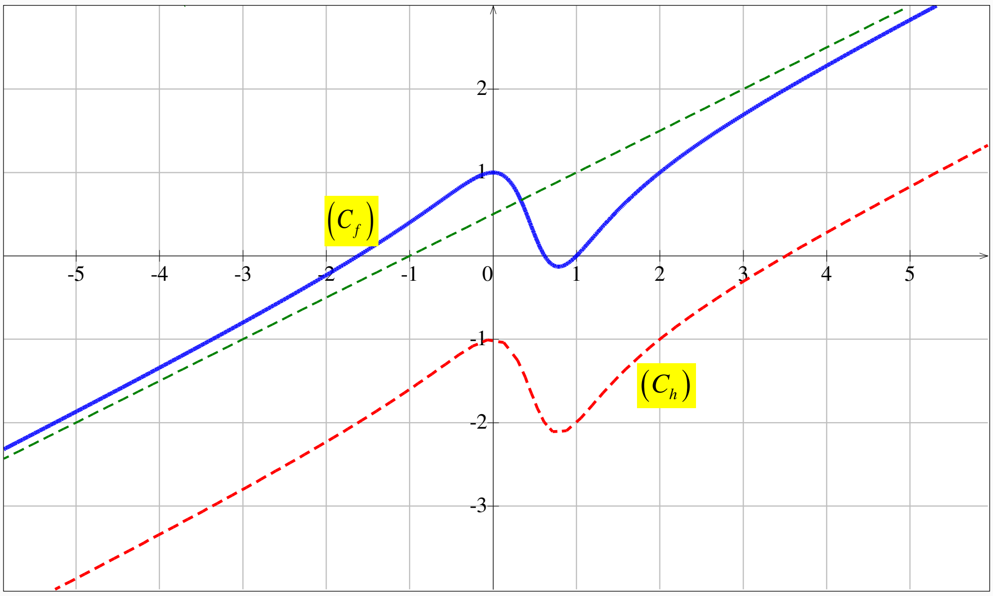
4) $f(1)=0$.

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ تكافئ $x^3-2x+1=0$ تكافئ $x^3-2x+1=0$ تكافئ $(x-1)(x^2+x-1)=0$

إذن حلول المعادلة $f(x)=0$ هي : $\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

5) الرسم :



6) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$.

أ- التحقق : من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)-2=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}-2=\frac{x^3-2x+1-2(2x^2-2x+1)}{2x^2-2x+1}=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}=h(x)$$

ب- المنحنى (C_h) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\,(0;-2)$.

الرسم : أنظر الشكل السابق .

تصحيح مقترح لبكالوريا 2015 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5ن)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط: $A(2;1;0)$ ، $B(1;2;2)$ ، $C(3;3;1)$ و $D(1;1;4)$.

1) تحقق أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا و أن $x-y+z-1=0$ معادلة ديكارتية له .

2) بيّن أن المثلث ABC متقايس الأضلاع ، ثم تحقق أن مساحته هي $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة.

3) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) و الذي يشمل النقطة D .

4) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

أ- عيّن إحداثيات النقطة E ثم أحسب المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC) .

ب- عيّن مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E و نصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$

5) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثاني (4,5ن)

I) عيّن العددين المركّبين α و β حيث : $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β .

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_A=z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1) أ- أكتب z_A و z_C على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

ب- تحقق أن العدد المركب $\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}-\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}+\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}2$ حقيقي .

2) النقطة D ذات اللاحقة $z_D=1+i$

أ- حدد النسبة و زاوية للتشابه S الذي مركزه O و يحول D إلى A .

ب- أكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

التمرين الثالث (4,5ن)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=e^2-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}-1$.

1) أحسب : u_1 ، u_2 و u_3 .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_n>0$.

3) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة . هل هي متقاربة ؟

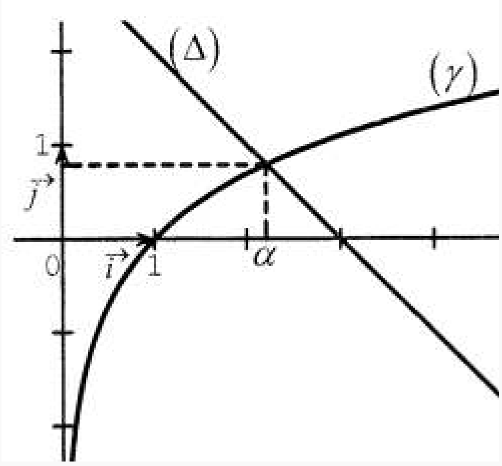
4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=3(1+u_n)$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

بـ- أكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

جـ- بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

التمرين الرابع (6,5ن)



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = -x+3$

α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ) .

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.

2) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x - 3 + \ln x$.

إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3) تحقق أن : $2,2 < \alpha < 2,3$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن: $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل؛ ثم أنشئ (C_f) على المجال $]0;e^2]$.

III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1) = -3$.

1) بين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بين أن $x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ، ثم إستنتج عبارة الدالة F .

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(2;4;1)$ ، $B(0;4;-3)$ ، $C(3;1;-3)$ ، $D(1;0;-2)$

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات الاتية :

1) النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2) $2x+2y-z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3) النقطة $E(3;2;-1)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

4) المستقيمان (AB) و (CD) من نفس المستوي.

5) $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t-1 \\ z = -t-1 \end{cases}$ ، $t \in \mathbb{R}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (CD) .

6) يوجد عددان حقيقيان α و β حيث النقطة $I(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5})$ مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$.

التمرين الثاني(5ن)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ ، $z_C=-\left(z_A+z_B\right)$.

1)أ- أكتب كلا من العددين المركّبين z_B و z_C على الشكل الأسّي.

ب- استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

جـ- أنشىء الدائرة (γ) و النقط A ، B و C.

2) أ- تحقق أن : $\dfrac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب- استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع و أن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث .

جـ- عيّن و أنشىء (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z|=\left|z-\sqrt{3}-i\right|$.

3) أ- عيّن زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A .

ب- أثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

التمرين الثالث(5ن)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

I) f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) عيّن اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

2) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة: $y=x$.

3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f\left(u_n\right)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=5\\v_{n+1}=f\left(v_n\right)\end{cases}$

1) أ- أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0,u_1,u_2 و u_3 ، v_0,v_1,v_2 و v_3 دون حسابها.

ب- خمّن اتجاه تغير و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

2) أ- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2\le u_n<\alpha$ و $\alpha<v_n\le 5$ حيث : $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

ب- استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3) أ- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{1}{3}\left(v_n-u_n\right)$

ب- بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0<v_n-u_n\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

جـ- استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n-u_n\right)=0$ ، ثم حدد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

التمرين الرابع(6ن)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن: $0,36<\alpha<0,37$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب- إستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ، نأخذ $f(-\alpha)\approx 0{,}1$.

6) أ- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

ب- إستنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

A ، B ، C و D النقط من الفضاء بحيث : $A(2;1;0)$ ، $B(1;2;2)$ ، $C(3;3;1)$ و $D(1;1;4)$.

1) التحقق أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ و $\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{1}$ و بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B و C ليست في استقامية إذن فهي تعيّن مستويا .

• التحقق أن : $x-y+z-1=0$ معادلة للمستوي (ABC) :

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة المعطاة .

$A\in(ABC)$ لأن $x_A-y_A+z_A-1=2-1+0-1=0$

$B\in(ABC)$ لأن $x_B-y_B+z_B-1=1-2+2-1=0$

$C\in(ABC)$ لأن $x_C-y_C+z_C-1=3-3+1-1=0$

2) تبيان أن المثلث ABC متقايس الأضلاع :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ و $\overrightarrow{BC}(2;1;-1)$ و منه $AB=AC=BC=\sqrt{6}$ و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع .

• التحقق أن مساحة ABC هي : $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{6}\right)^2=\frac{6\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

3) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) و الذي يشمل النقطة D :

$(\Delta)\perp(ABC)$ معناه $\vec{n}(1;-1;1)$ الناظمي لـ (ABC) هو شعاع توجيه لـ (Δ) .

و منه تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) من الشكل : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=t+1\\y=-t+1\\z=t+4\end{cases}$.

4) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

أ- تعيين إحداثيات النقطة E :

النقطة E هي نقطة تقاطع المستوي (ABC) و المستقيم (Δ) .

لدينا $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+1 \\ z = t+4 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ يكافئ $(t+1)-(-t+1)+(t+4)-1=0$ أي $t=-1$.

و بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $(0;2;3)$ و هي إحداثيات النقطة E .

- حساب المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC) :

$$d(D,(ABC)) = \frac{|x_D - y_D + z_D - 1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

ب- تعيين مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E و نصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$:

لدينا : $d(D,(ABC)) = \sqrt{3}$ و منه إحدى الكرتين مركزها D و الأخرى مركزها D' نظيرة D بالنسبة لـ E .

لدينا E منتصف $[DD']$ و منه $\overrightarrow{ED'} = -\overrightarrow{ED}$ أي $\overrightarrow{ED'} = \overrightarrow{DE}$ ،

و $\overrightarrow{DE}(-1;1;-1)$ و $\overrightarrow{ED'}(x_{D'};y_{D'}-2;z_{D'}-3)$ ومنه بالمطابقة نجد : $D'(-1;3;2)$.

5) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC} \times h$ بحيث : $h = d(D,(ABC)) = \sqrt{3}$

و منه : $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}$

حل مقترح التمرين الثاني

I) تعيين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\overline{\alpha} + \overline{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$

$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\overline{\alpha} + \overline{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\alpha + \beta = -3 + 2i\sqrt{3} \end{cases}$ و بالجمع طرف لطرف نجد : $4\alpha = -6 + 2i\sqrt{3}$

أي : $\alpha = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و بتعويض قيمة α نجد : $\beta = i\sqrt{3}$.

II) A ، B و C النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1) أ- كتابة z_A و z_C على الشكل الأسّي :

لدينا : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و منه : $|z_A| = \sqrt{3}$.

و بفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A ، يكون : $\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$ ، و منه $\arg(z_A) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث

$k \in \mathbb{Z}$

إذن : $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

ولدينا : $z_A = z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_C = z_A e^{-i\frac{\pi}{3}}$ أي $z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

• تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا :

لدينا : $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$

$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي سالب معناه $\arg\left[\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n\right] = \pi + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$.

$\arg\left[\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n\right] = \pi + 2k\pi$ يكافئ $\arg\left(e^{i\frac{n\pi}{3}}\right) = \pi + 2k\pi$ يكافئ $\frac{n\pi}{3} = (2k+1)\pi$

يكافئ $n = 6k+3 \ / \ k \in \mathbb{N}$

بـ- التحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي :

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} = 2\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2015} + \left(e^{i\frac{-5\pi}{6}}\right)^{1962} - \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1435} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} + e^{i\pi} - e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{3}-1$$

2) النقطة D ذات اللاحقة $z_D = 1+i$

أ- تحديد النسبة و زاوية للتشابه S الذي مركزه O و يحول D إلى A :

لدينا : $\begin{cases} S(O) = O \\ S(D) = A \end{cases}$ ومنه $z_A - z_O = ke^{i\theta}(z_D - z_O)$ ومنه نسبة التشابه S هي : $k = \left|\frac{z_A}{z_D}\right|$

و زاوية للتشابه S هي $\theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right)$.

ولدينا : $\frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ومنه $k = \left|\frac{z_A}{z_D}\right| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ و $\theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right) = \frac{7\pi}{12}$

بـ- كتابة $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+i} = \frac{\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-3}{4}+i\frac{\sqrt{3}+3}{4}$$

• إستنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$:

لدينا : $\frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \frac{\sqrt{6}}{2}i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و بالمطابقة مع الشكل الجبري نجد :

$\begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-3}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+3}{4} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2\left(\sqrt{3}-3\right)}{4\sqrt{6}} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2\left(\sqrt{3}+3\right)}{4\sqrt{6}} \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

3) تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

$z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ تكافئ $z = kz_De^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ تكافئ $z = kz_A$ تكافئ $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA}$ و $k \in \mathbb{R}^+$.

و بالتالي مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[OA)$.

حل مقترح التمرين الثالث

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=e^2-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}-1$.

1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

$u_1=(1+u_0)e^{-2}-1=e^2\times e^{-2}-1=0$ ، $u_2=(1+u_1)e^{-2}-1=e^{-2}-1$

$u_3=(1+u_2)e^{-2}-1=e^{-4}-1$.

2) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1+u_n>0$:

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_n>0$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=e^2-1$ و منه $1+u_0>0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $1+u_n>0$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1+u_{n+1}>0$.

لدينا حسب الفرض $1+u_n>0$ و لدينا $1+u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}$ و منه $1+u_{n+1}>0$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $1+u_n>0$.

3) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=(1+u_n)e^{-2}-1-u_n=(1+u_n)e^{-2}-(1+u_n)=(1+u_n)(e^{-2}-1)$

و بما أنه $1+u_n>0$ ، من أجل كل عدد طبيعي n ، و $e^{-2}-1<0$ فإن $u_{n+1}-u_n<0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

- المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد -1 ، إذن فهي متقاربة .

4) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=3(1+u_n)$

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}=3(1+u_{n+1})=3(1+u_n)e^{-2}=e^{-2}v_n$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=e^{-2}$ و حدها الأول: $v_0=3(1+u_0)=3e^2$.

ب- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=3\times e^2(e^{-2})^n=3e^{-2n+2}$.

- كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=3(1+u_n)$ و منه $u_n=\frac{1}{3}v_n-1$ أي $u_n=\frac{1}{3}(3e^{-2n+2})-1=e^{-2n+2}-1$.

- حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$:

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(e^{-2n+2}-1)=-1$ لأن: $\lim_{n\to+\infty}e^{-2n+2}=0$

جـ- تبيان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0+\ln v_1+\ln v_2+...+\ln v_n=(n+1)(-n+2+\ln 3)$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_0\times v_1\times v_2\times...\times v_n=(3\times e^2)^{n+1}(e^{-2})^{0+1+2+...+n}=(3\times e^2)^{n+1}(e^{-2})^{\frac{n(n+1)}{2}}=(3\times e^2)^{n+1}e^{-n(n+1)}=(3e^{2-n})^{n+1}$$

و منه $\ln(v_0\times v_1\times v_2\times....\times v_n)=(n+1)\ln(3e^{2-n})$ أي $\ln v_0+\ln v_1+\ln v_2+...+\ln v_n=(n+1)(\ln 3+2-n)$.

(يمكن إستخدام طرق أخرى)

حل مقترح التمرين الرابع

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ) .

1) بقراءة بيانية :

تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]0;+\infty[$:

من أجل $x\in]0;\alpha[$ ، (γ) يقع تحت (Δ) .

من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ ، (γ) يقع فوق (Δ) .

2) إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

3) التحقق أن : $2,2<\alpha<2,3$.

لدينا : $\begin{cases} g(2,2)\approx -0,011 \\ g(2,3)\approx 0,13\end{cases}$ و منه $g(2,2)\times g(2,3)<0$ أي $2,2<\alpha<2,3$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)\right]=+\infty$$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(\ln x-2)=-\infty\end{cases}$

و $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)\right]=+\infty$$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-2)=+\infty\end{cases}$

2) تبيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{\ln x-2+x-1}{x^2}=\frac{-3+x+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) تبيان أن : $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $\ln\alpha=-\alpha+3$ و بالتالي : $f(\alpha)=\left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha-2)=\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha+1)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $2,2<\alpha<2,3$ يكافئ : $\begin{cases} \dfrac{1}{2,3}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{2,3} \\ 1,2<\alpha-1<1,3 \\ (1,2)^2<(\alpha-1)^2<(1,3)^2 \end{cases}$ و منه $\dfrac{(1,2)^2}{2,3}<\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\dfrac{(1,3)^2}{2,2}$

و منه : $-\dfrac{(1,3)^2}{2,2}<f(\alpha)<-\dfrac{(1,2)^2}{2,3}$ أي : $-0,76<f(\alpha)<-0,62$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

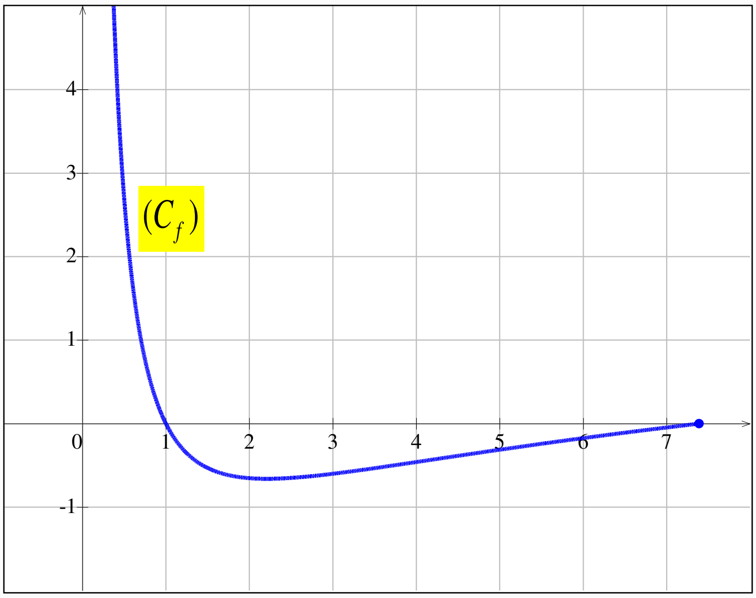
لندرس إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)=\dfrac{1}{x}(x-1)(-2+\ln x)$ ومنه إشارة $f(x)$ من إشارة $(x-1)(-2+\ln x)$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه (C_f) فوق حامل محور الفواصل على كل من المجالين $]e^2;+\infty[$ و $]0;1[$ و تحته على المجال $]1;e^2[$ ، و يتقاطعان في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

الرسم :



III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-3$.

1) تبيان أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ يعني : من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=0$ تكافئ $f(x)=0$ تكافئ : $x=1$ أو $x=e^2$ ، و منه منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

2) تبيان أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$:

نضع : $u(x)=x\ln x-x$

الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $u'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}\times x-1=\ln x$.

و منه الدالة u هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

إستنتاج عبارة الدالة F :

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\left(\ln t-2-\frac{\ln t}{t}+\frac{2}{t}\right)dt=\left[t\ln t-t-2t-\frac{1}{2}(\ln t)^2-2\ln t\right]_1^x=(2+x)\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2-3x$$

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A(2;4;1)$ ، $B(0;4;-3)$ ، $C(3;1;-3)$ ، $D(1;0;-2)$.

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة:

1) النقط A ، B و C ليست في استقامية. ⟵ صحيح

التبرير:

لدينا : $\overrightarrow{AB}\left(-2;0;-4\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(1;-3;-4\right)$ و $\frac{-2}{1}\neq\frac{0}{-3}$ و بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2) $2x+2y-z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) . ⟵ صحيح

التبرير:

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة .

$A\in\left(ABC\right)$ لأن $2x_A+2y_A-z_A-11=2\times2+2\times4-1-11=0$

$B\in\left(ABC\right)$ لأن $2x_B+2y_B-z_B-11=2\times0+2\times4-(-3)-11=0$

$C\in\left(ABC\right)$ لأن $2x_C+2y_C-z_C-11=2\times3+2\times1-(-3)-11=0$

3) النقطة $E(3;2;-1)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) . ⟵ خطأ

التبرير:

لدينا : $\overrightarrow{DE}\left(2;2;1\right)$ و $\vec{n}\left(2;2;-1\right)$ ناظمي للمستوي (ABC) .

لاحظ أن $\overrightarrow{DE}$ و $\vec{n}$ ليسا مرتبطين خطيا و بالتالي $\overrightarrow{DE}$ ليس ناظميا للمستوي (ABC) .

4) المستقيمان (AB) و (CD) من نفس المستوي. ⟵ خطأ

التبرير:

$D\notin\left(ABC\right)$ لأن $2x_D+2y_D-z_D-11\neq0$

5) $t\in\mathbb{R}$ ، $\begin{cases}x=2t-1\\y=t-1\\z=-t-1\end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (CD) . ⟵ صحيح

التبرير:

إحداثيات كلا من النقطتين C و D تحقق التمثيل الوسيطي .

لأن : بتعويض إحداثيات C في التمثيل الوسيطي نجد $t=2$ و بتعويض إحداثيات D في التمثيل الوسيطي نجد $t=1$.

6) يوجد عددان حقيقيان α و β حيث النقطة $I(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5})$ مرجح الجملة $\left\{(A;\alpha),(B;\beta)\right\}$. ⟵ صحيح

التبرير:

لدينا : $\overrightarrow{IA}(\frac{7}{5};0;\frac{14}{5})$ و $\overrightarrow{IB}(-\frac{3}{5};0;-\frac{6}{5})$ و منه $\overrightarrow{IA}=-\frac{7}{3}\overrightarrow{IB}$ أي $3\overrightarrow{IA}+7\overrightarrow{IB}=\vec{O}$ إذن : $\left(\alpha;\beta\right)=\left(3;7\right)$.

حل مقترح التمرين الثاني

$z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ ، $z_C=-\left(z_A+z_B\right)$.

1) أ- كتابة كلا من العددين المركّبين z_B و z_C على الشكل الأسّي:

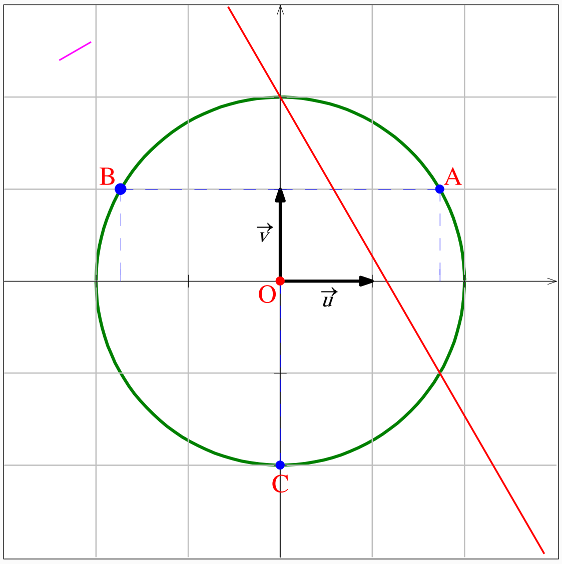
$$z_B=-\overline{z_A}=e^{i\pi}\times2e^{-i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_C=-\left(z_A+z_B\right)=-\left(z_A-\overline{z_A}\right)=-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

بـ- استنتاج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

لدينا : $|z_B| = |z_C| = |z_A| = 2$ و هذا يعني : $OA = OB = OC = 2$ و بالتالي النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (γ) التي مركزها O و نصف قطرها 2 .

جـ- الرسم :



2) أ- التحقق أن : $\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + i - (-2i)}{-\sqrt{3} + i - (\sqrt{3} + i)} = \frac{\sqrt{3} + 3i}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

بـ- استنتاج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع :

$\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يكافئ $\begin{cases} \left|\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} AB = BC \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ و منه المثلث ABC متقايس الأضلاع

.

• إثبات أن النقطة O مركز ثقل المثلث ABC :

لدينا : $z_A + z_B + z_C = z_A + z_B - (z_A + z_B) = 0$ و منه $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$ و بالتالي O مركز ثقل المثلث ABC .

جـ- تعيين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.

$|z| = |z - \sqrt{3} - i|$ تكافئ $|z| = |z - (\sqrt{3} + i)|$ تكافئ $|z| = |z - z_A|$ تكافئ $OM = AM$

و بالتالي مجموعة النقط (E) هي محور القطعة $[OA]$.

إنشاء المجموعة (E) : أنظر الشكل .

3) أ- تعيين زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A .

لدينا : $\begin{cases} r(O) = O \\ r(C) = A \end{cases}$ و منه $z_A - z_O = e^{i\theta}(z_C - z_O)$ و منه زاوية للدوران r هي $\theta = \arg\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)$.

و لدينا : $\dfrac{z_A}{z_C} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و منه $\theta = \arg\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$

بـ- إثبات أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$:

لدينا : $r(O) = O$ و $r(A) = B$ لأن : $z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و منه صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$ ، كون الدوران يحافظ على المنتصفات و على التعامد.

حل مقترح التمرين الثالث

I) f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) تعيين إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و $f'(x)=\dfrac{4(x+1)-(4x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

لدينا : من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة : $y=x$.

لدينا : $f(x)-x=\dfrac{4x+1}{x+1}-x=\dfrac{-x^2+3x+1}{x+1}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x^2+3x+1$ على المجال $[0;+\infty[$.

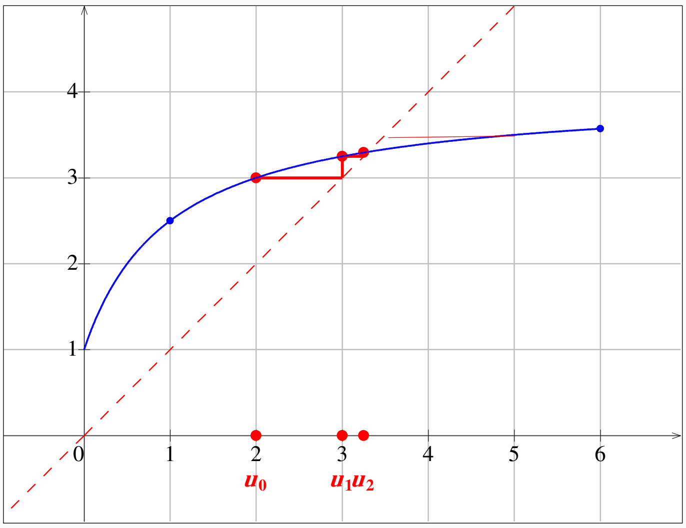
المعادلة $-x^2+3x+1=0$ تقبل في المجال $[0;+\infty[$ حلا α بحيث : $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

x	0		α		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

على المجال $[0;\alpha[$: (C_f) يقع فوق (D).

على المجال $]\alpha;+\infty[$: (C_f) يقع تحت (D).

3) الرسم :



II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=5\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$

1) أ- الرسم : أنظر الشكل.

ب- التخمين : المتتالية (u_n) متزايدة و المتتالية (v_n) متناقصة و كلا منهما تتقارب نحو العدد $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

2) أ- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\le u_n<\alpha$ و $\alpha<v_n\le 5$ حيث : $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2\le u_n<\alpha$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $2\le u_n<\alpha$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=2$ و منه $2\le u_0<\alpha$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $2\le u_n<\alpha$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $2\le u_{n+1}<\alpha$.

لدينا حسب الفرض $2 \le u_n < \alpha$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن $f(2) \le f(u_n) < f(\alpha)$

أي $2 \le 3 \le u_{n+1} < \alpha$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $2 \le u_n < \alpha$.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\alpha < v_n \le 5$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $\alpha < v_n \le 5$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$، لدينا $v_0 = 5$ و منه $\alpha < v_0 \le 5$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $\alpha < v_n \le 5$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $\alpha < v_{n+1} \le 5$.

لدينا حسب الفرض $\alpha < v_n \le 5$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن $f(\alpha) < f(v_n) \le f(5)$

أي $\alpha < v_{n+1} \le \frac{7}{2} \le 5$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $\alpha < v_n \le 5$.

بـ- استنتاج اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \in [2;\alpha[$. و من أجل $x \in]0;\alpha[$: $f(x) - x > 0$ و منه: $u_{n+1} - u_n > 0$.

و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ولدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n \in]\alpha;5]$. و من أجل $x \in]\alpha;+\infty[$: $f(x) - x < 0$ و منه: $v_{n+1} - v_n < 0$.

و بالتالي المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

3) أ- إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} - u_{n+1} = f(v_n) - f(u_n) = \frac{1+4v_n}{1+v_n} - \frac{1+4u_n}{1+u_n} = \frac{3(v_n - u_n)}{(1+v_n)(1+u_n)}$

و من جهة أخرى : $\begin{cases} u_n \ge 2 \\ v_n \ge 2 \end{cases}$ يكافئ $\frac{3}{(1+v_n)(1+u_n)} \le \frac{1}{3}$ و منه $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

بـ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < v_n - u_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{3}(v_n - u_n)$ و هذا يعني :

$$\begin{cases} v_1 - u_1 \le \frac{1}{3}(v_0 - u_0) \\ v_2 - u_2 \le \frac{1}{3}(v_1 - u_1) \\ .... \\ .... \\ v_n - u_n \le \frac{1}{3}(v_{n-1} - u_{n-1}) \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف نجد $(v_1 - u_1)(v_2 - u_2)...(v_n - u_n) \le \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0 - u_0)(v_1 - u_1)...(v_{n-1} - u_{n-1})$

و منه : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n - u_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. (يمكن إستخدام البرهان بالتراجع)

و من جهة أخرى لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n$ و منه $v_n - u_n > 0$.

و بالتالي : من أجل كل عدد طبيعي n : $0<v_n-u_n\le\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

جـ- لدينا، $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ و منه نستنتج أن : $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) هي العدد الحقيقي l الذي يحقق : $f(l)=l$.

إذن : $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}v_n=\alpha$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=-2-2e^{2x-2}=-2\left(1+2e^{2x-2}\right)$.

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)<0$ و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و
$$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x-2)\left(\frac{1-2x}{2x-2}-\frac{e^{2x-2}}{2x-2}\right)=-\infty\end{cases}$$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

التحقق أن : $0,36<\alpha<0,37$.

لدينا : $\begin{cases}g(0.36)\approx 0,002\\ g(0.37)\approx -0,02\end{cases}$ أي : $g(0.36)\times g(0.37)<0$ و منه $0,36<\alpha<0,37$.

3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

1) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1=e^{2x+2}\left(1+2x-e^{-2x-2}\right)=e^{2x+2}\left(1-2(-x)-e^{2(-x)-2}\right)=e^{2x+2}g(-x)$$

بـ- إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

نستنتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة على $[-\alpha;+\infty[$.

2) حساب النهايات :

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}-x+1\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{2}\times 2xe^{2x}\right)=0$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{2x+2}-x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{2x+2}-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $\lim_{x \to -\infty}[f(x)+x-1]=\lim_{x \to -\infty}\left(xe^{2x+2}\right)=\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{2}e^2 \times 2xe^{2x}\right)=0$

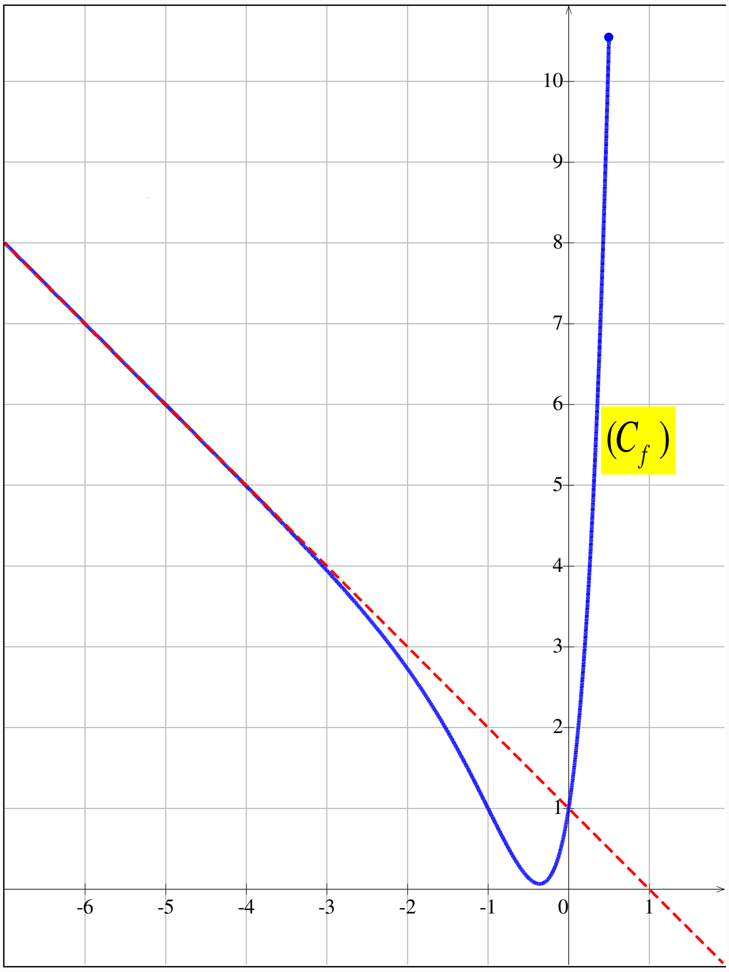
التفسير الهندسي : المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-(-x+1)=xe^{2x+2}$ و منه إشارة الفرق من إشارة x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) فوق (Δ)

5) الرسم :



6) أ- التحقق : من أجل كل عدد حقيقي x :

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=2xe^{2x+2}-2x+2+e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1-(4x+4)e^{2x+2}=1-2x-3e^{2x+2}$$

بـ- إستنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

و منه $f(x)=-\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}-x-\frac{3}{2}e^{2x+2}$.

و بالتالي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ من الشكل : $F(x)=\frac{1}{2}\left[-f(x)+f'(x)+x-x^2-\frac{3}{2}e^{2x+2}\right]+c$

أي : $F(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x+2}-\frac{1}{2}x^2+x-1+c$.

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر المستويين (P) و (P') معادلتيهما على الترتيب :

$x-2y+z-2=0$ و $2x+y-z+1=0$.

1) بيّن أن المستويين (P) و (P') متقاطعان .

2) عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $d(M,(P))=d(M,(P'))$.

حيث $d(M,(P))$ المسافة بين النقطة M و المستوي (P) و $d(M,(P'))$ المسافة بين النقطة M و المستوي (P') .

3) تحقق أن النقطة $A(1;2;0)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ) .

4) H و H' المسقطان العموديان للنقطة A على المستويين (P) و (P') على الترتيب .

أ- جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (AH) و (AH') .

ب- استنتج إحداثيات كل من النقطتين H و H' .

5) عيّن إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[HH']$ ثم أحسب مساحة المثلث AHH' .

التمرين الثاني (5ن)

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{2x+8}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .

2) عيّن إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي : $y=x$ معادلة له .

3) أرسم (C) و (Δ) .

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0=0$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

2) ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

3) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n<4$

ب- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

جـ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

د- استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث (4,5ن)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $(z\neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث : $z'=\frac{z-2}{z-1}$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z'=z$.

2) النقطتان A و B لاحقتاهما z_1 و z_2 على الترتيب حيث : $z_1=1-i$ ، $z_2=\overline{z_1}$.

أ- أكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي.

ب- بيّن أن النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يطلب تعيين زاوية له .

3) نضع : $z'\neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب .

عيّن (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب ثم أنشئ (Γ) .

4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O و نسبته 2 .

أ- عيّن طبيعة التحويل النقطي $S=h\circ R$ و عناصره المميزة .

ب- أكتب العبارة المركبة للتحويل S .

جـ- عيّن ثم أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

التمرين الرابع (6,5ن)

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

2) أحسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ب- شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1 .

4) بيّن أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث : $y=x-1$ معادلة له .

ب- أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

5) أرسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C) .

6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث : $y=mx-m$ معادلة له.

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

ب- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=mx-m$.

7) أ- جد دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب- أحسب I_n مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$ حيث n عدد طبيعي $(n>1)$.

جـ- عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n>n_0$ فإن : $I_n>2$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4,5ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقطتين $A\left(5;-1;-2\right)$ و $B\left(3;12;-7\right)$.

$\left(\Delta\right)$ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي : $\left(k\in\mathbb{R}\right)$ ، $\begin{cases} x=1+3k \\ y=1+2k \\ z=4k \end{cases}$

1) أ- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(\Delta'\right)$ الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}\left(-2;1;1\right)$ شعاع توجيه له .

ب- بيّن أن المستقيمين $\left(\Delta\right)$ و $\left(\Delta'\right)$ متعامدان و أن النقطة $C\left(1;1;0\right)$ نقطة تقاطعهما .

2) $\left(P\right)$ المستوي المعيّن بالمستقيمين $\left(\Delta\right)$ و $\left(\Delta'\right)$.

أ- بيّن أن الشعاع $\vec{n}\left(2;11;-7\right)$ ناظمي للمستوي $\left(P\right)$ ، ثم جد معادلة ديكارتية له .

ب- بيّن أن النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي $\left(P\right)$.

3) α و β عددان حقيقيان و $\left(P'\right)$ مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء المعرّفة بـ : $\begin{cases} x=3-\beta \\ y=12+12\alpha+9\beta \\ z=-7-6\alpha-11\beta \end{cases}$.

أ- أثبت أن المجموعة $\left(P'\right)$ هي مستو ثم تحقق أن $13x-y-2z-41=0$ هي معادلة ديكارتية له .

ب- عيّن إحداثيات D و E نقطتي تقاطع المستوي $\left(P'\right)$ مع المستقيمين $\left(\Delta\right)$ و $\left(\Delta'\right)$ على الترتيب .

جـ- أحسب حجم رباعي الوجوه $BCDE$.

التمرين الثاني (4ن)

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ بـ : $f\left(x\right)=\dfrac{5x}{x+2}$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$.

ب- أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[0;+\infty\right[$: $f\left(x\right)\geq 0$.

II) المتتالية $\left(u_n\right)$ معرّفة بـ : $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{u_n+2}$

1) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\leq u_n\leq 3$

ب- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية $\left(u_n\right)$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2) $\left(v_n\right)$ المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$.

أ- بيّن أن $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$ يطلب تعيين حدها الأول .

ب- أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n .

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+....+\dfrac{1}{u_n}$.

التمرين الثالث(4,5ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ- أكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

ب- بيّن أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحول النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة .

3) أ- عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثم حدد بدقة طبيعته .

ب- عيّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق : $\left|z-z_A\right|=\left|\overline{z}-z_B\right|$.

جـ- عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغيّر على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $A\in(\Gamma)$

التمرين الرابع(7ن)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+\left(x^2+x-1\right)e^{-x}$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) أ- بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-x+\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=-g(x)$.

جـ- شكّل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ $f(\alpha)\approx 0.38$)

د- عيّن دون حساب : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

2) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

جـ- بيّن أن المنحنى يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثييهما .

د- أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.

هـ- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(m-x)e^x+\left(x^2+3x+2\right)=0$ على المجال $[-2;+\infty[$

III) h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

2) أ- أحسب التكامل التالي : $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx$ ، حيث λ عدد حقيقي موجب تماما و فسر النتيجة هندسيا .

ب- أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

حل مقترح التمرين الأول

المستويان (P) و (P') معادلتاهما على الترتيب : $2x+y-z+1=0$ و $x-2y+z-2=0$.

1) تبيان أن المستويين (P) و (P') متقاطعان :

لدينا : $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n'}(1;-2;1)$ شعاع ناظمي لـ (P') .

لدينا : $\frac{1}{-2}\neq\frac{2}{1}$ و منه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ ليسا مرتبطين خطيا و بالتالي المستويان (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم .

2) تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $d(M,(P))=d(M,(P'))$.

$d(M,(P))=d(M,(P'))$ معناه $\frac{|x-2y+z-2|}{\sqrt{6}}=\frac{|2x+y-z+1|}{\sqrt{6}}$ أي

$|2x+y-z+1|=|x-2y+z-2|$

أي : $\begin{cases}2x+y-z+1=x-2y+z-2\\2x+y-z+1=-(x-2y+z-2)\end{cases}$ أو أي : $\begin{cases}x+3y-2z+3=0\\3x-y-1=0\end{cases}$ أو

و منه مجموعة النقط (Γ) هي إتحاد مستويين معادلتيهما : $x+3y-2z+3=0$ و $3x-y-1=0$.

3) التحقق أن النقطة $A(1;2;0)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ) :

لدينا : $\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{|2x_A+y_A-z_A+1|}{\sqrt{6}}=d(A,(P))$ و $\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{|x_A-2y_A+z_A-2|}{\sqrt{6}}=d(A,(P))$ و منه $A\in(\Gamma)$.

4) H و H' المسقطان العموديان للنقطة A على المستويين (P) و (P') على الترتيب .

أ ـ إيجاد تمثيل وسيطي لكل من المستقيمين (AH) و (AH') .

لدينا $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع توجيه لـ (AH) و $A\in(AH)$ ومنه تمثيل وسيطي لـ (AH) من الشكل : $\begin{cases}x=2t+1\\y=t+2\quad(t\in\mathbb{R})\\z=-t\end{cases}$

و $\vec{n'}(1;-2;1)$ شعاع توجيه لـ (AH') و $A\in(AH')$ و منه تمثيل وسيطي لـ (AH') من الشكل :

$\begin{cases}x=t'+1\\y=-2t'+2\quad(t'\in\mathbb{R})\\z=t'\end{cases}$.

بـ ـ استنتاج إحداثيات كل من النقطتين H و H' :

النقطة H هي نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (AH) .

لدينا $\begin{cases}x=2t+1\\y=t+2\\z=-t\\2x+y-z+1=0\end{cases}$ يكافئ $2(2t+1)+(t+2)-(-t)+1=0$ أي $t=-\frac{5}{6}$.

و بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (AH) نجد $(-\frac{2}{3};\frac{7}{6};\frac{5}{6})$ و هي إحداثيات النقطة H .

النقطة H' هي نقطة تقاطع المستوي (P') و المستقيم (AH') .

لدينا $\begin{cases} x = t'+1 \\ y = -2t'+2 \\ z = t' \\ x-2y+z-2=0 \end{cases}$ يكافئ $t'+1-2-2t'+2+t'-2=0$ أي $t'=\frac{5}{6}$.

و بتعويض قيمة t' في التمثيل الوسيطي لـ (AH') نجد $(\frac{11}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6})$ و هي إحداثيات النقطة H' .

جـ- تعيين إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[HH']$:

لدينا : $I\left(\frac{x_H+x_{H'}}{2};\frac{y_H+y_{H'}}{2};\frac{z_H+z_{H'}}{2}\right)$ و منه $I\left(\frac{7}{12};\frac{3}{4};\frac{5}{6}\right)$

حساب مساحة المثلث AHH' :

لدينا : $AH=AH'$ و بالتالي المثلث AHH' متساوي الساقين و منه $S_{AHH'}=\frac{1}{2}HH'\times AI$.

و لدينا: $\overrightarrow{HH'}\left(\frac{15}{6};-\frac{5}{6};0\right)$ أي $HH'=\frac{5\sqrt{10}}{6}$ ، و $\overrightarrow{AI}\left(-\frac{5}{12};-\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right)$ أي $AI=\frac{5\sqrt{14}}{12}$

و منه $S_{AHH'}=\frac{25}{72}\sqrt{35}(u\,a)$.

حل مقترح التمرين الثاني

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{2x+8}$.

1) أ- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+8}=+\infty$.

بـ- دراسة إتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+8}}=\frac{1}{\sqrt{2x+8}}$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\sqrt{8}$ $\nearrow$ $+\infty$

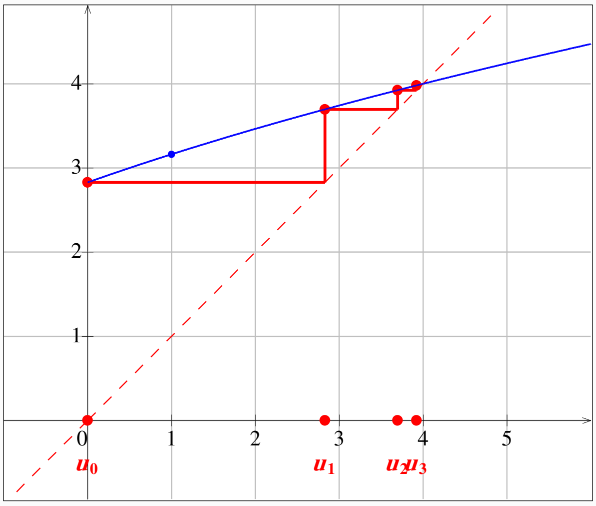
2) تعيين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي : $y=x$ معادلة له.

نحل في المجال $[0;+\infty[$ المعادلة: $f(x)=x$.

$f(x)=x$ تكافئ $\sqrt{2x+8}=x$ تكافئ $\begin{cases} x\geq 0 \\ 2x+8=x^2 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x\geq 0 \\ (x+2)(x-8)=0 \end{cases}$

و منه $x=4$. إذن نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) هي: $A(4;4)$.

3) الرسم:



II) المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0=0$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) الرسم : أنظر الشكل .

2) التخمين : المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو العدد 4 .

3) أ ـ البرهان بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n<4$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<4$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=0$ و منه $0\le u_0<4$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0\le u_n<4$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0\le u_{n+1}<4$.

لدينا حسب الفرض $0\le u_n<4$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما فإن $f(0)\le f(u_n)<f(4)$

أي $0\le 2\sqrt{2}\le u_{n+1}<4$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n<4$.

ب ـ دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+8}-u_n=\frac{\left(\sqrt{2u_n+8}-u_n\right)\left(\sqrt{2u_n+8}+u_n\right)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}=\frac{2u_n+8-u_n^{\,2}}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}=\frac{(4-u_n)(2+u_n)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}$$

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_n>0$ و $2+u_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

جـ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$4-u_{n+1}=4-\sqrt{2u_n+8}==\frac{\left(4-\sqrt{2u_n+8}\right)\left(4+\sqrt{2u_n+8}\right)}{4+\sqrt{2u_n+8}}=\frac{8-2u_n}{4+\sqrt{2u_n+8}}=\frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}} .$$

و من جهة أخرى : $0\le u_n<4$ يكافئ $\frac{1}{4+\sqrt{2u_n+8}}\le\frac{1}{4}$ و منه $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$ و هذا يعني :

$$\begin{cases} 4-u_1 \le \frac{1}{2}(4-u_0) \\ 4-u_2 \le \frac{1}{2}(4-u_1) \\ 4-u_3 \le \frac{1}{2}(4-u_2) \\ .... \\ .... \\ 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n) \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف نجد $(4-u_1)(4-u_2)...(4-u_n) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (4-u_0)(4-u_1)...(4-u_{n-1})$

و منه : من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n \le \frac{1}{2^n}(4-u_0)$. (يمكن إستخدام البرهان بالتراجع)

د ـ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $4-u_n \le \frac{1}{2^n}(4-u_0)$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}(4-u_n) = 0$

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

حل مقترح التمرين الثالث

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z'=z$:

$z'=z$ تكافئ $\frac{z-2}{z-1}=z$ تكافئ $z-2=z(z-1)$ تكافئ z^2-2z+2 ، حيث $(z\neq 1)$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة z^2-2z+2:

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times2=-4=4i^2=(2i)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\frac{2-2i}{2}=1-i$ و $z_2=\frac{2+2i}{2}=1+i$.

2) لدينا : $z_1=1-i$ ، $z_2=\overline{z_1}$.

أ ـ كتابة $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي :

لدينا : $\frac{(1+i)^2}{2}=i$ $\frac{z_2}{z_1}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=$ و منه $\frac{z_2}{z_1}=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

بـ ـ تبيان أن النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، مع تعيين زاوية له .

لدينا : $\frac{z_2}{z_1}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $z_2-z_O=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_1-z_O)$ و منه النقطة B صورة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O

و زاوية له $\frac{\pi}{2}$.

3) نضع : $z'\neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب .

تعيين (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب :

لدينا : $\arg(z')=\arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right)=\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_D}\right)$ $(z'\neq 0)$

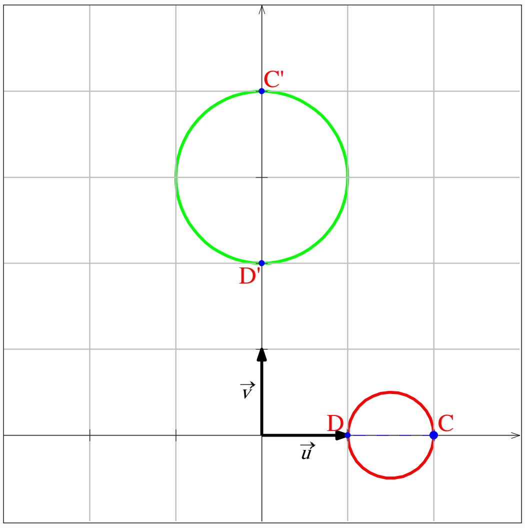
M' تنتمي إلى حامل محور التراتيب معناه : $\arg(z')=\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$ أي : $\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_D}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$

أي : $\left(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{CM}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$

(إذا كان $z'=0$ فإن $z=2$ و هذا يعني أن M منطبقة على C)

إذن المجموعة (Γ) هي الدائرة التي قطرها $[CD]$ باستثناء النقطة D .

إنشاء (Γ) :



4) أ ـ تعيين طبيعة التحويل النقطي $S=h\circ R$ و عناصره المميزة :

لدينا : h التحاكي الذي مركزه المبدأ O و نسبته 2 و R الدوران الذي مركزه المبدأ O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و منه S هو التشابه الذي مركزه O و نسبته 2 و زاوية له $\frac{\pi}{2}$.

ب ـ كتابة العبارة المركبة للتحويل S :

$z'-z_O=2e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_O)$ و منه $z'=2iz$.

جـ ـ تعيين المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S :

المجموعة (Γ') هي الدائرة التي قطرها $[C'D']$ باستثناء النقطة D' ، بحيث : $S(D)=D'$ و $S(C)=C'$.

و $z_{C'}=2iz_C=2\times2i=4i$ ، $z_{D'}=2iz_D=2i$.

الإنشاء : أنظر الشكل .

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x^2-1$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ و متزايدة على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

2) $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$.

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0;+\infty[$ هي $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و بالتالي من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{\ln x}{x}+x-1\right)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+x-1\right)=+\infty$ ، لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

2) أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+1=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$.

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ ، إذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب ـ جدول تغيرات الدالة f:

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1 :

لدينا: $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T): y=2x-2$.

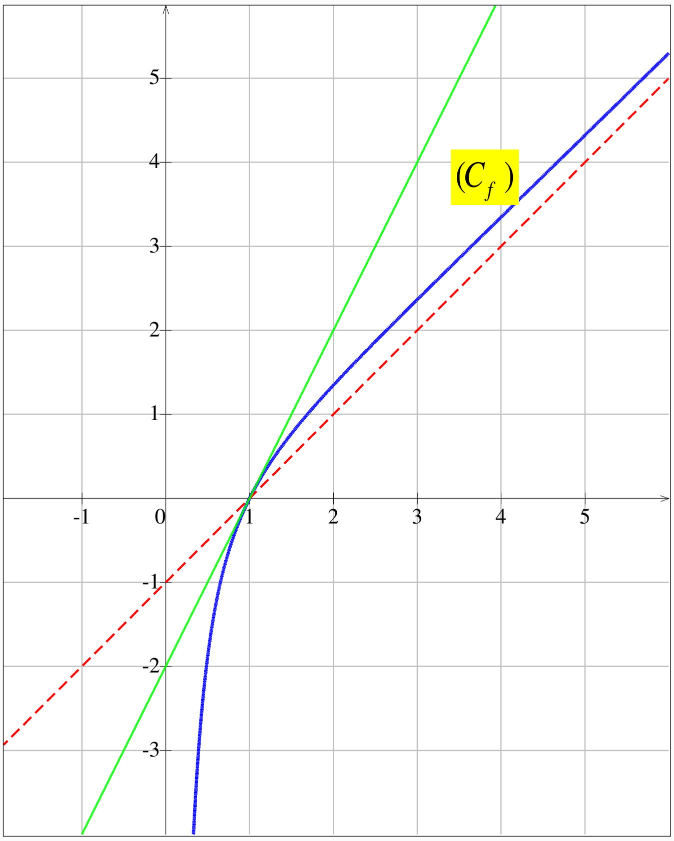
4) أ ـ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و منه المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائل (Δ) حيث: $y=x-1$ معادلة له.

ب ـ دراسة الوضع النسبي لـ (C) و (Δ):

لدينا $f(x)-y=\frac{\ln x}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$	(C_f) فوق (Δ)	

5) الرسم :



6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث: $y = mx - m$ معادلة له.

أ ـ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m).

لدينا $y_A = mx_A - m$ أي $0 = m - m$ و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي m، $A \in (\Delta_m)$

ب ـ المناقشة البيانية:

لدينا: (Δ_m) معامل توجيهه m و يشمل النقطة $A(1;0)$.

إذا كان $m \in]-\infty;1]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا.

إذا كان $m \in]1;2[$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m = 2$ فإن المعادلة تقبل حل (مضاعف) و هو 1.

إذا كان $m \in]2;+\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين.

7) أ ـ إيجاد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على $]0;+\infty[$ من الشكل: $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$. (لاحظ أن $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ من الشكل $u' \times u$

ب ـ حساب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي $(n > 1)$.

$$I_n = \int_1^n [f(x) - (x-1)]dx = \int_1^n \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^n = \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

جـ ـ تعيين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن: $I_n > 2$.

$I_n > 2$ معناه $(\ln n)^2 > 4$ أي $\ln n > 2$ أو $\ln n < -2$ (مرفوض) و منه $n > e^2$ و عليه: أصغر قيمة لـ n_0 هي $n_0 = 8$.

حل مقترح التمرين الأول

A و B نقطتان من الفضاء بحيث: $A(5;-1;-2)$ و $B(3;12;-7)$.

(Δ) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $(k \in \mathbb{R})$ ، $\begin{cases} x = 1+3k \\ y = 1+2k \\ z = 4k \end{cases}$

1) أ- تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ') الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(-2;1;1)$ شعاع توجيه له من الشكل:

$$\begin{cases} x = -2t+5 \\ y = t-1 \\ z = t-2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب- تبيان أن المستقيمين (Δ) و (Δ') متعامدان:

لدينا: $\vec{v}(3;2;4)$ شعاع توجيه لـ (Δ) و $\vec{u}(-2;1;1)$ شعاع توجيه لـ (Δ') و $\vec{u}.\vec{v} = -2\times3+2+4=0$ ومنه $(\Delta)\perp(\Delta')$.

تبيان أن $C(1;1;0)$ هي نقطة تقاطع (Δ) و (Δ'):

يكفي إثبات أن $C \in (\Delta)$ و $C \in (\Delta')$.

لأن $C \in (\Delta)$: $\begin{cases} 1 = 1+3k \\ 1 = 1+2k \\ 0 = 4k \end{cases}$ أي $k=0$ (قيمة ثابتة و وحيدة لـ k).

لأن $C \in (\Delta')$: $\begin{cases} 1 = -2t+5 \\ 1 = t-1 \\ 0 = t-2 \end{cases}$ أي $t=2$ (قيمة ثابتة و وحيدة لـ t).

2) (P) المستوي المعيّن بالمستقيمين (Δ) و (Δ').

أ- تبيان أن الشعاع $\vec{n}(2;11;-7)$ ناظمي للمستوي (P):

يكفي إثبات أن $\vec{n}\perp\vec{u}$ و $\vec{n}\perp\vec{v}$.

لدينا: $\vec{n}.\vec{u} = 2\times(-2)+11-7=0$ ومنه $\vec{n}\perp\vec{u}$ ، و $\vec{n}.\vec{v} = 2\times3+11\times2-7\times4=0$ ومنه $\vec{n}\perp\vec{v}$.

- إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (P).

(P) يشمل النقطة C و $\vec{n}(2;11;-7)$ شعاع ناظمي له ومنه لـ (P) معادلة من الشكل: $2x+11y-7z+13=0$.

ب- تبيان أن النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P):

يكفي إثبات أن $\vec{n}$ و $\overrightarrow{CB}$ مرتبطان خطيا.

لدينا: $\overrightarrow{CB}(2;11;-7)$ و منه $\overrightarrow{CB}=\vec{n}$.

(يمكن كذلك إثبات أن $CB = d(B;(P))$)

3) α و β عددان حقيقيان و (P') مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المعرفة بـ: $\begin{cases} x = 3-\beta \\ y = 12+12\alpha+9\beta \\ z = -7-6\alpha-11\beta \end{cases}$.

أ- إثبات أن المجموعة (P') هي مستو:

المجموعة (P') معرفة بالثلاثية $(B;\vec{w};\vec{k})$ بحيث $B(3;12;-7)$ ، $\vec{w}(0;12;-6)$ و $\vec{k}(-1;9;-11)$ ولكون $\vec{w}$ و $\vec{k}$ غير

مرتبطين خطيا فإن (P') هي مستو .

التحقق أن $13x-y-2z-41=0$ هي معادلة ديكارتية لـ (P') :

يكفي إثبات أن $\vec{n'}\perp\vec{w}$ و $\vec{n'}\perp\vec{k}$ بحيث $\vec{n'}(13;-1;-2)$ شعاع ناظمي لـ (P').

لدينا : $\vec{n'}.\vec{w}=-1\times12+(-6)\times(-2)=0$ ومنه $\vec{n'}\perp\vec{w}$ ، و $\vec{n'}.\vec{k}=13\times(-1)-1\times9-2\times(-11)=0$ ومنه $\vec{n'}\perp\vec{k}$.

بـ- تعيين إحداثيات D و E نقطتي تقاطع المستوي (P') مع المستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب :

لدينا $\begin{cases}x=1+3k\\y=1+2k\\z=4k\\13x-y-2z-41=0\end{cases}$ يكافئ $13(1+3k)-(1+2k)-2(4k)-41=0$ أي $k=1$.

وبتعويض قيمة k في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $(4;3;4)$ وهي إحداثيات النقطة D.

لدينا $\begin{cases}x=-2t+5\\y=t-1\\z=t-2\\13x-y-2z-41=0\end{cases}$ يكافئ $13(-2t+5)-(t-1)-2(t-2)-41=0$ أي $t=1$.

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ') نجد $(3;0;-1)$ وهي إحداثيات النقطة E .

جـ- حساب حجم رباعي الوجوه $BCDE$:

المثلث CDE قائم في C ومنه $S_{CDE}=\frac{1}{2}\times CD\times CE$ إذن $V_{BCDE}=\frac{1}{3}S_{CDE}\times CB=\frac{1}{6}\times CB\times CD\times CE$.

لدينا : $\overrightarrow{CB}(2;11;-7)$ ومنه $CB=\sqrt{174}$ ، و $\overrightarrow{CD}(3;2;4)$ ومنه $CD=\sqrt{29}$ ، و $\overrightarrow{CE}(2;-1;-1)$ ومنه $CD=\sqrt{6}$.

إذن : $V_{BCDE}=\frac{1}{6}\times CB\times CD\times CE=29$

حل مقترح التمرين الثاني

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{5x}{x+2}$.

1) أ- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{x+2}\right)=5$.

بـ- دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{5(x+2)-5x}{(x+2)^2}=\frac{10}{(x+2)^2}$

ولدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ 5

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 0$.

من جدول التغيرات : من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$: $0\leq f(x)\leq 5$ أي : $f(x)\geq 0$.

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0=1$، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{u_n+2}$

1) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 3$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 3$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=1$ و منه $1\le u_0\le 3$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $1\le u_n\le 3$، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1\le u_{n+1}\le 3$.

لدينا حسب الفرض $1\le u_n\le 3$ و بما أن الدالة متزايدة تماما فإن $f(1)\le f(u_n)\le f(3)$ أي $1\le \dfrac{5}{3}\le u_{n+1}\le 3$

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 3$.

ب- دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n}{u_n+2}-u_n=\frac{5u_n-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^{\,2}+3u_n}{u_n+2}=\frac{u_n(3-u_n)}{u_n+2}$$

و بما أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $3-u_n\ge 0$ و $2+u_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n\ge 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة

المتتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 3، إذن فهي متقاربة.

2) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$.

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$:

لدينا: من من أجل كل عدد طبيعي n،

$$v_{n+1}=1-\frac{3}{u_{n+1}}=1-\frac{3}{\dfrac{5u_n}{u_n+2}}=1-\frac{3(u_n+2)}{5u_n}=\frac{5u_n-3u_n-6}{5u_n}=\frac{2u_n-6}{5u_n}=\frac{2(u_n-3)}{5u_n}=\frac{2}{5}\left(1-\frac{3}{u_n}\right)=\frac{2}{5}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0=1-\dfrac{3}{u_0}=-2$.

ب- كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=-2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n :

لدينا: من من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$ و منه $\dfrac{3}{u_n}=1-v_n$ أي $u_n=\dfrac{3}{1-v_n}$ إذن: $u_n=\dfrac{3}{1+2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$.

جـ- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{1+2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}\right)=3$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$.

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+....+\dfrac{1}{u_n}$.

لدينا: من من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$ و منه $\dfrac{3}{u_n}=1-v_n$ أي: $\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{1-v_n}{3}=\dfrac{1}{3}(1-v_n)$.

إذن: $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n}=\frac{1}{3}\left[(1+1+1....+1)-(v_0+v_1+....+v_n)\right]=\frac{1}{3}\left[(n+1)-\left(v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\right]$

أي: $S_n=\frac{1}{3}\left[(n+1)+\frac{10}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)\right]$.

حل مقترح التمرين الثالث

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$ ...... (1)

$\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$ تكافئ: $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ أو $z^2+\sqrt{3}z+1=0$.

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+\sqrt{3}z+1=0$:

لدينا: $\Delta=\left(\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times1=-1=i^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما:

$z_1=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ و $z_2=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي: $S=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$.

2) $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ- كتابة z_A، z_B و z_C على الشكل الأسي:

لدينا: $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و منه: $|z_A|=1$.

و بفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A، يكون: $\begin{cases}\cos\theta_A=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_A=\frac{1}{2}\end{cases}$، و منه $\arg(z_A)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن: $z_A=e^{i\frac{\pi}{6}}$.

لدينا: $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و منه: $|z_B|=1$.

و بفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B، يكون: $\begin{cases}\cos\theta_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_B=\frac{1}{2}\end{cases}$، و منه $\arg(z_B)=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن: $z_B=e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

لدينا: $z_C=\overline{z_B}$ و منه: $z_C=e^{-i\frac{5\pi}{6}}=e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

ب- تبيان أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحول النقطة C إلى النقطة A مع تعيين عناصره المميزة:

لدينا: $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}=\frac{\sqrt{3}}{-i}=i\sqrt{3}$ أي $z_A-z_B=i\sqrt{3}(z_C-z_B)$

و منه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحول النقطة C إلى النقطة A نسبته $\sqrt{3}$ و زاوية له $\theta=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$.

3) أ- تعيين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع :

$ABCD$ متوازي أضلاع معناه: $z_D-z_C=z_A-z_B$ و منه $z_D=z_A-z_B+z_C=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

طبيعة الرباعي $ABCD$:

لدينا : $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=i\sqrt{3}$ يعني : $\begin{cases}\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=\sqrt{3}\\ \arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ و منه $\begin{cases}BA\neq BC\\ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ و بالتالي $ABCD$ مستطيل

.

ب- تعيين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق: $|z-z_A|=|\overline{z}-z_B|$.

$|z-z_A|=|\overline{z}-z_B|$ تكافئ $|z-z_A|=|z-\overline{z_B}|$ تكافئ $|z-z_A|=|z-z_C|$ تكافئ $AM=CM$.

و بالتالي مجموعة النقط (E) هي محور القطعة $[AC]$.

جـ- تعيين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغيّر على $\mathbb{R}$:

$z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ تكافئ $z-z_B=\sqrt{3}e^{i\theta}$ و هذا يعني: $|z-z_B|=|\sqrt{3}e^{i\theta}|$ أي $BM=\sqrt{3}$.

و بالتالي مجموعة النقط (Γ) هي الدائرة التي مركزها B و نصف قطرها $\sqrt{3}$.

التحقق أن $A\in(\Gamma)$:

لدينا : $|z_A-z_B|=\sqrt{3}$ أي $AB=\sqrt{3}$ و بالتالي $A\in(\Gamma)$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$.

1) حساب النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[1+(x^2+x-1)e^{-x}\right]=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[1+(x^2+x-1)e^{-x}\right]=1$.

2) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x)=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x-1)e^{-x}=(-x^2+x+2)e^{-x}=(2-x)(x+1)e^{-x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2-x)(x+1)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $[-1;2]$ و متناقصة على كل من المجالين $[2;+\infty[$ و $]-\infty;-1]$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$1-e$	↗	$1+5e^{-2}$	↘	1

3) أ ـ تبيان أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

لدينا : $g(0)=1+\left(0^2+0-1\right)e^0=1-1=0$

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و $]-1,52;-1,51[\subset]-\infty;-1[$ و $\begin{cases} g(-1,52)\approx 0,041 \\ g(-1,51)\approx -0,040 \end{cases}$

أي $g(-1,52)\times g(-1,51)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;-1[$ حلا وحيدا α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

ب ـ إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-x+\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}$.

1) أ ـ حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}\right]=-\infty$

ب ـ الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$f'(x)=-1+(2x+3)e^{-x}-\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}=-1-\left(x^2+x-1\right)e^{-x}=-g(x)$.

جـ ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

د ـ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=-g(\alpha)=0$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α معامل توجيهه معدوم .

(يوازي حامل محور الفواصل)

2) أ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}=0$ و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-(-x)=\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}=(x+1)(x+2)e^{-x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $(x+1)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(-2;2)$	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

جـ ـ تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف :

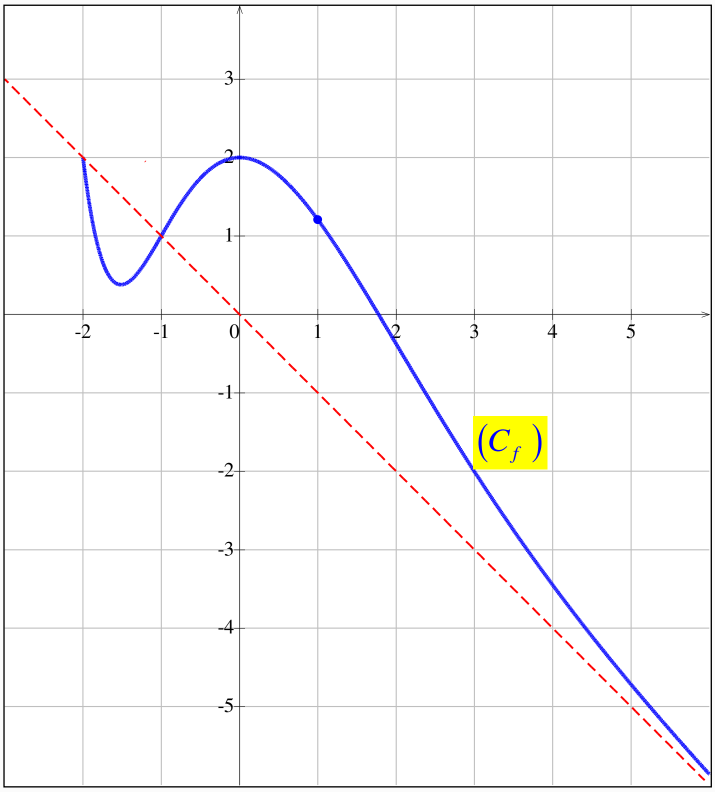
لدينا : الدالة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=-g'(x)=(x-2)(x+1)e^{-x}$.

إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف هما : $A(-1;1)$ و $C\left(2;-2+12e^{-2}\right)$.

د ـ الرسم :



هـ ـ المناقشة البيانية :

المعادلة $(m-x)e^{x}+(x^{2}+3x+2)=0$ تكافئ $f(x)=-m$.

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-m$.

لما $m\in]-f(\alpha);+\infty[$ يكون $-m\in]-\infty;f(\alpha)[$ و المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

لما $m=-f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب و الآخر سالب .

لما $m\in]-2;-f(\alpha)[$ يكون $-m\in]f(\alpha);2[$ و المعادلة تقبل ثلاثة حلول ، إثنان سالبان و الآخر موجب .

لما $m=-2$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب و الآخر معدوم .

III) h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=x+f(x)=(x^{2}+2x+3)e^{-x}$ و $H(x)=(ax^{2}+bx+c)e^{-x}$.

1) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$:

H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ يعني : من أجل كل عدد حقيقي x ، $H'(x)=h(x)$.

الدالة H قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$H'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^{2}+bx+c)e^{-x}=(-ax^{2}+(2a-b)x+b-c)e^{-x}$$

و منه بالمطابقة نجد : $a=-1$ ، $b=-5$ و $c=-7$ أي $H(x)=(-x^{2}-5x-7)e^{-x}$.

2) أ ـ حساب التكامل : $A(\lambda)=\int_{0}^{\lambda}h(x)dx$ ، حيث $\lambda\in\mathbb{R}_{+}^{*}$.

$$A(\lambda)=\int_{0}^{\lambda}h(x)dx=[H(x)]_{0}^{\lambda}=(-\lambda^{2}-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7$$

التفسير الهندسي :

$A(\lambda)$ يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}_{+}^{*}$.

ب ـ $\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[(-\lambda^{2}-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7\right]=7$.

تصحيح مقترح لبكالوريا 2016 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

1) نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=z^3-24\sqrt{3}$

أ- تحقق أن: $P(2\sqrt{3})=0$.

ب- جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-2\sqrt{3})(z^2+az+b)$.

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب:

$z_A=-\sqrt{3}+3i$ ، $z_B=-\sqrt{3}-3i$ و $z_C=2\sqrt{3}$

أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب- بيَن أنه يوجد دوران R مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C، يطلب تعيين زاويته .

جـ- استنتج طبيعة المثلث ABC.

د- عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث : $\arg\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)=2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين الثاني (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;0;2)$ و شعاع توجيه له $\vec{u}(2;1;-1)$ و ليكن (Δ') المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $(\lambda\in\mathbb{R})$ ، $\begin{cases}x=\lambda\\ y=4+\lambda\\ z=2+\lambda\end{cases}$

1) أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

ب- بيَن أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .

2) أ- بين أن النقطة $B(-1;3;1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ') .

ب - تحقق أن المستقيم (AB) عمودي على كل من المستقيمين (Δ) و (Δ') .

جـ- استنتج المسافة بين المستقيمين (Δ) و (Δ') .

3) لتكن N نقطة إحداثياتها $(-2+t;2+t;t)$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(t)=AN^2$.

أ- بيَن أن النقطة N تنتمي إلى المستقيم (Δ') ، ثم أكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t .

ب- استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AN أصغر ما يمكن . ثم قارن بين القيمة الصغرى للدالة h و المسافة AB .

التمرين الثالث (5ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0;4]$ بـ : $f(x)=\dfrac{13x}{9x+13}$.

1) أ- بيَن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

بـ- بيّن أنه من أجل كل من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى المجال I .

2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 4$

بـ- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\neq 0$

4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=2+\frac{13}{u_n}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

بـ- أكتب v_n بدلالة n .

جـ- إستنتج أن : $u_n=\frac{52}{36n+13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الرابع (7ن)

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$. (العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) أدرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $-0{,}34<\alpha<-0{,}33$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x على المجال $]-1;+\infty[$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بيّن أن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=-\infty$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا .

بـ- بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$

جـ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

د- أرسم المنحنى (C_f). (نقبل أن : $f(\alpha)=3{,}16$)

2) أ- . بيّن أن الدالة $x\mapsto\frac{-1}{x+1}[1+\ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$.

بـ- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.

3) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f(-|x|)$ ، (C_k) تمثيلها لبياني في المعلم السابق.

أ- بيّن أن الدالة k زوجية .

بـ- بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أرسمه. (دون دراسة تغيرات الدالة k)

جـ- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $k(x)=m$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (5ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A(2;1;-3)$، $B(0;-1;2)$ و $C(-3;-1;-1)$.

1) أ- بيّن أن النقط A، B و C تعيّن مستويا.

ب- بيّن أن المعادلة: $2x-7y-2z-3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و يعامد المستقيم (BC).

3) أ- جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P).

ب- بيّن أن المستقيم (D) عمود في المثلث ABC.

4) ليكن (Δ) المتوسط المتعلق بالضلع $[AC]$ في المثلث ABC.

أ- بيّن أن الجملة $(k\in\mathbb{R})$، $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k \\ y=k \\ z=-2-4k \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

ب- بيّن أن المستقيمين (Δ) و (D) يتقاطعان في نقطة G يطلب تعيين إحداثياتها.

جـ- بيّن أن المثلث ABC متساوي الساقين.

د- ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث ABC ؟

5) عيّن طبيعة و عناصر المجموعة (E) للنقط M من الفضاء و التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=3$.

التمرين الثاني (4,5ن)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $2\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5=0$ .... (E)

يشير الرمز $\bar{z}$ إلى مرافق العدد المركب z.

1) أ- أثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$.

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب:

$$z_A=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad z_B=\overline{z_A} \quad , \quad z_C=-1 \quad , \quad z_D=-\frac{5}{2}$$

أ- أكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي.

ب- أنشئ النقط A، B، C و D.

جـ- أثبت أن: $z_B-z_C=z_B(z_A-z_C)$.

د- إستنتج طبيعة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و لتكن F صورة A بالتحويل S.

أنشئ النقطة F ثم حدد طبيعة المثلث AFC.

4) عيّن طبيعة المجموعة (γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z+1=kz_B$. لما يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

التمرين الثالث(4,5ن)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2) أ- عبّر بدلالة n عن الحد العام v_n .

ب- استنتج عبارة الحد u_n العام بدلالة n .

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أ- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+....+v_n$.

ب- تحقق أن : $\frac{1}{3}(1-v_n)=\dfrac{1}{u_n+2}$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n .

جـ- أحسب بدلالة n المجموع : $S'_n=\dfrac{1}{u_0+2}+\dfrac{1}{u_1+2}+....+\dfrac{1}{u_n+2}$.

التمرين الرابع(6ن)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2e^x-x^2-x$.

1) أ- أحسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب - بيّن أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$

جـ- أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\dfrac{xe^x g(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$ (حيث f' هي مشتق الدالة f) .

جـ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) أ- بيّن أن : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا .

جـ- أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha)\approx 0,29$)

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

1) نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=z^3-24\sqrt{3}$

أ- التحقق : $P(2\sqrt{3})=(2\sqrt{3})^3-24\sqrt{3}=24\sqrt{3}-24\sqrt{3}=0$.

ب- إيجاد العددين a و b :

$$P(z)=(z-2\sqrt{3})(z^2+az+b)=z^3+(a-2\sqrt{3})z^2+(b-2\sqrt{3}a)z-2\sqrt{3}b.$$

و بالمطابقة نجد: $a=2\sqrt{3}$ ، $b=12$.

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

$P(z)=0$ تكافئ $(z-2\sqrt{3})(z^2+2\sqrt{3}z+12)=0$ تكافئ $z=2\sqrt{3}$ أو $z^2+2\sqrt{3}z+12=0$.

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2+2\sqrt{3}z+12=0$

لدينا: $\Delta=(2\sqrt{3})^2-4\times1\times12=-36=36i^2=(6i)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_1=\frac{-2\sqrt{3}-6i}{2}=-\sqrt{3}-3i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{-2\sqrt{3}+6i}{2}=-\sqrt{3}+3i.$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $S=\{2\sqrt{3};-\sqrt{3}-3i;-\sqrt{3}+3i\}$.

2) $z_A=-\sqrt{3}+3i$ ، $z_B=-\sqrt{3}-3i$ و $z_C=2\sqrt{3}$

أ- كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2\sqrt{3}-(-\sqrt{3}+3i)}{-\sqrt{3}-3i-(-\sqrt{3}+3i)}=\frac{3\sqrt{3}-3i}{-6i}=\frac{3\sqrt{3}i+3}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ب- تبيان أنه يوجد دوران R مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C :

لدينا : $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و منه $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ أي $z_C-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)$ و بالتالي النقطة C هي صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

جـ- استنتاج طبيعة المثلث ABC:

لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ يعني : $\begin{cases}\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}\end{cases}$ و منه $\begin{cases}AC=AB\\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}\end{cases}$ و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع

د- تعيين z_D :

z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ معناه : $z_D=z_C+z_{\overrightarrow{AB}}$

أي : $z_D=z_C+z_B-z_A=2\sqrt{3}-6i$.

- طبيعة الرباعي $ABDC$:

لدينا $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ لأن النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ و بما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن الرباعي $ABDC$ معيّن.

3) تعيين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث : $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

$\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=2k\pi$ تكافئ $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)=2k\pi$ (M' نظيرة M بالنسبة لحامل محور الفواصل)

و منه المجموعة (Γ) هي حامل محور الفواصل باستثناء النقطة O.

حل مقترح التمرين الثاني

(Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;0;2)$ و شعاع توجيه $\vec{u}(2;1;-1)$

و (Δ') المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي : $(\lambda\in\mathbb{R})$ ، $\begin{cases}x=\lambda\\ y=4+\lambda\\ z=2+\lambda\end{cases}$

1) أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ):

(Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;0;2)$ و $\vec{u}(2;1;-1)$ شعاع توجيه و منه تمثيل وسيطي لـ (Δ) من الشكل :

$$\begin{cases}x=2t+1\\ y=t\\ z=-t+2\end{cases}\qquad (t\in\mathbb{R})$$

ب- تبيان أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي :

لنثبت أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا متوازيين و ليسا متقاطعين.

لندرس التوازي :

لدينا $\vec{v}(1;1;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ') و $\vec{u}(2;1;-1)$ شعاع توجيه لـ (Δ) و منه $\vec{v}$ و $\vec{u}$ ليسا مرتبطين خطيا

لأن $y_{\vec{u}}=y_{\vec{v}}$ و $x_{\vec{u}}\neq x_{\vec{v}}$ و بالتالي المستقيمان (Δ) و (Δ') ليسا متوازيين.

لندرس التقاطع :

$\begin{cases}2t+1=\lambda\\ t=4+\lambda\\ -t+2=2+\lambda\end{cases}$ معناه $\begin{cases}t=-5\\ \lambda=-9\\ 7\neq-7\end{cases}$ ، الجملة لا تقبل حل و بالتالي المستقيمان (Δ) و (Δ') ليسا متقاطعين.

2) أ- تبيان أن النقطة $B(-1;3;1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ'):

يكفي إثبات أن $B\in(\Delta')$ و $\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}$.

من أجل $\lambda=-1$ نجد $\begin{cases}x=-1\\ y=3\\ z=1\end{cases}$ و منه $B\in(\Delta')$.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;3;-1)$ و $\vec{v}(1;1;1)$ و منه $\overrightarrow{AB}.\vec{v}=-2\times1+3\times1-1\times1=0$ إذن $\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}$.

ب- التحقق أن المستقيم (AB) عمودي على كل من المستقيمين (Δ) و (Δ') :

لدينا : $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{v}=-2\times1+3\times1-1\times1=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}=-2\times2+3\times1-1\times(-1)=0\end{cases}$ و منه $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}\\ \overrightarrow{AB}\perp\vec{u}\end{cases}$ إذن : $(AB)\perp(\Delta')$ و $(AB)\perp(\Delta)$.

جـ- استنتاج المسافة بين المستقيمين (Δ) و (Δ') :

لدينا : $B\in(\Delta')$ و $A\in(\Delta)$ و (AB) عمودي على كل من (Δ) و (Δ') و منه : $d((\Delta),(\Delta'))=AB=\sqrt{14}$.

3) N نقطة إحداثياتها $(-2+t;2+t;t)$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(t)=AN^2$.

أ- تبيان أن النقطة N تنتمي إلى المستقيم (Δ') :

بوضع $\lambda = -2 + t$ نجد : $\begin{cases} x = \lambda = -2+t \\ y = 4+\lambda = 4-2+t = 2+t \\ z = 2+\lambda = 2-2+t = t \end{cases}$ و منه $N \in (\Delta')$.

• كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة t :

$$h(t) = AN^2 = (t-3)^2 + (t+2)^2 + (t-2)^2 = 3t^2 - 6t + 17$$

بـ- استنتاج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AN أصغر ما يمكن :

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي t ، $h'(t) = 6t - 6$

جدول تغيّرات الدالة h :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	14	$\nearrow$	

تكون المسافة AN أصغر ما يمكن من أجل $t = 1$ و $AN = \sqrt{h(1)} = \sqrt{14}$.

المقارنة بين القيمة الصغرى للدالة h و المسافة AB :

القيمة الحدية الصغرى للدالة h تساوي AB^2 ، أو $AB = \sqrt{h(1)} = \sqrt{14}$.

حل مقترح التمرين الثالث

f الدالة المعرفة على المجال $I = [0;4]$ بـ : $f(x) = \dfrac{13x}{9x+13}$.

1) أ- تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;4]$ و $f'(x) = \dfrac{13(9x+13) - 9\times 13x}{(9x+13)^2} = \dfrac{169}{(9x+13)^2}$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;4]$ ، $f'(x) > 0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$.

بـ- تبيان أنه من أجل كل من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى المجال I :

لدينا : الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$ و منه من أجل كل $x \in [0;4]$ ، $f(x) \in [f(0); f(4)]$

أي : $f(x) \in \left[0; \dfrac{52}{49}\right]$ و لدينا $\left[0; \dfrac{52}{49}\right] \subset [0;4]$ إذن : من أجل كل $x \in [0;4]$ ، $f(x) \in [0;4]$

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 4$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 4$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 4$ و منه $0 \le u_0 \le 4$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0 \le u_n \le 4$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 \le u_{n+1} \le 4$.

لدينا حسب الفرض $0 \le u_n \le 4$ و منه $0 \le f(u_n) \le 4$ (حسب نتيجة السؤال 1 بـ) أي $0 \le u_{n+1} \le 4$

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le 4$.

بـ- دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=\frac{13u_n}{9u_n+13}-u_n=\frac{13u_n-u_n(9u_n+13)}{9u_n+13}=\frac{-9u_n^{2}}{9u_n+13}$$

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $-9u_n^{2}\leq 0$ فإن $u_{n+1}-u_n\leq 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

▪ المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد 0 ، إذن فهي متقاربة.

3) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\neq 0$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\neq 0$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=4$ و منه $u_0\neq 0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n\neq 0$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}\neq 0$.

لدينا حسب الفرض $u_n\neq 0$ و منه $f(u_n)\neq 0$ (لأن الدالة f متزايدة تماما على I و $f(0)=0$) أي $u_{n+1}\neq 0$

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\neq 0$.

4) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=2+\dfrac{13}{u_n}$

أ- تبيان أن المتتالية (v_n) حسابية:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=2+\frac{13}{u_{n+1}}=2+\frac{13}{\dfrac{13u_n}{9u_n+13}}=2+\frac{13(9u_n+13)}{13u_n}=2+\frac{9u_n+13}{u_n}=2+9+\frac{13}{u_n}=9+v_n$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=9$ و حدها الأول $v_0=2+\dfrac{13}{u_0}=\dfrac{21}{4}$.

ب- كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0+nr$ و منه $v_n=\dfrac{21}{4}+9n=\dfrac{21+36n}{4}$.

جـ- إستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\dfrac{52}{36n+13}$:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=2+\dfrac{13}{u_n}$ و منه $\dfrac{13}{u_n}=v_n-2$ أي $u_n=\dfrac{13}{v_n-2}$

إذن $u_n=\dfrac{13}{v_n-2}=\dfrac{13}{\dfrac{21+36n}{4}-2}=\dfrac{13}{\dfrac{21+36n-8}{4}}=\dfrac{13\times 4}{13+36n}=\dfrac{52}{36n+13}$.

▪ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{52}{36n+13}\right)=0$$

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-1+(x+1)e+2\ln(x+1)\right]=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ >}}g(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\ >}}\left[-1+(x+1)e+2\ln(x+1)\right]=-\infty$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $g'(x)=e+\dfrac{2}{x+1}$

من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g'(x)>0$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2) تبيان أنه للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34<\alpha<-0,33$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(-0,34)\approx -0,03 \\ g(-0,33)\approx 0,02\end{cases}$ أي $g(-0,34)\times g(-0,33)<0$ و منه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0,34<\alpha<-0,33$.

3) إشارة $g(x)$:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

1) أ- تبيان أن $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}}\left[\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}}\left(\dfrac{e}{x+1}\right)=0 \\ \lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}}\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}}\left[\dfrac{1}{(x+1)^2}\times\ln(x+1)\right]=-\infty\end{cases}$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left[e+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (حامل محور الفواصل) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=-\frac{e}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)^2-2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-e(x+1)+1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3}=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

جـ- دراسة إتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$:

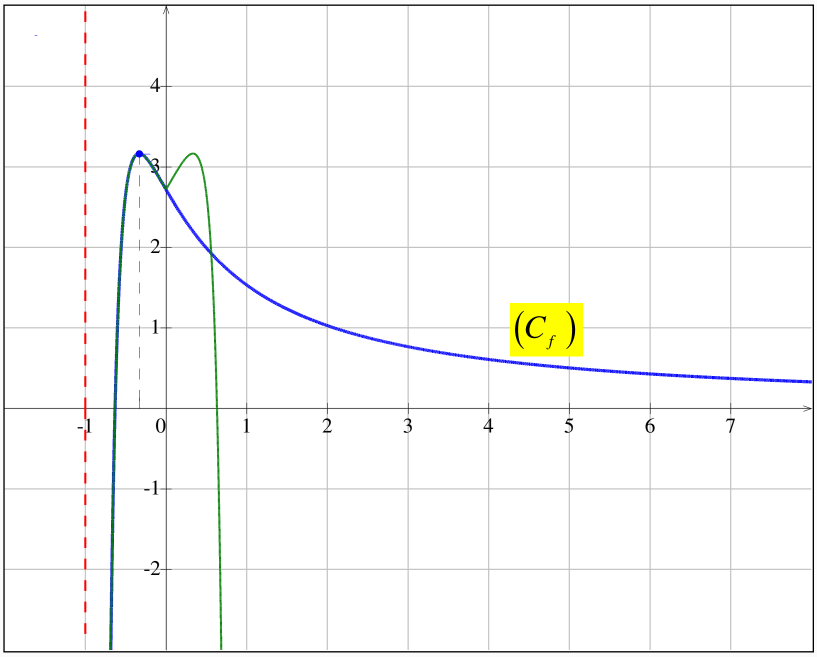
x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-1;\alpha]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

د ـ الرسم :



2) أ ـ. تبيان أن الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$

نضع: $h(x)=\frac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ ، الدالة h قابلة للإشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\left[1+\ln(x+1)\right]+\left(\frac{1}{x+1}\right)\times\left(\frac{-1}{x+1}\right)=\frac{1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

بـ ـ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بمحور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$:

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]dx=\left[e\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]\right]_0^1=\frac{1+(2e-1)\ln 2}{2}$$

3) k الدالة العددية المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f(-|x|)$

أ ـ تبيان أن الدالة k زوجية :

المجال $]-1;1[$ متناظر بالنسبة للصفر و من أجل كل $x\in]-1;1[$: $k(-x)=f(-|-x|)=f(-|x|)=k(x)$.

و بالتالي الدالة k زوجية.

بـ ـ شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f):

لدينا : $k(x)=f(-|x|)=\begin{cases} f(x);x\in]-1;0] \\ f(-x);x\in[0;1[\end{cases}$

إذن : من أجل $x\in]-1;0]$ ، (C_k) ينطبق على (C_f) و نتم الرسم باستخدام التناظر بالنسبة لحامل محور االتراتيب لكون k زوجية.

الرسم : أنظر الشكل.

جـ ـ المناقشة البيانية :

حلول المعادلة $k(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_k) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$.

إذا كان $m>f(\alpha)$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا .

إذا كان $m=f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين (مضاعفين) مختلفين في الإشارة .

إذا كان $e<m<f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل 4 حلول ، حلان سالبان و حلان موجبان .

إذا كان $m=e$ فإن المعادلة تقبل 3 حلول ، حل سالب و آخر موجب و الثالث معدوم .

إذا كان $m<e$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث : $A(2;1;-3)$ ، $B(0;-1;2)$ و $C(-3;-1;-1)$.

1) أ ـ تبيان أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا .

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2;-2;5)$ و $\overrightarrow{AC}(-5;-2;2)$.

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا لأن $y_{\overrightarrow{AB}}=y_{\overrightarrow{AC}}$ لكن $x_{\overrightarrow{AB}}\neq x_{\overrightarrow{AC}}$ و منه النقط A ، B و C ليست في استقامية و بالتالي فهي تعيّن مستويا .

ب ـ تبيان أن المعادلة : $2x-7y-2z-3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة.

$A\in(ABC)$ لأن $2x_A-7y_A-2z_A-3=2\times2-7\times1-2\times(-3)-3=0$

$B\in(ABC)$ لأن $2x_B-7y_B-2z_B-3=2\times0-7\times(-1)-2\times2-3=0$

$C\in(ABC)$ لأن $2x_C-7y_C-2z_C-3=2\times(-3)-7\times(-1)-2\times(-1)-3=0$

2) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و يعامد المستقيم (BC) :

المستوي (P) يشمل النقطة A و $\overrightarrow{BC}(-3;0;-3)$ شعاع ناظمي له و منه معادلة لـ (P) من الشكل : $-3x-3z+d=0$

و بما أن $A\in(P)$ فإن : $-3x_A-3z_A+d=0$ و منه $d=-3$ و بالتالي $-3x-3z-3=0$ هي معادلة للمستوي (P) .

3) أ ـ كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P) :

المستقيم (D) معرف بالجملة : $\begin{cases}2x-7y-2z-3=0\\-3x-3z-3=0\end{cases}$ و منه بوضع $z=t$ نجد : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=-t-1\\y=-\frac{4}{7}t-\frac{5}{7}\\z=t\end{cases}$

ب ـ تبيان أن المستقيم (D) عمود في المثلث ABC :

لدينا $A\in(D)$ لأن $A\in(P)\cap(ABC)$ و لدينا $\vec{u}(-1;-\frac{4}{7};1)$ شعاع توجيه للمستقيم (D) .

و بما أن $\vec{u}.\overrightarrow{BC}=-1\times(-3)+0\times\left(-\frac{4}{7}\right)+1\times(-3)=0$ فإن $(D)\perp(BC)$ و بالتالي (D) عمود في المثلث ABC .

4) (Δ) المتوسط المتعلق بالضلع $[AC]$ في المثلث ABC.

أ- تبيان أن الجملة $(k \in \mathbb{R})$ ، $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k \\ y=k \\ z=-2-4k \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

(Δ) هو المستقيم الذي يشمل النقطة B و النقطة $I\left(-\frac{1}{2};0;-2\right)$ منتصف الضلع $[AC]$، و منه $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{2};1;-4\right)$ شعاع توجيه لـ (Δ) و بالتالي تمثيل وسيطي لـ (Δ) من الشكل: $(k \in \mathbb{R})$ ، $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k \\ y=k \\ z=-2-4k \end{cases}$.

ب- تبيان أن المستقيمين (Δ) و (D) يتقاطعان في نقطة G مع تعيين إحداثياتها :

لدينا $\vec{u}\left(-1;-\frac{4}{7};1\right)$ شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{2};1;-4\right)$ شعاع توجيه لـ (Δ) و $\vec{u}$ و $\overrightarrow{BI}$ ليسا مرتبطين خطيا .

و بالتالي المستقيمان (Δ) و (D) إما ليسا من نفس المستوي أو متقاطعان .

نحل الجملة $\begin{cases} -t-1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k \\ -\frac{4}{7}t-\frac{5}{7}=k \\ t=-2-4k \end{cases}$ فنجد $k=-\frac{1}{3}$.

و بتعويض قيمة k في الجملة نجد $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$ و هي إحداثيات النقطة G نقطة تقاطع المستقيمين

جـ- تبيان أن المثلث ABC متساوي الساقين :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2;-2;5)$ و $\overrightarrow{AC}(-5;-2;2)$ و منه $AC=AB=\sqrt{33}$ و بالتالي المثلث ABC متساوي الساقين.

د- ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث ABC ؟

النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC ، لأنها نقطة تقاطع المتوسطات .

((Δ) المتوسط المتعلق بالضلع $[AC]$ و (D) العمود و المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ و $G \in (D)\cap(\Delta)$)

5) تعيين طبيعة و عناصر المجموعة (E) للنقط M من الفضاء و التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=3$

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=3$ تكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=3$ تكافئ $MG=1$ و منه المجموعة (E) هي سطح كرة مركزها G و نصف قطرها 1.

حل مقترح التمرين الثاني

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : (E) .... $2\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5=0$

1) أ- إثبات أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$.

لدينا : $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=2\bar{z}^3-2\bar{z}^2+2\bar{z}+5\bar{z}^2-5\bar{z}+5=2\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5$

و منه المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$.

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

$2\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5=0$ تكافئ $\left(2\bar{z}+5\right)\left(\bar{z}^2-\bar{z}+1\right)=0$ تكافئ $\bar{z}=-\frac{5}{2}$ أو $\bar{z}^2-\bar{z}+1=0$.

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $\bar{z}^2-\bar{z}+1=0$.

لدينا : $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3=3\boldsymbol{i}^2=\left(\sqrt{3}\boldsymbol{i}\right)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$\bar{z}_1=\frac{1-\sqrt{3}\boldsymbol{i}}{2}=\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\bar{z}_2=\frac{1+\sqrt{3}\boldsymbol{i}}{2}=\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

و منه $z_1==\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_2==\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\left\{-\frac{5}{2};\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

2) لدينا : $z_A=\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-1$ ، $z_D=-\frac{5}{2}$

أ- كتابة كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي :

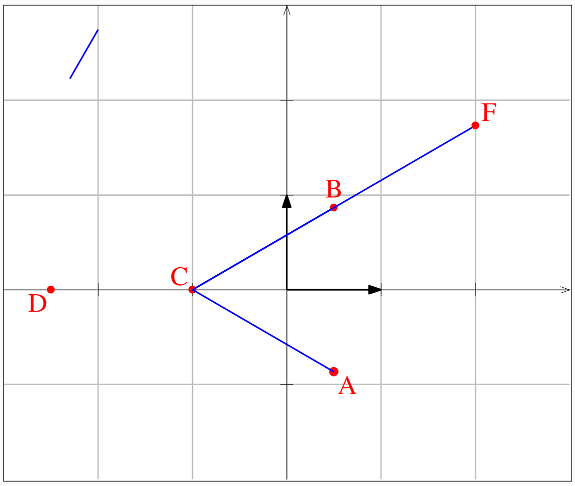
لدينا : $z_A=\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ و منه : $|z_A|=1$.

و بفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_A=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_A=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_A)=-\frac{\pi}{3}+2\boldsymbol{k}\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن : $z_A=\boldsymbol{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $z_B=\overline{z_A}$ و منه $z_B=\boldsymbol{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب- الرسم :



جـ- إثبات أن : $z_B-z_C=z_B\left(z_A-z_C\right)$.

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}+1}=\frac{\frac{3}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\left(\frac{3}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{2}+\boldsymbol{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=z_B$$

د- إستنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا: $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ يعني: $\begin{cases} \left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} CB = CA \\ \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ وبالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

النقطة F صورة النقطة A بالتشابه المباشر S يعني: $CF = 2CA$ و $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CF}\right) = \frac{\pi}{3}$.

طبيعة المثلث AFC:

المثلث AFC قائم في A.

4) تعيين طبيعة المجموعة (γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z+1 = kz_B$. لما يتغيّر k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

$z+1 = kz_B$ يكافئ $z - z_C = kz_B$ يكافئ $z - z_C = ke^{i\frac{\pi}{3}}$ يكافئ $\arg(z - z_C) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

يكافئ $\left(\vec{u};\overrightarrow{CM}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ومنه المجموعة (γ) هي نصف مستقيم مبدؤه C وشعاع توجيهه $\vec{w}$ بحيث $\left(\vec{u};\vec{w}\right) = \frac{\pi}{3}$.

حل مقترح التمرين الثالث

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

1) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n،

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} - 1}{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} + 2} = \frac{\frac{2u_n + 2 - (u_n + 3)}{u_n + 3}}{\frac{2u_n + 2 + 2(u_n + 3)}{u_n + 3}} = \frac{u_n - 1}{4u_n + 8} = \frac{u_n - 1}{4(u_n + 2)} = \frac{1}{4}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = -\frac{1}{2}$.

2) أ- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n:

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

ب- استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ ومنه $v_n(u_n + 2) = u_n - 1$ ومنه $v_n u_n + 2v_n - u_n = -1$

أي $u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$ وبالتالي $u_n = \frac{-1 - 2v_n}{v_n - 1} = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$.

إذن: $u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}$.

جـ- حساب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}\right]=1$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$.

3) أ- حساب المجموع S_n :

$$S_n = v_0+v_1+....+v_n = v_0\times\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=-\frac{1}{2}\times\left[\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right]=-\frac{2}{3}\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] .$$

ب- التحقق أن : $\dfrac{1}{u_n+2}=\dfrac{1}{3}(1-v_n)$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\dfrac{1+2v_n}{1-v_n}$ ومنه $u_n+2=\dfrac{1+2v_n}{1-v_n}+2$ ومنه $u_n+2=\dfrac{3}{1-v_n}$

أي $\dfrac{1}{u_n+2}=\dfrac{1}{3}(1-v_n)$.

جـ- حساب المجموع S'_n:

$$S'_n=\frac{1}{u_0+2}+\frac{1}{u_1+2}+....+\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_0)+\frac{1}{3}(1-v_1)+....+\frac{1}{3}(1-v_n) .$$

ومنه $S'_n=\dfrac{1}{3}\left[(1+1+....+1)-(v_0+v_1+...+v_0)\right]=\dfrac{1}{3}\left[n+1-S_n\right]$

أي : $S'_n=\dfrac{1}{3}\left[n+1+\dfrac{2}{3}\times\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{9}\left[3n+5-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^x-x^2-x$.

1) أ- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=2e^x-2x-1$

دراسة إتجاه تغيّر الدالة g' :

الدالة g' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g''(x)=2e^x-2=2(e^x-1)$

إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g''(x)$	$-$ 0 $+$

الدالة g' متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

ب- تبيان أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$

الدالة g' تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $g'(0)=1$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$

جـ- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-x^2-x\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\dfrac{2e^x}{x^2}-1-\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1{,}38<\alpha<-1{,}37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-1{,}38)\approx -0{,}02 \\ g(-1{,}37)\approx 0{,}001 \end{cases}$ أي $g(-1{,}38)\times g(-1{,}37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1{,}38<\alpha<-1{,}37$.

3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$.

1) أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=0 \text{ ، لأن : } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^x\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x\right)=+\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1-xe^{-x}}\right)=+\infty \ .$$

ب- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=\frac{\left(2xe^x+x^2e^x\right)\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)x^2e^x}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{xe^x\left[(2+x)\left(e^x-x\right)-x\left(e^x-1\right)\right]}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{xe^x g(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

جـ- دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;0]$ و متزايدة على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;\alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

2) أ- تبيان أن : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $e^\alpha=\dfrac{\alpha^2-\alpha}{2}$ و منه

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^2e^\alpha}{e^\alpha-\alpha}=\frac{\alpha^2\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha^2+\alpha}{2}-\alpha}=\frac{\alpha^2\left(\alpha^2+\alpha\right)}{\alpha^2-\alpha}=\frac{\alpha^3+\alpha^2}{\alpha-1}$$

أي : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$.

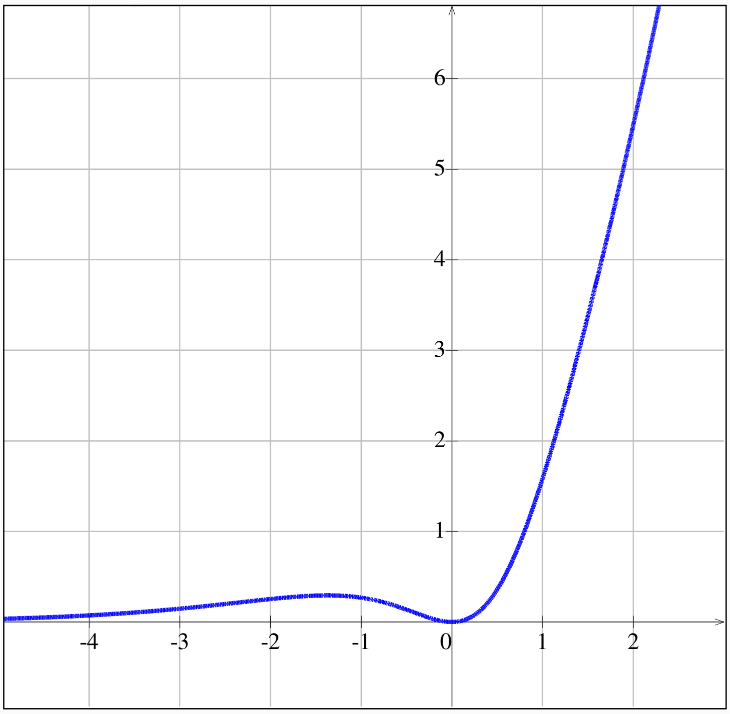
إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

لدينا : $-1,38 < \alpha < -1,37$ يكافئ $\begin{cases} -0,76 < 2\alpha + 2 < -0,74 \\ (-1,37)^2 < \alpha^2 < (-1,38)^2 \\ -2,38 < \alpha - 1 < -2,37 \\ -\dfrac{2}{2,37} < \dfrac{2}{\alpha - 1} < -\dfrac{2}{2,38} \end{cases}$ ومنه $0,27 < f(\alpha) < 0,32$.

ب- $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - x^2\right] = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[\dfrac{x^2 e^x}{e^x - x} - x^2\right] = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x^3}{e^x - x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}}\right) = 0$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) و المنحنى الممثل للدالة "مربع" $(x \mapsto x^2)$ متقاربان عند $+\infty$.

جـ- الرسم :



الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطة $A(1;-1;2)$ و المستوي (P) ذا المعادلة $x-y+z+2=0$.

و المستقيم (D) المعرف بـ: $\begin{cases} x+y-9=0 \\ y+z-4=0 \end{cases}$.

1) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

2) جد معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل A و يوازي (P) .

3) أثبت أن (D) يقطع (P') في النقطة A' حيث $A'(6;3;1)$.

4) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل A و يوازي (P) و يقطع (D) .

التمرين الثاني (4ن)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0=\frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$.

1) أ- برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2) أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n .

ب- أثبت أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=1-\frac{3}{v_n+1}$ ، ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث (5ن)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+2)(z^2-4z+8)=0$.

II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=2-2i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$

1) أكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسي .

2) عين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) بحيث : $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$.

تحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثم عين طبيعة المجموعة (Γ) و أنشئها .

4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C و نسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h .

عين طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة .

التمرين الرابع(7ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيَن أن الدالة f فردية ثم فسَر ذلك بيانيا .

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -1}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب .

3) أ ـ بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

بـ ـ إستنتج اتجاه تغيَر الدالة f ، ثم شكَل جدول تغيَراتها .

4) بيَن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$

5) أ ـ بيَن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

6) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

7) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط $A(3;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ و $C(0;0;1)$.

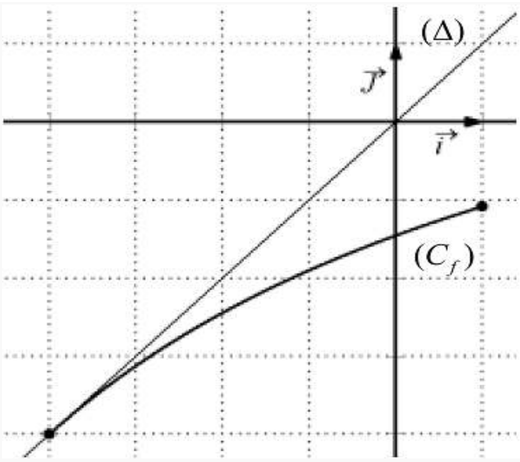
1) بيَن أن النقط A ، B و C تعيَن مستويا ، ثم تحقق أن : $2x+3y+6z-6=0$ معادلة للمستوي (ABC) .

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) والذي يشمل المبدأ O .

3) جد إحداثيات H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) .

4) بيَن أن (BH) عمودي على (AC) ، ثم استنتج أن H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC.

التمرين الثاني(4ن)



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و

f الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي : $f(x)=\frac{3x-16}{x+11}$.

و (C_f) المنحنى الممثل لها ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$.

I) تحقق أن الدالة متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$. ثم بيَن أن :

من أجل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$.

II) (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ ـ أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0,u_1,u_2 و u_3 دون حسابها.

ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيَر المتتالية (u_n) و تقاربها

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4 \le u_n \le 0$

ثم بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم أحسب المجموع S حيث : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + ... + v_{2016} \times u_{2016}$.

التمرين الثالث (5ن)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي :

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S = \left\{-\frac{1}{2} + i\right\}$.

2) من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2)(\bar{z}+2) = |z+2|^2$.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$.

4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ و نصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ و نصف القطر 9

5) من أجل كل عدد حقيقي : إذا كان $z = (\sin\alpha + i\cos\alpha)\times(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ فإن : $\arg(z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح .

التمرين الرابع (7ن)

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2 - x^2e^{1-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ و أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة ، ثم أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .

3) أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 1 - xe^{1-x}$.

1) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \ge 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T) .

2) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$.

4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$.

- تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = 1$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطة $A(1;-1;2)$ و المستوي (P) ذا المعادلة $x-y+z+2=0$

1) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (D):

المستقيم (D) المعرف بـ: $\begin{cases} x+y-9=0 \\ y+z-4=0 \end{cases}$ و منه بوضع $y=t$ نجد $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-t+9 \\ y=t \\ z=-t+4 \end{cases}$ وهذه الجملة هي

تمثيل وسيطي للمستقيم (D).

2) إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل A ويوازي (P):

(P) يوازي (P') معناه $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاع ناظمي لـ (P')، و منه لـ (P') معادلة من الشكل: $x-y+z+d=0$.

و لدينا: $A\in(P')$ يعني $x_A-y_A+z_A+d=1-(-1)+2+d=0$ أي $d=-4$.

إذن معادلة ديكارتية للمستوي (P') من الشكل: $x-y+z-4=0$.

3) إثبات أن (D) يقطع (P') في النقطة A' حيث $A'(6;3;1)$:

لدينا $\begin{cases} x=-t+9 \\ y=t \\ z=-t+4 \\ x-y+z-4=0 \end{cases}$ يكافئ $(-t+9)-t+(-t+4)-4=0$ أي $t=3$.

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (D) نجد $(6;3;1)$ و هي إحداثيات النقطة A' تقاطع (D) و (P').

4) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل A و يوازي (P) و يقطع (D):

لدينا: $\begin{cases} (D)\cap(P')\cap(\Delta)=\{A'\} \\ A\in(\Delta) \end{cases}$ و منه (Δ) هو نفسه المستقيم (AA').

و لدينا $\overrightarrow{AA'}(5;4;-1)$ و منه تمثيل وسيطي للمستقيم (AA') من الشكل: $(t'\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=5t'+1 \\ y=4t'-1 \\ z=-t'+2 \end{cases}$.

حل مقترح التمرين الثاني

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=\dfrac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=3-\dfrac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\dfrac{u_n+2}{1-u_n}$.

1) أ- البرهان بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<1$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<1$"

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=\dfrac{1}{4}$ و منه $0<u_0<1$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $0<u_n<1$، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<1$.

لدينا حسب الفرض $0<u_n<1$ و منه $4<u_n+4<5$ و منه $\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{u_n+4}<\dfrac{1}{4}$ و منه $\dfrac{-10}{4}<\dfrac{-10}{u_n+4}<\dfrac{-10}{5}$

و منه $1<3-\dfrac{10}{u_n+4}<3-\dfrac{10}{4}$ أي: $0<u_{n+1}<1$. و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<1$.

بـ- تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}-u_n=3-\frac{10}{u_n+4}-u_n=\frac{3(u_n+4)-10-u_n(u_n+4)}{u_n+4}=\frac{-u_n^{\,2}-u_n+2}{u_n+4}$$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

ولدينا : $0<u_n<1$ ومنه $1-u_n>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ـ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 ، إذن فهي متقاربة .

2) أ- تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}}=\frac{3-\frac{10}{u_n+4}+2}{1-3+\frac{10}{u_n+4}}=\frac{5-\frac{10}{u_n+4}}{-2+\frac{10}{u_n+4}}=\frac{\frac{5(u_n+4)-10}{u_n+4}}{\frac{-2(u_n+4)+10}{u_n+4}}=\frac{5u_n+10}{-2u_n+2}=\frac{5(u_n+2)}{2(1-u_n)}=\frac{5}{2}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{5}{2}$.

الحد الأول : $v_0=\frac{u_0+2}{1-u_0}=3$.

• كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n$.

بـ- إثبات أنه : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=1-\frac{3}{v_n+1}$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$ ومنه $v_n=-1+\frac{3}{1-u_n}$ ومنه $v_n+1=\frac{3}{1-u_n}$

أي $1-u_n=\frac{3}{v_n+1}$ وبالتالي : $u_n=1-\frac{3}{v_n+1}$

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n+1}\right)=1$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{v_n+1}\right)=$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n=+\infty$.

حل مقترح التمرين الثالث

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+2)(z^2-4z+8)=0$ .... (1) .

$(z+2)(z^2-4z+8)=0$ تكافئ $z=-2$ أو $z^2-4z+8=0$.

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4z+8=0$:

لدينا : $\Delta=(-4)^2-4\times1\times8=-16=16\boldsymbol{i}^2=(4\boldsymbol{i})^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\frac{4+4\boldsymbol{i}}{2}=2+2\boldsymbol{i}$ و $z_2=\frac{4-4\boldsymbol{i}}{2}=2-2\boldsymbol{i}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $S=\{-2;2+2\boldsymbol{i};2-2\boldsymbol{i}\}$.

II) المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A = 2-2i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$

1) كتابة كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي :

لدينا : $z_A = 2-2i$ ومنه : $\left|z_A\right| = 2\sqrt{2}$.

وبفرض θ_A عمدة للعدد z_A ، يكون : $\begin{cases} \cos\theta_A = \dfrac{2}{2\sqrt2} = \dfrac{1}{\sqrt2} = \dfrac{\sqrt2}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{-2}{2\sqrt2} == -\dfrac{\sqrt2}{2} \end{cases}$ ، ومنه $\arg\left(z_A\right) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن : $z_A = 2\sqrt2 e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_B = \overline{z_A}$ ومنه $z_B = 2\sqrt2 e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) تعيين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

B مركز ثقل المثلث ACD معناه B مرجح الجملة $\left\{(A,1);(C,1);(D,1)\right\}$.

ومنه : $z_B = \dfrac{z_D + z_C + z_A}{3}$ وبالتالي : $z_D = 3z_B - z_C - z_A$

أي : $z_D = 3(2+2i) - (-2) - (2-2i) = 6+8i$.

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) بحيث : $\arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

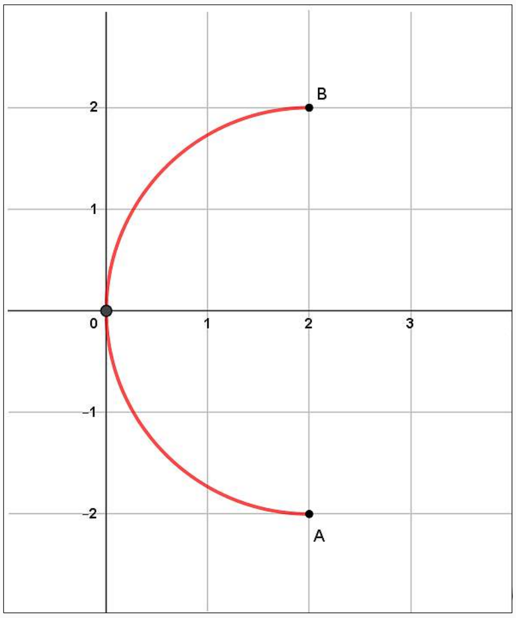
التحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) :

لدينا : $\arg\left(\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = \arg\left(z_B\right) - \arg\left(z_A\right) = \dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ومنه $O \in (\Gamma)$.

- تعيين طبيعة المجموعة (Γ) :

$\arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ معناه $\left(MA;MB\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$ ومنه (Γ) هي نصف الدائرة المفتوحة التي حداها A و B وقطرها $[AB]$ و تشمل النقطة O .

إنشاء (Γ) :



4) العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه النقطة C و نسبته 2 هي :

$z' = 2z + 2$.

تعيين طبيعة المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h مع تحديد عناصرها

المجموعة (Γ') هي نصف الدائرة المفتوحة التي حداها A' و B' بحيث : $A' = h(A)$ و $B' = h(B)$ ، و تشمل النقطة التي ω لاحقتها 2 .

($z_{B'} = 2z_B + 2 = 6+4i$ و $z_{A'} = 2z_A + 2 = 6-4i$)

حل مقترح التمرين الرابع

f الدالة المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

1) تبيان أن الدالة f فردية :

المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى الصفر (من أجل كل $x\in D$ ، $-x\in D$)

و من أجل كل $x\in D$ ،

$$f(-x)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\frac{2}{3}x-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-f(x)$$

التفسير البياني : مبدأ المعلم O مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f) .

2) حساب النهايات :

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)=\lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{< \\ x\to -1}} f(x)=\lim_{\substack{< \\ x\to -1}}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=+\infty$$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب معادلتيهما : $x=1$ و $x=-1$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، لأن : $\lim_{|x|\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$.

3) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على D ، من أجل كل عدد حقيقي x من D :

$$f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{2(x^2-1)+6}{3(x^2-1)}=\frac{2x^2+4}{3(x^2-1)}=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$$

إتجاه تغير الدالة f :

لدينا : من أجل كل x من D ، $x^2-1>0$ و منه $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على D .

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$			$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$			$-\infty \nearrow +\infty$

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $]1,8;1,9[\subset]1;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1,9)\approx 0,10 \\ f(1,8)\approx -0,05\end{cases}$

أي $f(1,8)\times f(1,9)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$.

5) لدينا : $\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ ، لأن : $\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$

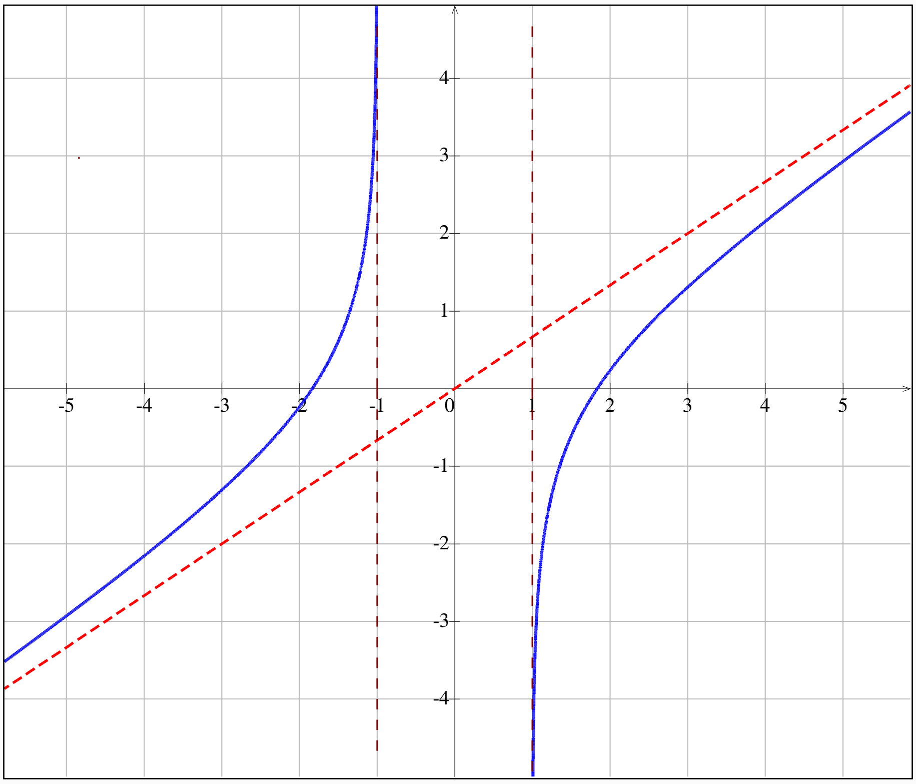
و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-\frac{2}{3}x=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

x	$-\infty$ $\qquad$ -1	-1 $\qquad$ 1	1 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y$	$+$		$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

6) الرسم :



7) المناقشة البيانية :

$(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ تكافئ $2x-3|m|x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ تكافئ $\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=|m|x$

أي $f(x)=|m|x$ و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=|m|x$.

(مناقشة دورانية)

إذا كان $m\in\left]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right[$ أي $|m|\in\left[0;\frac{2}{3}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين .

إذا كان $m\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ أي $|m|\in\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

∞ تصحيح مقترح للموضوع الثاني ∞

حل مقترح التمرين الأول

A ، B و C النقط من بحيث: $A(3;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ و $C(0;0;1)$

1) تبيان أن النقط A ، B و C تعين مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-3;2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;0;1)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا لأن $x_{\overrightarrow{AC}} = x_{\overrightarrow{AB}}$ لكن $y_{\overrightarrow{AC}} \neq y_{\overrightarrow{AB}}$ ومنه النقط A ، B و C ليست في استقامية و بالتالي فهي تعيّن مستويا .

- التحقق أن : $2x+3y+6z-6=0$ معادلة للمستوي (ABC) :

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة.

$A \in (ABC)$ لأن $2x_A+3y_A+6z_A-6=2\times3+3\times0+6\times0-6=0$

$B \in (ABC)$ لأن $2x_B+3y_B+6z_B-6=2\times0+3\times2+6\times0-6=0$

$C \in (ABC)$ لأن $2x_C+3y_C+6z_C-6=2\times0+3\times0+6\times1-6=0$

2) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) و الذي يشمل المبدأ O .

(Δ) يعامد المستوي (ABC) يعني أن $\vec{n}(2;3;6)$ شعاع توجيه لـ (Δ) .

و منه تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) من الشكل : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x=2t \\ y=3t \\ z=6t \end{cases}$.

3) إيجاد إحداثيات H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) :

نحل الجملة $\begin{cases} x=2t \\ y=3t \\ z=6t \\ 2x+3y+6z-6=0 \end{cases}$ و هذا يكافئ $2(2t)+3(3t)+6(6t)-6=0$ أي $t=\frac{6}{49}$.

و بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $(\frac{12}{49};\frac{18}{49};\frac{36}{49})$ و هي إحداثيات النقطة H .

4) تبيان أن (BH) عمودي على (AC) :

لدينا : $\overrightarrow{BH}(\frac{12}{49};-\frac{86}{49};\frac{36}{49})$ و $\overrightarrow{AC}(-3;0;1)$

و منه $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}=-3\times\frac{12}{49}+0\times\left(-\frac{86}{49}\right)+1\times\frac{36}{49}=0$ و بالتالي $(BH)\perp(AC)$.

- استنتاج أن H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC.

لدينا : $\overrightarrow{AH}(-\frac{147}{49};\frac{18}{49};\frac{36}{49})$ و $\overrightarrow{BC}(0;-2;1)$.

و منه $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}=0\times\left(-\frac{147}{49}\right)-2\times\left(\frac{18}{49}\right)+1\times\frac{36}{49}=0$ و بالتالي $(AH)\perp(BC)$.

إذن H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC.

حل مقترح التمرين الثاني

f الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x-16}{x+11}$.

I) التحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[-4;1]$ و $f'(x)=\dfrac{3(x+11)-(3x-16)}{(x+11)^2}=\dfrac{49}{(x+11)^2}$

لدينا : من أجل كل $x\in[-4;1]$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$.

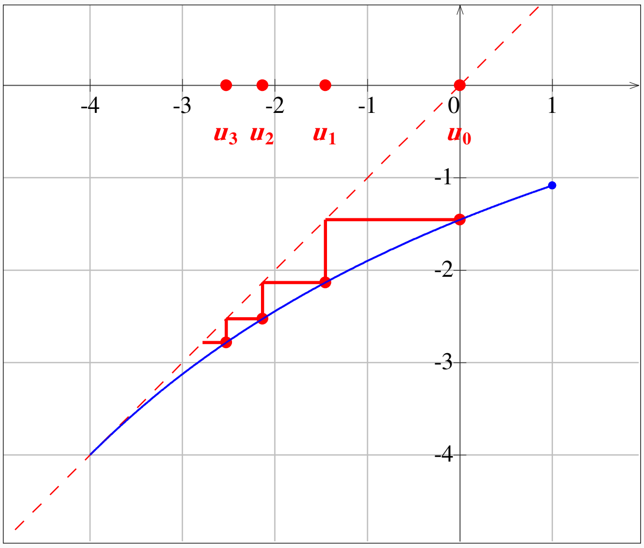
تبيان أنه من أجل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$:

لدينا : الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ و بالتالي من أجل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[f(-4);f(1)]$

أي : $f(x)\in\left[-4;-\dfrac{13}{12}\right]$ و لدينا $\left[-4;-\dfrac{13}{12}\right]\subset[-4;1]$ و منه : من أجل كل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$.

II) (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ- تمثيل الحدود :



التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو العدد -4 .

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4\le u_n\le 0$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $-4\le u_n\le 0$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=0$ و منه $-4\le u_0\le 0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $-4\le u_n\le 0$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $-4\le u_{n+1}\le 0$.

لدينا حسب الفرض $-4\le u_n\le 0$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما فإن $f(-4)\le f(u_n)\le f(0)$

أي $-4\le u_{n+1}\le -\dfrac{16}{11}\le 1$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4\le u_n\le 0$.

- تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-16}{u_n+11}-u_n=\frac{3u_n-16-u_n(u_n+11)}{u_n+11}=\frac{-u_n^2-8u_n-16}{u_n+11}=\frac{-(u_n+4)^2}{u_n+11}$$

و منه : $u_{n+1}-u_n<0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$ أي $v_n = \dfrac{1}{u_n + 4}$.

إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{7}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 4} = \frac{1}{\dfrac{3u_n - 16}{u_n + 11} + 4} = \frac{1}{\dfrac{3u_n - 16 + 4(u_n + 11)}{u_n + 11}} = \frac{u_n + 11}{7u_n + 28} = \frac{u_n + 4 + 7}{7(u_n + 4)} = \frac{1}{7} + \frac{1}{u_n + 4} = \frac{1}{7} + v_n$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \dfrac{1}{7}$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{1}{u_0 + 4} = \dfrac{1}{4}$.

- حساب المجموع S حيث : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + ... + v_{2016} \times u_{2016}$

لدينا : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + ... + v_{2016} \times u_{2016} = (1 - 4v_0) + (1 - 4v_1) + ... + (1 - 4v_{2016})$

و منه : $S = 2017 \times 1 - 4(v_0 + v_1 + ... + v_{2016}) = 2017 - 4\left[\dfrac{2017}{2}(v_0 + v_{2016})\right]$

أي : $S = 2017 - 4\left[\dfrac{2017}{2}\left(\dfrac{1}{4} + 288\right)\right] = -1161792$

حل مقترح التمرين الثالث

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة :

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\dfrac{z + 1 - i}{z - i}\right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S = \left\{-\dfrac{1}{2} + i\right\}$ $\longleftarrow$ صحيح.

التبرير :

$\left(\dfrac{z + 1 - i}{z - i}\right)^2 = 1$ تكافئ $(z + 1 - i)^2 = (z - i)^2$ تكافئ $\begin{cases} z + 1 - i = z - i \\ z + 1 - i = -(z - i) \end{cases}$ أو أي $z = -\dfrac{1}{2} + i$.

2) من أجل كل عدد مركب z ، $(z + 2)(\bar{z} + 2) = |z + 2|^2$ $\longleftarrow$ صحيح.

التبرير :

$$(z + 2)(\bar{z} + 2) = (z + 2)(\overline{z + 2}) = |z + 2|^2$$

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$ $\longleftarrow$ خطأ.

التبرير :

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} = \left[\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3\right]^n = \left(e^{i\pi}\right)^n = (-1)^n$$

4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 و نسبته 3 و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ و نصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ و نصف القطر 9

صحيح

التبرير :

العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = 3e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1) + 1 = 3iz - 3i + 1$

لدينا : $z_\omega = i$ و منه $z_{\omega'} = 3iz_\omega + 1 - 3i = -2 - 3i$.

و لدينا : $r' = |k| \times r = 3 \times 3 = 9$.

5) من أجل كل عدد حقيقي α : إذا كان $z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$ فإن : $\arg(z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$

حيث k عدد صحيح. ⟵ صحيح.

التبرير :

من أجل كل عدد حقيقي α :

$$z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)=i(\cos\alpha-i\sin\alpha)^2=e^{i\frac{\pi}{2}}\times(e^{-i\alpha})^2=e^{i\frac{\pi}{2}}\times e^{-2i\alpha}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}$$

و منه $\arg(z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.

1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x^2e^{1-x})=2$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(e\times x^2e^{-x})=0$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x^2e^{1-x})=-\infty$.

2) أ- الدالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f'(x)=-2xe^{1-x}+x^2e^{1-x}=(x^2-2x)e^{1-x}=x(x-2)e^{1-x}$$

بـ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x-2)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $[0;2]$ و متزايدة على كل من المجالين $[2;+\infty[$ و $]-\infty;0]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$2-4e^{-1}$	↗	2

3) كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

لدينا : $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T): y=-x+2$.

II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)\geq 0$:

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=-e^{1-x}+xe^{1-x}=(x-1)e^{1-x}$

إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $h(1)=0$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)\geq 0$

• دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T) :

لدينا : $f(x)-y=2-x^2e^{1-x}+x-2=x(1-x)e^{1-x}=xh(x)$.

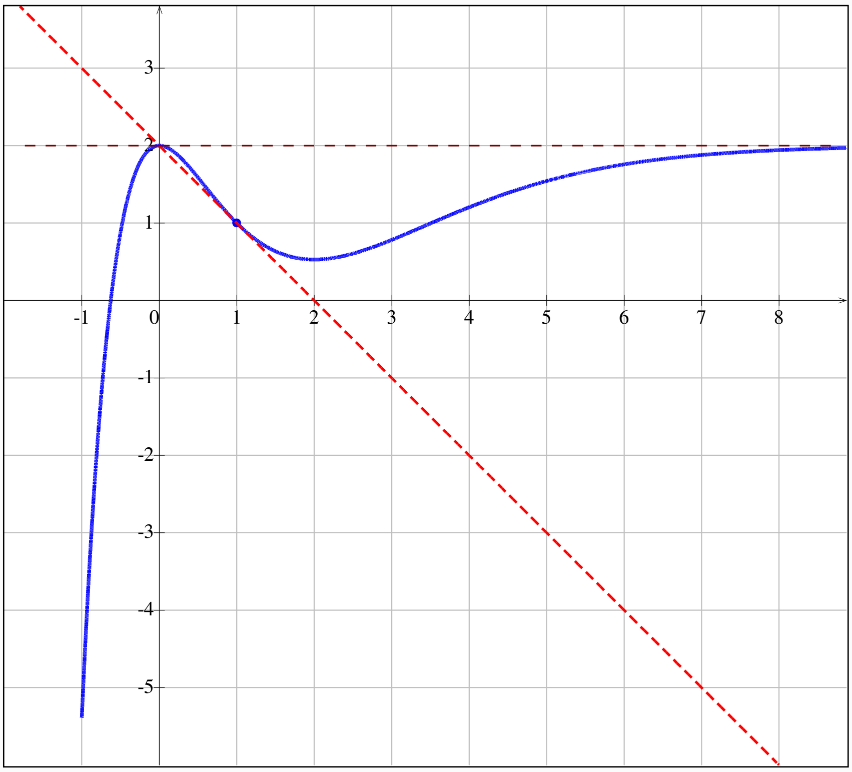
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	

2) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و $]-0,7;-0,6[\subset]-\infty;0[$ و $\begin{cases} f(-0,7)\approx -0,7 \\ f(-0,6)\approx 0,2 \end{cases}$

أي $f(-0,7)\times f(-0,6)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

3) الرسم :



4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

- التحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$F'(x)=2+(2x+2)e^{1-x}-(x^2+2x+2)e^{1-x}=2-x^2e^{1-x}=f(x)$$

- حساب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$

$$S=\int_0^1 f(x)dx=[F(x)]_0^1=F(1)-F(0)=(7-2e)ua$$

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

1) أحسب الحديّن u_1 و v_1 .

2) أ. أكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.

ب. باستعمال البرهان بالتراجع بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = u_n - v_n$

برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول w_0 ثم عبّر عن w_n بدلالة n.

4) بيّن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

التمرين الثاني (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط $A(1;1;-1)$ ، $B(2;-1;-1)$ و $C(4;-4;-2)$.

و المستوي (P) ذا المعادلة الديكارتية $x-2y+2z-3=0$.

1) بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا .

2) بيّن المستويين (P) و (ABC) غير متوازيين .

3) تحقق أن الجملة : $(\beta\in\mathbb{R},\alpha\in\mathbb{R})$ ، $\begin{cases} x=-2+\alpha-3\beta \\ y=6-2\alpha+5\beta \\ z=\beta \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) .

4) جد تمثيلا وسيطيا لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC).

التمرين الثالث (5ن)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$.

II) المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ حيث : $\left\|\vec{u}\right\|=2cm$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=2$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$

1) أ. أكتب z_B على الشكل الأسي ، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد المركّب z_C .

ب. عيّن مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ثم أنشئ النقط A ، B و C .

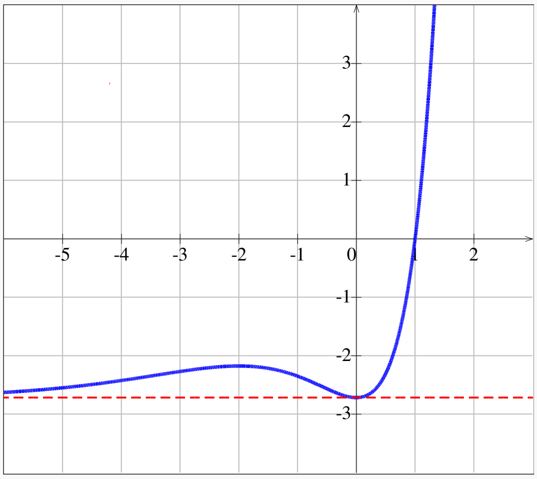
2) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و لتكن F صورة A بالتحويل S .

أ. أكتب العبارة المركّبة للتشابه S ثم عيّن لاحقة كل A' ، B' و C' من صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتشابه S

ثم أنشئ في المعلم السابق النقط A' ، B' و C' .

ب. أحسب بالسنتمتر المربع مساحة المثلث $A'B'C'$.

التمرين الرابع(7ن)



I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^2e^x-e$.
(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الشكل)

- أحسب $g(1)$.
- بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=e^{-x}-2-\frac{e}{x}$.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايات الآتية : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) بيّن أن المنحنى (γ) الذي معادلته $y=e^{-x}-2$ و المنحنى (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (γ).

3) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)=\frac{-g(-x)}{x^2}$.

4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1;0[$ و $]0;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

5) بيّن كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x\mapsto e^x$ ، ثم أرسم بعناية كلا من (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

6) ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.
أحسب العدد الحقيقي l حيث : $l=A(0)+A(1)+....+A(2016)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-8;0;-2)$ ، $B(1;2;1)$ ، $C(2;3;-1)$ و $E(1;1;4)$.
و المستوي (P) ذا المعادلة $2x+y-3=0$.

1) أ- بيّن أن النقط A ، B و C تعين مستويا .
ب- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون $\vec{n}(1;\alpha;-1)$ شعاعا ناظما للمستوي (ABC) ثم عين معادلة ديكارتية له .

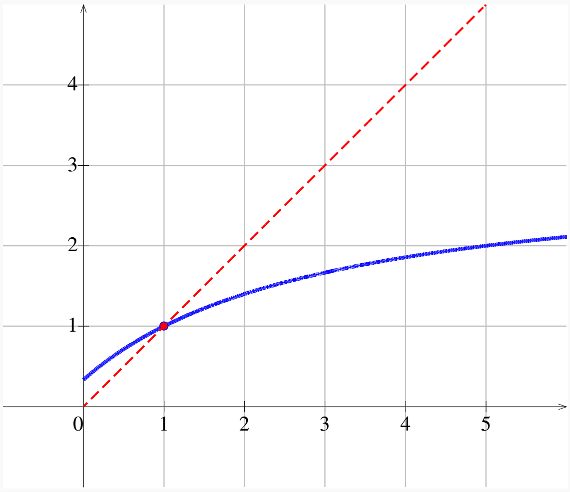
2) بيّن أن المستويين (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) ، ثم تحقق أن E تنتمي إلى (Δ) و $\vec{u}(1;-2;7)$ شعاع توجيه له .

3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-2),(C;3)\}$ ، نرمز بـ (Γ) إلى مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :
$$\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$$
عيّن إحداثيات النقطة G ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) و أكتب معادلة ديكارتية لها .

4) عيّن إحداثيات نقط تقاطع (P) ، (ABC) و (Γ).

التمرين الثاني (4ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=x$



α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$

I) عيّن قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

II) نضع في كل مايلي: $\alpha=5$

1) أ- أنقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 دون حسابها.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب- عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=v_n+v_{n+1}+....+v_{n+2016}$.

ثم استنتج بدلالة n المجموع: $S'_n=\frac{1}{u_n+1}+\frac{1}{u_{n+1}+1}+....+\frac{1}{u_{n+2016}+1}$.

التمرين الثالث (5ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-3-2i$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=4-3i$

1) عيّن النسبة و زاوية للتشابه S المباشر ذي المركز A و الذي يحول النقطة B إلى النقطة C.

2) أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC و بـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$.

عيّن كلا من z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I، ثم بيّن أن النقط B ، G و I في إستقامية.

4) نعتبر النقطة D نظيرة النقطة B بالنسبة إلى I. حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=5\sqrt{2}$.

أ- تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ).

ب- عيّن طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها.

التمرين الرابع(7ن)

I) نعتبر f الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجتين بيانيا .

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f'(x)=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$

ب ـ أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

4) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها ، ثم أنشئ (C_f) .

II) لتكن الدالة g المعرّفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=2\left[-x+\ln(2x+1)\right]$.

1) أ ـ أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

ب ـ بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $1,2<\alpha<1,3$.

جـ ـ استنتج إشارة $g(x)$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من : $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

أثبت أن : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0=6 \\ v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n+1 \end{cases}$$

1) حساب الحدّين u_1 و v_1 :

$$u_1=\frac{3}{4}u_0+1=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4} \quad ، \quad v_1=\frac{3}{4}v_0+1=\frac{3}{4}\times6+1=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}$$

2) أ ـ كتابة $u_{n+2}-u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1}-u_n$:

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3}{4}u_{n+1}+1-u_{n+1}=\frac{3}{4}u_{n+1}+1-\left(\frac{3}{4}u_n+1\right)=\frac{3}{4}(u_{n+1}-u_n)$

ب ـ البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

لنثبت أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}\geq u_n$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \geq u_n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0 = 1$ و $u_1 = \frac{7}{4}$ و منه $u_1 > u_0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $u_{n+1} \geq u_n$، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

لدينا حسب الفرض $u_{n+1} \geq u_n$ و منه $u_{n+1} - u_n \geq 0$ و لدينا مما سبق $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)$

و منه $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \geq u_n$ أي أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

- البرهان بالتراجع بين أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما:

لنثبت أنه: من من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} \leq v_n$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} \leq v_n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $v_0 = 6$ و $v_1 = \frac{11}{2} = 5.5$ و منه $v_1 < v_0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $v_{n+1} \leq v_n$، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $v_{n+2} \leq v_{n+1}$.

لدينا حسب الفرض $v_{n+1} \leq v_n$ و منه $v_{n+1} - v_n \leq 0$ و لدينا $v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{3}{4}(v_{n+1} - v_n)$ و منه $v_{n+2} \leq v_{n+1}$

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} \leq v_n$ و بالتالي المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = u_n - v_n$

تبيان أن المتتالية (w_n) هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 - \left(\frac{3}{4}v_n + 1\right) = \frac{3}{4}(u_n - v_n) = \frac{3}{4}w_n$

و منه المتتالية (w_n) هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ و حدها الأول $w_0 = u_0 - v_0 = 1 - 6 = -5$.

- كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = w_0 \times q^n$ و منه $w_n = -5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

4) تبيان أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان:

لدينا: المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

و $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} \left(-5\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 0$ و منه المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

حل مقترح التمرين الثاني

النقط A، B و C من الفضاء بحيث: $A(1;1;-1)$، $B(2;-1;-1)$ و $C(4;-4;-2)$.

و المستوي (P) ذا المعادلة الديكارتية $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

1) تبيان أن النقط A، B و C تعيّن مستويا:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(1;-2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(3;-5;-1)$ و $\frac{-5}{-2} \neq \frac{3}{1}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي النقط A، B و C تعيّن مستويا.

2) تبيان أن المستويين (P) و (ABC) غير متوازيين :

يكفي إثبات أن الشعاع الناظمي لـ (P) لا يعامد $\overrightarrow{AB}$ و لا $\overrightarrow{AC}$.

لدينا : $\vec{n}(1;-2;2)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=1+4+0=5$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=3+10-2=11$

و منه المستويان (P) و (ABC) غير متوازيين .

3) التحقق أن الجملة : $(\beta\in\mathbb{R},\alpha\in\mathbb{R})$ ، $\begin{cases}x=-2+\alpha-3\beta\\ y=6-2\alpha+5\beta\\ z=\beta\end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) .

النقط A ، B و C تعين مستويا و بالتالي يكفي التحقق أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق الجملة .

$\begin{cases}1=-2+\alpha-3\beta\\ 1=6-2\alpha+5\beta\\ -1=\beta\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}1=-2+\alpha-3\beta\\ \alpha=0\\ \beta=-1\end{cases}$ و منه $A\in(ABC)$

$\begin{cases}2=-2+\alpha-3\beta\\ -1=6-2\alpha+5\beta\\ -1=\beta\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}2=-2+\alpha-3\beta\\ \alpha=1\\ \beta=-1\end{cases}$ و منه $B\in(ABC)$

$\begin{cases}4=-2+\alpha-3\beta\\ -4=6-2\alpha+5\beta\\ -2=\beta\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}4=-2+\alpha-3\beta\\ \alpha=0\\ \beta=-2\end{cases}$ و منه $C\in(ABC)$

4) إيجاد تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC):

$\begin{cases}x=-2+\alpha-3\beta\\ y=6-2\alpha+5\beta\\ z=\beta\\ x-2y+2z-3=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=-2+\alpha-3\beta\\ y=6-2\alpha+5\beta\\ z=\beta\\ -2+\alpha-3\beta-2(6-2\alpha+5\beta)+2\beta-3=0\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}x=-2+\alpha-3\beta\\ y=6-2\alpha+5\beta\\ z=\beta\\ \alpha=\frac{11}{5}\beta+\frac{17}{5}\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}\beta\\ y=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\beta\\ z=\beta\end{cases}$

و منه تمثيل وسيطي لـ (Δ) من الشكل : $(\beta\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}\beta\\ y=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\beta\\ z=\beta\end{cases}$

حل مقترح التمرين الثالث

I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$.

$(z+2)(z^2+2z+4)=0$ تكافئ $z=2$ أو $z^2+2z+4=0$.

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+2z+4=0$:

لدينا : $\Delta=(2)^2-4\times1\times4=-12=12i^2=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{2}=-1+i\sqrt{3}$ و $z_2=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{2}=-1-i\sqrt{3}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\left\{2\,;-1+i\sqrt{3}\,;-1-i\sqrt{3}\right\}$.

II) المستوي المركَب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ حيث : $\|\vec{u}\|=2cm$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=2$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$

1) أ ـ كتابة z_B على الشكل الأسّي :

لدينا : $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و منه : $|z_B|=2$.

و بفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_B==-\frac{1}{2}\\ \sin\theta_B=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_B)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن : $z_B=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

لدينا : $z_C=\overline{z_B}$ و منه $z_C=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

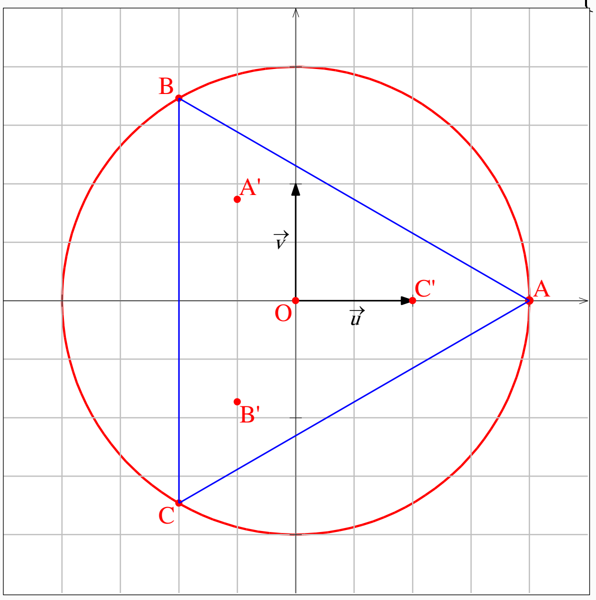
ب ـ تعيين مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

لدينا : $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$ أي : $OA=OB=OC=2$

و منه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هي النقطة O

مبدأ المعلم و نصف قطرها 2 .

إنشاء النقط A، B و C :



2) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ ولتكن F صورة A بالتحويل S .

أ ـ العبارة المركَبة للتشابه S : $z'-z_O=\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(z-z_O\right)$ أي : $z'=\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

تعيين لاحقات كل من A'، B' و C' من صور النقط A، B و C بالتشابه S :

$z_{A'}=\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A=\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\times2=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ أي : $z_{A'}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_{B'}=\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B=\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)=e^{i\frac{4\pi}{3}}$ أي : $z_{B'}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_{C'}=\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_C=\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(2e^{i\frac{-2\pi}{3}}\right)=1$ أي : $z_{C'}=1$.

إنشاء النقط A'، B' و C' : أنظر الشكل السابق .

ب ـ حساب مساحة المثلث $A'B'C'$:

لدينا : $S_{A'B'C'}=\left(\frac{1}{2}\right)^2S_{ABC}=\frac{1}{4}S_{ABC}$ لكون المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان و نسبة التشابه هي $\frac{1}{2}$.

و لدينا : $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(2\sqrt{3}\right)^2=3\sqrt{3}$ و منه $S_{A'B'C'}=\frac{1}{4}S_{ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

حل مقترح التمرين الرابع

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^x-e$.

- $g(1)=e^1-e=0$.

- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

- إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(-x)$		$+$	0	$-$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=-2$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\<}}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=+\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=-\infty$$

2) لدينا : $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{e}{x}\right)=0$ و منه (C_f) و المنحنى (γ) ذي المعادلة $y=e^{-x}-2$ متقاربان عند $-\infty$

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ):

لدينا : $f(x)-y=-\dfrac{e}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	‖	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (γ)	‖	(C_f) تحت (γ)

3) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$f'(x)=-e^{-x}+\frac{e}{x^2}=\frac{-x^2e^{-x}+e}{x^2}=\frac{-(x^2e^{-x}-e)}{x^2}=\frac{-g(-x)}{x^2}$$

إتجاه تغيّر الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(-x)$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	

و منه الدالة f متزايدة على كل من المجالين $[-1;0[$ و $]0;+\infty[$ متناقصة على المجال $]-\infty;-1]$.

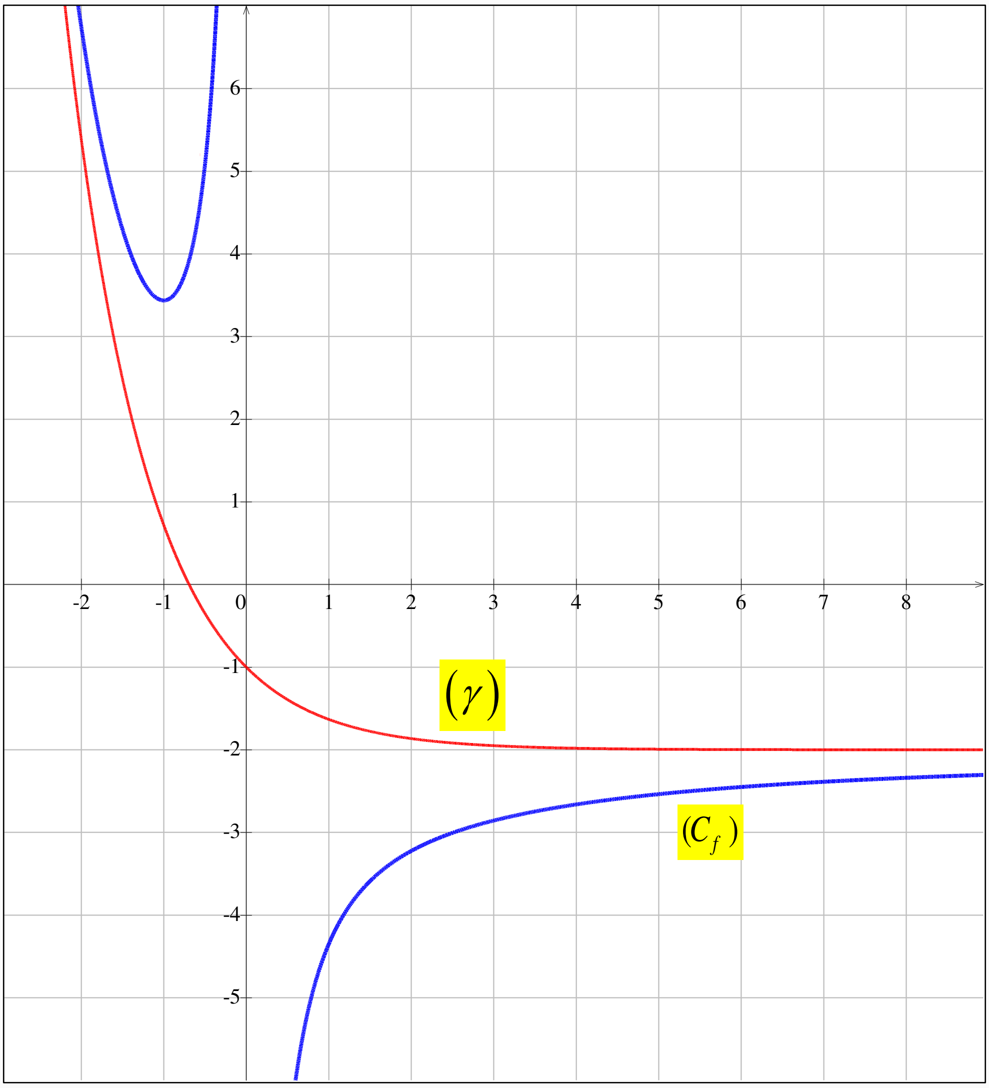
جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$2e-2$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↗	-2

4) شرح كيفية إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x \mapsto e^{x}$:

لدينا: (γ) المنحنى ذي المعادلة $y = e^{-x} - 2$ و منه (γ) هو صورة (Γ) منحنى الدالة $x \mapsto e^{-x}$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;-2)$، علما أن (Γ) هو نظير منحنى الدالة $x \mapsto e^{x}$ بالنسبة لحامل محور التراتيب.

الرسم:



5) n عدد طبيعي و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = -e^{n}$ و $x = -e^{n+1}$.

$$A(n) = \int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}} \left[f(x) - e^{-x} + 2\right]dx = \int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}} \left(-\frac{e}{x}\right)dx = -e\int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}} \left(\frac{1}{x}\right)dx = -e\left[\ln|x|\right]_{-e^{n+1}}^{-e^{n}} = e$$

حساب العدد الحقيقي l : $l = A(0) + A(1) + ... + A(2016) = 2017e$.

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

A ، B ، C و E النقط من الفضاء بحيث : $A(-8;0;-2)$ ، $B(1;2;1)$ ، $C(2;3;-1)$ و $E(1;1;4)$.

و المستوي (P) ذا المعادلة $2x+y-3=0$.

1) أ- تبيان أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(9;2;3)$ و $\overrightarrow{AC}(10;3;1)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا لأن $\frac{3}{2} \neq \frac{9}{10}$ ومنه النقط A ، B و C ليست في استقامية و بالتالي فهي تعيّن مستويا .

ب- تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون $\vec{n}(1;\alpha;-1)$ شعاعا ناظما للمستوي (ABC) :

الشعاع $\vec{n}(1;\alpha;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) معناه : $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0$.

$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n}=0 \\ \overrightarrow{AC}.\vec{n}=0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 9+2\alpha-3=0 \\ 10+3\alpha-1=0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 6+2\alpha=0 \\ 9+3\alpha=0 \end{cases}$ و منه $\alpha=-3$.

تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

لدينا $\vec{n}(1;-3;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و منه لـ (ABC) معادلة من الشكل : $x-3y-z+d=0$.

و لدينا $A\in(ABC)$ ومنه $-8-3\times0-(-2)+d=0$ أي $d=6$.

إذن : $x-3y-z+6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) تبيان أن المستويين (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) :

لدينا : $\vec{n}(1;-3;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و $\overrightarrow{n_P}(2;1;0)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) .

الشعاعان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{n_P}$ ليسا مرتبطين خطيا و بالتالي المستويان (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم .

- التحقق أن E تنتمي إلى (Δ) :

لدينا : $E\in(P)$ لأن $2\times1+1-3=0$ ، و $E\in(ABC)$ لأن $1-3\times1-4+6=0$.

و منه $E\in(P)\cap(ABC)$ أي : $E\in(\Delta)$.

- التحقق أن $\vec{u}(1;-2;7)$ شعاع توجيه لـ (Δ) :

يكفي إثبات أن : $\vec{n}.\vec{u}=0$ و $\overrightarrow{n_P}.\vec{u}=0$.

لدينا : $\vec{n}.\vec{u}=1\times1-3\times(-2)-1\times7=0$ و $\overrightarrow{n_P}.\vec{u}=2\times1+1\times(-2)+0\times7=0$ و منه $\vec{u}(1;-2;7)$ شعاع توجيه لـ (Δ) .

3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-2),(C;3)\}$ ، نرمز بـ (Γ) إلى مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$$

- تعيين إحداثيات النقطة G :

$\begin{cases} x_G=\dfrac{1\times(-8)-2\times1+2\times3}{1-2+3} \\ y_G=\dfrac{1\times0-2\times2+3\times3}{1-2+3} \\ z_G=\dfrac{1\times(-2)-2\times1+3\times(-1)}{1-2+3} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x_G=-2 \\ y_G=\dfrac{5}{2} \\ z_G=-\dfrac{7}{2} \end{cases}$ أي : $G\left(-2;\frac{5}{2};-\frac{7}{2}\right)$.

• تحديد طبيعة المجموعة (Γ) :

$(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$ تكافئ $2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CB}=0$ تكافئ $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CB}=0$

ومنه المجموعة (Γ) هي المستوي الذي يشمل النقطة G و $\overrightarrow{CB}$ شعاع ناظمي له.

• كتابة معادلة ديكارتية للمجموعة (Γ) :

بما أن (Γ) يشمل النقطة G و $\overrightarrow{CB}(-1;-1;2)$ شعاع ناظمي له فإن للمستوي (Γ) معادلة من الشكل : $-x-y+2z+\frac{15}{2}=0$.

4) تعيين إحداثيات نقط تقاطع (P) ، (ABC) و (Γ):

لدينا : $(ABC)\cap(P)\cap(\Gamma)=[(ABC)\cap(P)]\cap(\Gamma)=(\Delta)\cap(\Gamma)$

لندرس تقاطع (Δ) و (Γ):

لدينا تمثيل وسيطي لـ (Δ) من الشكل : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+1 \\ z=7t+4 \end{cases}$ (تذكَر أن (Δ) يشمل E و $\vec{u}$ شعاع توجيه له)

نحل الجملة $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+1 \\ z=7t+4 \\ -x-y+2z+\frac{15}{2}=0 \end{cases}$ وهذا يكافئ $-(t+1)-(-2t+1)+2(7t+4)+\frac{15}{2}=0$ أي $t=-\frac{9}{10}$.

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $(\frac{1}{10};\frac{14}{5};-\frac{23}{10})$ وهي إحداثيات نقطة تقاطع (P) ، (ABC) و (Γ).

حل مقترح التمرين الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال : $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{3x+1}{x+3}$

α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على بحدها الأول $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=f(u_n)$

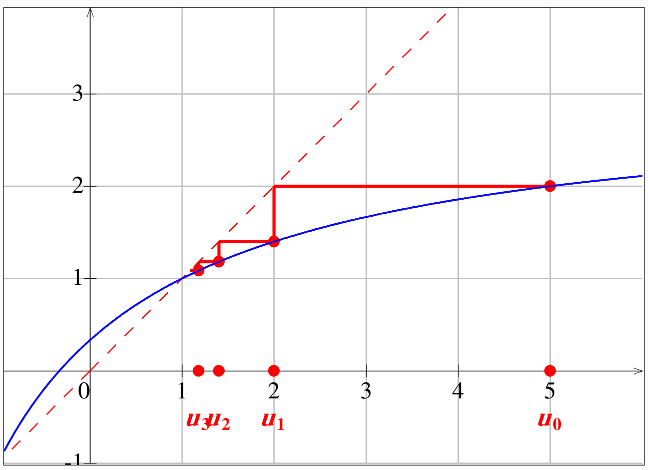
1) تعيين قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

(u_n) متتالية ثابتة يعني : من أجل كل عدد طبيعي ، $u_{n+1}=u_n=u_0$

أي نحل المعادلة $f(\alpha)=\alpha$ وهذا يكافئ $\frac{3\alpha+1}{\alpha+3}=\alpha$ يكافئ $\alpha^2=1$

وبما أن α عدد حقيقي موجب فإنه من أجل $\alpha=1$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) أ-تمثيل الحدود :



بـ- التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو العدد 1.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}-1}{\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}+1} = \frac{\dfrac{3u_n+1-(u_n+3)}{u_n+3}}{\dfrac{3u_n+1+(u_n+3)}{u_n+3}} = \frac{2u_n-2}{4u_n+4} = \frac{2(u_n-1)}{4(u_n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{u_n+1}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

بـ- كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = v_0 \times q^n$ أي: $v_n = \dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ و منه $v_n(u_n+1) = u_n - 1$ و منه $v_n u_n - u_n = -v_n - 1$

أي $u_n = \dfrac{v_n + 1}{1 - v_n}$ إذن : $u_n = \dfrac{v_n+1}{1-v_n} = \dfrac{\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 1}{1-\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{3+2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{3-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3+2\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right) = 1$$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

4) حساب المجموع: $S_n = v_n + v_{n+1} + ... + v_{n+2016}$.

$$S_n = v_n + v_{n+1} + ... + v_{n+2016} = v_n\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{1-\frac{1}{2}}\right] = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right)$$

استنتاج المجموع : $S'_n = \dfrac{1}{u_n+1} + \dfrac{1}{u_{n+1}+1} + ... + \dfrac{1}{u_{n+2016}+1}$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ و منه $v_n = \dfrac{u_n + 1 - 2}{u_n + 1}$ و منه $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n+1}$ أي $\dfrac{1}{u_n+1} = \dfrac{1-v_n}{2}$

$$S'_n = \frac{1}{u_n+1} + \frac{1}{u_{n+1}+1} + ... + \frac{1}{u_{n+2016}+1} = \frac{1-v_n}{2} + \frac{1-v_{n+1}}{2} + ... + \frac{1-v_{n+2016}}{2} = \frac{1}{2}(2017) - \frac{1}{2}S_n$$

النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=-3-2i$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=4-3i$.

1) تعيين النسبة و زاوية للتشابه S المباشر ذي المركز A و الذي يحول النقطة B إلى النقطة C :

لدينا : $\begin{cases} S(A)=A \\ S(B)=C \end{cases}$ و منه $z_C-z_A=ke^{i\theta}(z_B-z_A)$ و منه نسبة التشابه S هي : $k=\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|$

و زاوية للتشابه S هي $\theta=\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$.

و لدينا : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{4-3i-(-3-2i)}{1+i-(-3-2i)}=\dfrac{7-i}{4+3i}=\dfrac{(7-i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=1-i$

و منه $k=\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|1-i|=\sqrt{2}$ و $\theta=\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(1-i)=-\dfrac{\pi}{4}$

2) كتابة العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي :

لدينا : $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\dfrac{-3-2i-(1+i)}{4-3i-(1+i)}=\dfrac{-4-3i}{3-4i}=\dfrac{-i(-4i+3)}{3-4i}=-i$ و منه $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $\begin{cases} \left|\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=1 \\ \arg\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} BA=BC \\ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

و منه المثلث ABC قائم في B و متساوي الساقين.

3) نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC و بـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$.

تعيين كلا من z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I :

$z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{-3-2i+1+i+4-3i}{3}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}i$ و $z_I=\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{-3-2i+4-3i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$

تبيان أن النقط B ، G و I في إستقامية:

لدينا : $\dfrac{z_G-z_I}{z_B-z_I}=\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}i\right)-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i\right)}{(1+i)-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i\right)}=\dfrac{1}{3}$ و هذا يعني أن $\overrightarrow{GI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BI}$ و منه النقط B ، G و I في إستقامية.

4) النقطة D نظيرة النقطة B بالنسبة إلى I .

طبيعة الرباعي $ABCD$:

الرباعي مربع لأن المثلث ABC قائم متساوي الساقين.

5) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=5\sqrt{2}$.

أ ـ التحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) :

لدينا : $\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CC}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|=AC=|z_C-z_A|=5\sqrt{2}$ و منه $C\in(\Gamma)$.

بـ ـ تعيين طبيعة المجموعة (Γ) ثم إنشائها :

لدينا : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=5\sqrt{2}$ تكافئ $\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|=5\sqrt{2}$ تكافئ $MI=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ و منه المجموعة هي الدائرة التي مركزها I

و نصف قطرها $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ >}}\left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=\lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ >}}\left[\left(\frac{1}{(2x+1)^2}\right)\left[1+2\ln(2x+1)\right]\right]=-\infty$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x=-\frac{1}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{(2x+1)^2}+2\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=0$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=0$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2) أ ـ الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{4}{2x+1}\times(2x+1)^2-4(2x+1)\left[1+2\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^4}=\frac{(2x+1)\left[-8\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^4}=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

بـ ـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-8\ln(2x+1)$ لأن : $(2x+1)^3>0$ من أجل x من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right]$ و متناقصة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ تكافئ $1+2\ln(2x+1)=0$ تكافئ $\ln(2x+1)=-\frac{1}{2}$ تكافئ $2x+1=e^{-\frac{1}{2}}$ أي : $x=\frac{1}{2\sqrt{e}}-\frac{1}{2}$

إشارة $f(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1\right)$		$+\infty$
$f(x)$	||	$-$	0	$+$	

4) تبيان المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها :

الدالة f' قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f''(x)=\frac{\frac{-8\times 2}{2x+1}\times(2x+1)^3-3\times 2(2x+1)^2\times\left[-8\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^6}=\frac{16\left(-1+3\ln(2x+1)\right)}{(2x+1)^4}$$

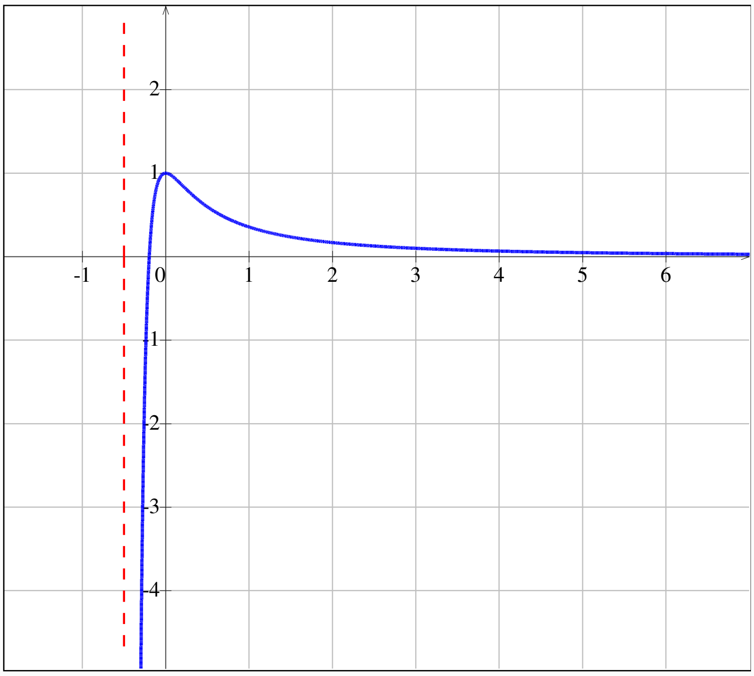
$f''(x)=0$ تكافئ $-1+3\ln(2x+1)=0$ تكافئ $\ln(2x+1)=\frac{1}{3}$ تكافئ $2x+1=e^{\frac{1}{3}}$ أي : $x=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$

إشارة $f''(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω إحداثييها : $\left(\frac{e^{\frac{1}{3}}-1}{2};\frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}\right)$.

الرسم :



II) لتكن الدالة g المعرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=2\left[-x+\ln(2x+1)\right]$.

1) أ ـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$g'(x)=2\left[-1+\frac{2}{2x+1}\right]=2\left[\frac{-2x+1}{2x+1}\right]$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+1$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

بـ- تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث: $1,2<\alpha<1,3$.

لدينا: $g(0)=0$.

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ و $\left]1,2;1,3\right[\subset\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ و $\begin{cases} g(1,2)\approx 0,05 \\ g(1,3)\approx -0,04 \end{cases}$

أي $g(1,2)\times g(1,3)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α حيث $1,2<\alpha<1,3$.

جـ- إشارة $g(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1: $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

إثبات أن: من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

لدينا: من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $f(x)-\frac{1}{2x+1}=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}-\frac{2x+1}{(2x+1)^2}=\frac{g(x)}{(2x+1)^2}$.

و لدينا: من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $g(x)<0$ و بالتالي $f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

و من جهة أخرى لدينا: من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $f(x)>0$.

إذن: من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

استنتاج $\lim_{n\to+\infty} I_n$:

لدينا: $0<\int_n^{n+1} f(x)dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx$ و منه $0<I_n<\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx$

و لدينا $\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_n^{n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ و منه $0<I_n<\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

و بالتالي: $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$

تصحيح مقترح لبكالوريا 2018 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \dfrac{9}{u_n + 5}$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

ب- بيّن أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و استنتج أنها متقاربة .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$

- أثبت أن (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

3) عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ، و أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - n^2\right)$.

التمرين الثاني (4ن)

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس ، منها 4 كرات بيضاء مرقمة بـ : 1 ، 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ : 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 2 ، 3 ، 3 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق .

نعتبر الحادثتين A : " الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني ".

و B : " الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم " .

1) أ- أحسب : $P(A)$ و $P(B)$ إحتمالي الحادثتين A و B على الترتيب .

ب- بيّن أن : $P(A \cap B) = \dfrac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا .

عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث (5ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ و $z_C = \overline{z_B}$.

أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

3) أ- تحقق أن : $\dfrac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و حدد طبيعة المثلث OBC .

ب- إستنتج أن : B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميّزة .

4) نسمّي (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق : $|z| = \left|\bar{z} - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$.

عيّن طبيعة المجموعة (γ) ثم عيّن صورتها بالدوران r .

التمرين الرابع (7ن)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38 < \alpha < -0.37$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x+1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) حيث : $(\Delta): y = 2x + 1$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) أنشئ (Δ)، (T) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 0{,}8$) .

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x = (1-m)e^{x}$

6) أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x = 1$.

ب- أحسب العدد A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها:

$x = 1$ ، $x = 3$ و $y = 2x + 1$

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

1) أحسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2n + 1$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n} = v_n$.

ب- استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) أحسب المجموعين S_n و T حيث : $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ و $T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \ldots + e^{u_{2018}}$

التمرين الثاني (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطة $A\left(1;-2;1\right)$ و المستويين $\left(P_1\right)$ و $\left(P_2\right)$ اللذين معادلتيهما على الترتيب : $-x+y+2z+1=0$ و $-3x+y+z+4=0$.

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}\left(1;5;-2\right)$ شعاع توجيه له .

2) بيّن أن المستويين $\left(P_1\right)$ و $\left(P_2\right)$ متقاطعان ثم تحقق أن تقاطعهما هو المستقيم $\left(\Delta\right)$.

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $\left(Q\right)$ الذي يشمل $B\left(-1;4;0\right)$ و يعامد كلا من $\left(P_1\right)$ و $\left(P_2\right)$ ثم استنتج تقاطع المستويات الثلاثة $\left(P_1\right)$، $\left(P_2\right)$ و $\left(Q\right)$.

4) لتكن $E\left(2;3;-1\right)$ و $H\left(0;3;-2\right)$ نقطتان من الفضاء .

أ- تحقق أن H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي $\left(P_1\right)$.

ب- حدد طبيعة المثلث EBH ثم أحسب V حجم رباعي الوجوه $AEBH$.

التمرين الثالث (5ن)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(\bar{z}-4+i\right)\left(z^2-4z+5\right)=0$ (يرمز $\bar{z}$ لمرافق العدد z)

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب :

$z_A=2+i$ ، $z_B=4+i$ و $z_C=\overline{z_A}$.

1) تحقق أن : $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا .

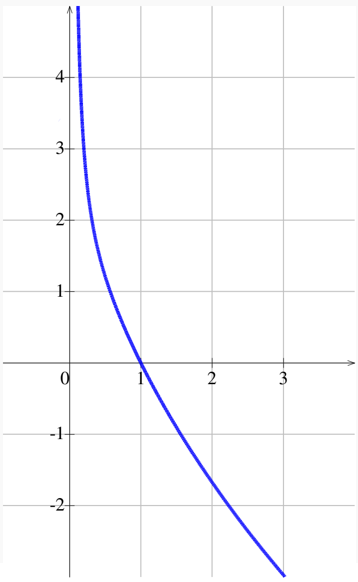
2) D نقطة من المستوي لاحقتها z_D بحيث : $\begin{cases}\left|z_D-z_A\right|=\left|z_B-z_A\right|\\ \arg\left(\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)\end{cases}$

بيّن أن المثلث ABD متقايس الأضلاع و أحسب z_D.

3) أحسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD، ثم عيّن نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه A و يحول G إلى D .

4) عيّن $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث : $\arg\left(\dfrac{z_G-z}{z_C-z}\right)=\pi+2k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

التمرين الرابع (7ن)



I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-\left(\ln x\right)^2-\ln x-1$

$\left(C_g\right)$ المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبيّن في الشكل المقابل :

- أحسب $g\left(1\right)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g\left(x\right)$.

II) f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f\left(x\right)=\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f\left(x\right)$ و بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0$، ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'\left(x\right)=\dfrac{g\left(x\right)}{\left(1+x\ln x\right)^2}$.

بـ- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أن $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل ، ثم أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f).

4) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

III) n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (I_n) .

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1}=1-\frac{9}{u_n+5}$.

1) أ- البرهان بالتراجع أن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>-2$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>-2$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=1$ و منه $u_0>-2$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n>-2$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}>-2$.

لدينا حسب الفرض $u_n>-2$ و منه $u_n+5>-2+5$ و منه $\frac{1}{u_n+5}<\frac{1}{3}$ و منه $-\frac{9}{u_n+5}>-\frac{9}{3}$

أي $1-\frac{9}{u_n+5}>1-3$ أي: $u_{n+1}>-2$. و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>-2$.

بـ- تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}-u_n=1-\frac{9}{u_n+5}-u_n=\frac{u_n+5-9-u_n^2-5u_n}{u_n+5}=\frac{-u_n^2-4u_n-4}{u_n+5}=-\frac{(u_n+2)^2}{u_n+5}$$

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n<0$.

و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

ـ المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد -2 ، إذن فهي متقاربة .

2) المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\frac{1}{u_n+2}$

ـ إثبات أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{3}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+2}=\frac{1}{1-\frac{9}{u_n+5}+2}=\frac{1}{3-\frac{9}{u_n+5}}=\frac{1}{\frac{3u_n+6}{u_n+5}}=\frac{u_n+5}{3u_n+6}=\frac{u_n+2+3}{3(u_n+2)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}+v_n$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=\frac{1}{3}$ و حدها الأول v_0 حيث: $v_0=\frac{1}{u_0+2}=\frac{1}{3}$.

3) كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0+nr$ و منه $v_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}n=\frac{1}{3}(1+n)$.

كتابة u_n بدلالة n: $v_n=\frac{1}{u_n+2}$ و منه $\frac{1}{v_n}=u_n+2$ ، أي: $u_n=\frac{1}{v_n}-2$

و منه: $u_n=\frac{1}{\frac{1}{3}(1+n)}-2=\frac{3}{1+n}-2$.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{1+n}-2\right)=-2$. لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{1+n}\right)=0$.

4) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_0v_0+u_1v_1+....+u_nv_n=\frac{1}{3}(1-n^2)$.

لدينا: $v_n=\frac{1}{u_n+2}$ و منه: $u_nv_n+2v_n=1$ أي $u_nv_n=1-2v_n$.

لدينا :

$$u_0v_0+u_1v_1+....+u_nv_n=(1-2v_0)+(1-2v_1)+....+(1-2v_n)$$
$$=1\times(n+1)-2(v_0+v_1+.....+v_n)$$
$$=n+1-2\left[\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)\right]$$
$$=n+1-\left[(n+1)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n\right)\right]$$

و منه: $u_0v_0+u_1v_1+....+u_nv_n=(n+1)\left[1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n\right)\right]=(n+1)\left(\frac{1-n}{3}\right)=\frac{1}{3}(1-n^2)$

حل مقترح التمرين الثاني

عدد السحبات الممكنة هو: $C_{10}^3=\frac{10!}{3!\times7!}=120$.

1) أ ـ حساب الإحتمالات :

A : " الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني ". أي الحصول على ثلاثة ألوان الأبيض و الأحمر و الأخضر .

$$P(A)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_3^1}{120}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

B : " الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم " .

$$P(B)=\frac{C_5^3+C_4^3}{120}=\frac{14}{120}=\frac{7}{60}$$

بـ ـ تبيان أن: $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$.

$A\cap B$: " الكريات الثلاث المسحوبة تحمل نفس الرقم و من ألوان مختلفة " .

$$P(A\cap B)=\frac{C_2^1\times C_2^1\times C_1^1+C_1^1\times C_1^1\times C_2^1}{120}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$

حساب الإحتمال الشرطي $P_A(B)$:

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{6}.$$

حساب $P(A\cup B)$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{36}{120}+\frac{14}{120}-\frac{6}{120}=\frac{44}{120}=\frac{11}{30}.$$

2) X المتغيِّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا .

لدينا : $X\in\{0;1;2;3\}$.

$$P(X=0)=\frac{C_5^3}{120}=\frac{10}{120} \quad ، \quad P(X=1)=\frac{C_5^1\times C_5^2}{126}=\frac{50}{120}$$

$$P(X=2)=\frac{C_5^2\times C_5^1}{126}=\frac{50}{120} \quad ، \quad P(X=3)=\frac{C_5^3}{126}=\frac{10}{120}$$

قانون الإحتمال:

X_i	0	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

بـ- حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}.$$

حل مقترح التمرين الثالث

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-\sqrt{3}z+1=0$.

لدينا : $\Delta=\left(-\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times1=-1=i^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_1=\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \quad و \quad z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$$

2) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي :

لدينا : $z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و منه : $|z_A|=1$.

و بفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_A=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_A=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_A)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و منه : $|z_B|=1$.

و بفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B ، يكون : $\begin{cases} \cos\theta_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ ، و منه $\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن : $z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

• تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$:

لدينا : $\dfrac{z_A}{z_B} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ و منه

$\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ يكافئ $e^{i\frac{n\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ يكافئ $\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ يكافئ $n = 12k + 2$ ، مع $k \in \mathbb{N}$.

3) أ. التحقق : $\dfrac{z_B}{z_C} = \dfrac{z_B}{\overline{z_B}} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $\dfrac{z_B}{z_C} = \dfrac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ معناه : $\begin{cases} OC = OB \\ \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ و منه المثلث OBC متقايس الأضلاع .

ب. إستنتاج أن : B هي صورة C بدوران r مع تعيين عناصره المميزة .

لدينا : $\dfrac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و منه $z_B - z_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_O)$ و منه : B هي صورة C بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

4) تعيين طبيعة المجموعة (γ) :

$|z| = \left|\overline{z} - \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$ تكافئ $|z| = |\overline{z} - z_B|$ تكافئ $|z| = |\overline{\overline{z} - z_B}|$ تكافئ $|z| = |z - z_C|$

و معناها : $OM = CM$ و بالتالي (γ) هي محور القطعة $[OC]$.

• تعيين صورة (γ) بالدوران r :

بما أن : $r(O) = O$ و $r(C) = B$ فإن صورة (γ) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+(x-1)e^{-x}\right) = -\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+(x-1)e^{-x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+xe^{-x}-e^{-x}\right) = 2$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = e^{-x} + \left(-e^{-x}\right)(x-1) = (2-x)e^{-x}$

لدينا :من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x} > 0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $2-x$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة g متناقصة على المجال $]2;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty;2]$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2+e^{-2}$	$\searrow$	2

3) أ- تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ و $]-0,38;-0,37[\subset]-\infty;2[$ و $\begin{cases} g(-0.38)\approx -0,017 \\ g(-0.37)\approx 0,016 \end{cases}$

أي $g(-0,38)\times g(-0,37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$.

بـ- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

1) أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)\right]=-\infty$.

بـ- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=0$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) بحيث : $(\Delta): y=2x+1$.

لدينا : $f(x)-y=f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) تحت (Δ)	

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x)=g(x)$ ،

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$f'(x)=2+(-1)e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(-x)=2+(x-1)e^{-x}=g(x)$.

- إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، و منه نستنتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$

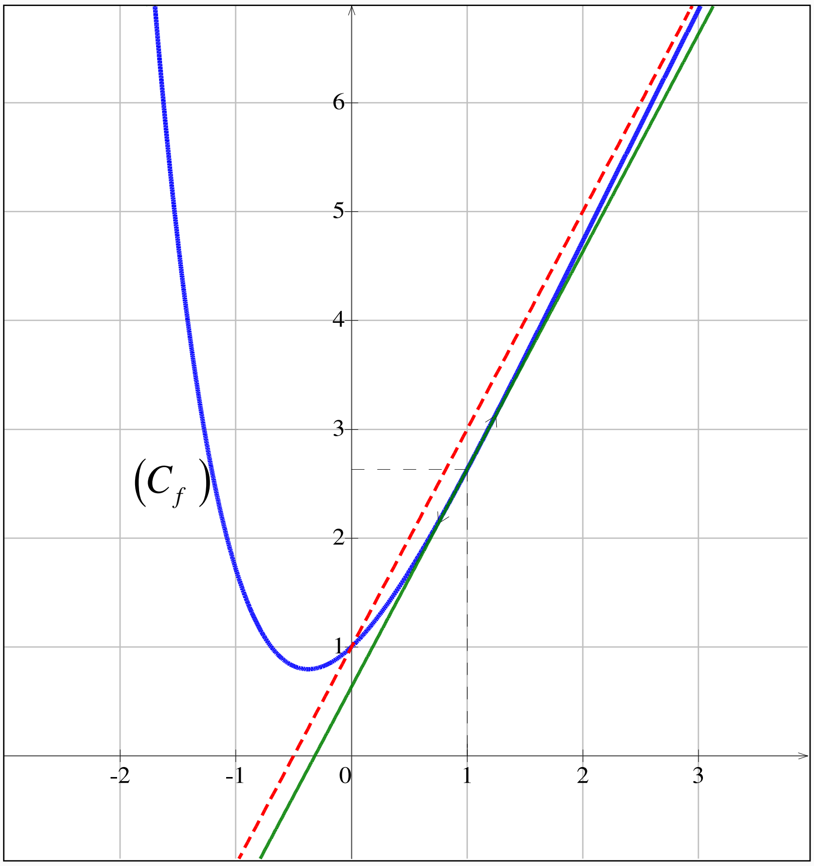
جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

لدينا : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $y=2x+1-\frac{1}{e}$ هي معادلة لـ (T).

4) الرسم :



5) المناقشة البيانية :

$x=(1-m)e^x$ تكافئ $xe^{-x}=(1-m)$ تكافئ $-xe^{-x}=m-1$ تكافئ $2x+1-xe^{-x}=2x+1+m-1$

أي $2x+1-xe^{-x}=2x+m$ أي: $f(x)=2x+m$ $\longleftarrow$ مناقشة مائلة .

إذا كان $m\in\left]-\infty;1-\frac{1}{e}\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

إذا كان $m=1-\frac{1}{e}$ المعادلة تقبل حل مضاعف .

إذا كان $m\in\left]1-\frac{1}{e};1\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما.

إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حل واحد معدوم .

إذا كان $m\in\left]1;+\infty\right[$ فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب تماما .

6) أ- تعيين دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.

الدالة $x\mapsto xe^{-x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$

كما يلي : $F(x)=\int_1^x te^{-t}\,dt$.

نضع $u(t)=t$ ، $v'(t)=e^{-t}$ و منه $u'(t)=1$ ، $v(t)=-e^{-t}$ ، و بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$F(x)=\left[-te^{-t}\right]_1^x-\int_1^x -e^{-t}\,dt=-xe^{-x}+e^{-1}-\int_1^x -e^{-t}\,dt=-xe^{-x}+e^{-1}-e^{-x}+e^{-1}=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$$

و منه الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$ هي : $F(x)=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$.

بـ - حساب العدد A مساحة الحيز : $A=\int_1^3\left((2x+1)-f(x)\right)dx=\int_1^3 xe^{-x}dx=F(3)-F(1)=2e^{-1}-4e^{-3}(u.a)$

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

1) حساب الحدود u_1، u_2 و u_3:

$$u_1 = u_0 + \ln(3) = \ln 3 \quad ، \quad u_2 = u_1 + \ln\left(\frac{5}{3}\right) = \ln 3 + \ln 5 - \ln 3 = \ln 5$$

$$u_3 = u_2 + \ln\left(\frac{7}{5}\right) = \ln 5 + \ln 7 - \ln 5 = \ln 7$$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $2n+3 > 2n+1$ و منه $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$. (كذلك لاحظ أن: $\frac{2n+3}{2n+1} - 1 = \frac{2}{2n+1}$)

• إتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

و نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ و منه $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > \ln 1$ أي $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > 0$.

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n > 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3) المتتالية العددية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 2n+1$

أ- البرهان بالتراجع أن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $e^{u_n} = v_n$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n: $e^{u_n} = v_n$"

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$، لدينا $u_0 = 1$ و منه $v_0 = e^{u_0} = 1$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $e^{u_n} = v_n$، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$.

لدينا $e^{u_{n+1}} = e^{u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)} = v_n \times \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = (2n+1) \times \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = 2n+3$ و منه: $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$.

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $e^{u_n} = v_n$.

بـ- كتابة عبارة u_n بدلالة n:

من أجل كل عدد طبيعي n: $e^{u_n} = v_n$ و منه $u_n = \ln(v_n) = \ln(2n+1)$.

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(2n+1) = +\infty$.

4) حساب المجموعين:

لدينا: $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) = \ln v_1 - \ln v_0 + \ln v_2 + \ln v_1 + \ldots + \ln v_n - \ln v_{n-1}$

و منه: $S_n = -\ln v_0 + \ln v_n = u_n$.

$$T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} \ldots + e^{u_{2018}} = v_{1439} + v_{1440} + \ldots + v_{2018} = \frac{2018 - 1439 + 1}{2}\left(2(1439 + 2018) + 2\right) = 2005640$$

حل مقترح التمرين الثاني

1) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ):

(Δ) يشمل A و $\vec{u}(1;5;-2)$ شعاع توجيه له و منه فتمثيل وسيطي لـ (Δ) من الشكل: $\begin{cases} x=t+1 \\ y=5t-2 \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-2t+1 \end{cases}$

2) تبيان أن المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان:

لدينا: $(P_1):-x+y+2z+1=0$ و $(P_2):-3x+y+z+4=0$.

و منه: $\vec{n_1}(-1;1;2)$ شعاع ناظمي لـ (P_1) و $\vec{n_2}(-3;1;1)$ شعاع ناظمي لـ (P_2).

$\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ ليسا مرتبطين خطيا لأن $y_{\vec{n_1}}=y_{\vec{n_1}}$ لكن $x_{\vec{n_1}}\neq x_{\vec{n_1}}$، و بالتالي المستويان (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم.

- التحقق أن تقاطع (P_1) و (P_2) هو المستقيم (Δ):

يكفي إثبات أن $(\Delta)\subset(P_1)$ و $(\Delta)\subset(P_2)$.

بتعويض التمثيل الوسيطي لـ (Δ) في معادلة (P_1) نجد: $-(t+1)+5t-2+2(-2t+1)+1=0$ (محققة)

و منه $(\Delta)\subset(P_1)$.

بتعويض التمثيل الوسيطي لـ (Δ) في معادلة (P_2) نجد: $-3(t+1)+5t-2+(-2t+1)+4=0$ (محققة)

و منه $(\Delta)\subset(P_2)$.

3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل $B(-1;4;0)$ و يعامد كلا من (P_1) و (P_2):

$(Q)\perp(P_1)$ و $(Q)\perp(P_2)$ معناه: $(Q)\perp(\Delta)$ و منه $\vec{u}(1;5;-2)$ شعاع ناظمي لـ (Q).

و بالتالي معادلة لـ من الشكل: $x+5y-2z+d=0$.

$B\in(Q)$ يعني أن: $(-1)+5\times4-2\times0+d=0$ أي $d=-19$ و منه ينتج: $(Q):x+5y-2z-19=0$.

- تقاطع المستويات الثلاثة (P_1)، (P_2) و (Q).

لدينا: $(P_1)\cap(P_2)=(\Delta)$ و منه يكفي دراسة تقاطع (Δ) و (Q).

نحل الجملة: $\begin{cases} x=t+1 \\ y=5t-2 \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-2t+1 \\ x+5y-2z-19=0 \end{cases}$، نجد: $(t+1)+5(5t-2)-2(-2t+1)-19=0$ أي: $t=1$.

إذن $E(2;3;-1)$ هي نقطة تقاطع المستويات الثلاثة (P_1)، (P_2) و (Q).

4) لتكن $E(2;3;-1)$ و $H(0;3;-2)$ نقطتان من الفضاء.

أ- التحقق أن H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1).

يكفي إثبات أن $H\in(P_1)$ و أن $\overrightarrow{BH}$ و $\vec{n_1}$ مرتبطين خطيا.

لدينا: $H\in(P_1)$ لأن: $0+3-4+1=0$. و لدينا: $\overrightarrow{BH}(1;-1;-2)$ و منه $\overrightarrow{BH}=-\vec{n_1}$

إذن: $H\in(P_1)$ و $\overrightarrow{BH}$ و $\vec{n_1}$ مرتبطان خطيا و بالتالي H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1).

ب- طبيعة المثلث EBH:

لدينا: $H\in(P_1)$ و $E\in(P_1)$ و $B\notin(P_1)$ و H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1) و بالتالي المثلث EBH قائم في H.

- حساب V حجم رباعي الوجوه $AEBH$.

$V=\frac{1}{3}\times S_{EBH}\times h$ حيث: $h=d(A;(Q))$. (يمكن التحقق أن (Q) هو نفسه (EBH)).

$h=d\left(A;(Q)\right)=\frac{|1+5(-2)-2-19|}{\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}}=\frac{30}{\sqrt{30}}=\sqrt{30}$ و $S_{EBH}=\frac{1}{2}EH\times HB=\frac{\sqrt{30}}{2}$

ومنه: $V=\frac{1}{3}\times S_{EBH}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{30}}{2}\times\sqrt{30}=5.uv$.

حل مقترح التمرين الثالث

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\left(\bar{z}-4+i\right)\left(z^2-4z+5\right)=0$

$\left(\bar{z}-4+i\right)\left(z^2-4z+5\right)=0$ تكافئ $\bar{z}-4+i=0$ أو $z^2-4z+5=0$.

$\bar{z}-4+i=0$ معناه: $\bar{z}=4-i$، أي: $z=4+i$.

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4z+5=0$:

لدينا: $\Delta=(-4)^2-4\times1\times5=-4=4i^2=(2i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما:

$z_1=\frac{4-2i}{2}=2-i$ و $z_2=\frac{4+2i}{2}=2+i$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $\left(\bar{z}-4+i\right)\left(z^2-4z+5\right)=0$ هي: $S=\{4+i;2+i;2-i\}$.

II) 1) التحقق أن: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$.

لدينا: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{4+i-(2+i)}{2-i-(2+i)}=\frac{2}{-2i}=\frac{1}{-i}=i$ وهو المطلوب.

- تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

لدينا: $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n=i^n=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{2}}$،

$\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيلي صرف معناه: $\arg\left(e^{i\frac{n\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$، أي: $\frac{n\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ أي: $n=2k+1$، مع $k\in\mathbb{N}$

2) تبيان أن المثلث ABD متقايس الأضلاع:

$$\begin{cases}|z_D-z_A|=|z_B-z_A|\\ \arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}\quad\text{تكافئ}\quad\begin{cases}\left|\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

تكافئ $\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه المثلث ABD متقايس الأضلاع.

- حساب z_D.

لدينا: $\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_D=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)+z_A$ أي: $z_D=3+\left(1+\sqrt{3}\right)i$.

3) حساب z_G:

G مركز ثقل المثلث ABD معناه G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(D,1)\}$ ومنه $z_G=\frac{z_A+z_B+z_D}{3}$

ومنه: $z_G=3+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)i$.

- S التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D، يعني: $z_D - z_A = a(z_G - z_A)$ أي: $a = \frac{z_D - z_A}{z_G - z_A}$

و منه: $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و منه نسبة التشابه هي: $|a| = \sqrt{3}$، و زاوية للتشابه هي: $\arg(a) = \frac{\pi}{6}$.

4) تعيين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث: $\arg\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi \,;\, (k \in \mathbb{Z})$.

لدينا: $\arg\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi \,;\, (k \in \mathbb{Z})$ يعني: $(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MG}) = \pi + 2k\pi \,;\, (k \in \mathbb{Z})$.

و منه المجموعة (Γ) هي قطعة المستقيم المفتوحة $]CG[$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$.

- حساب $g(1)$: $g(1) = 1 - (\ln 1)^2 - \ln 1 - 1 = 0$

- إشارة $g(x)$:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II) f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

1) حساب $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)$:

$\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^{>}} \left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right) = -\infty$ ، لأن: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^{>}} (1+\ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^{>}} (1+x\ln x) = 1 \end{cases}$ (تذكر أن: $\lim\limits_{x \to 0^{>}} x\ln x = 0$)

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

- تبيان أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x} + \ln x}\right) = 0$ ، (تذكر أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2) أ-تبيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x\ln x) - (\ln x + 1)(1+x\ln x)}{(1+x\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} + \ln x - (1+\ln x)^2}{(1+x\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1}{(1+x\ln x)^2}$$

و منه: من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

بـ-إتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

الدالة f متزايدة على المجال $]0;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) تبيان أن $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل :

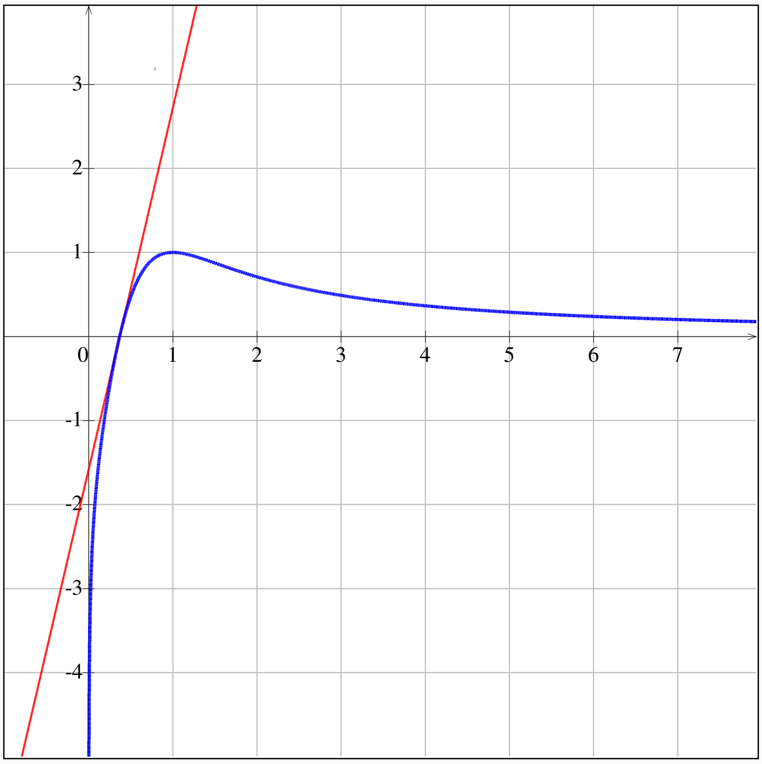
لتعيين نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ، نحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f(x)=0$.

$f(x)=0$ تكافئ $\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}=0$ تكافئ $1+\ln x=0$ تكافئ $\ln x=-1$ أي : $x=\frac{1}{e}$.

معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{e}$:

لدينا : $(T):y=f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right)+f\left(\frac{1}{e}\right)$ و منه $(T):y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$.

الرسم :



4) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

$(e-1)f(x)=e^2x-me$ تكافئ $f(x)=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$

حلول المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (T_m) ذي المعادلة $y=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$.

من البيان : المعادلة تقبل حلين متمايزين لما $-\frac{e}{e-1}m<-\frac{e}{e-1}$ أي $m>1$.

III) n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

لدينا : $I_n=\int_1^n f(x)dx=\int_1^n\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)dx=\left[\ln(1+x\ln x)\right]_1^n=\ln(1+n\ln n)$.

(لاحظ أن f من الشكل : $\frac{u'}{u}$)

2) دراسة إتجاه تغير المتتالية (I_n) :

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1}-I_n$

لدينا : $I_{n+1}-I_n=\int_1^{n+1} f(x)dx-\int_1^n f(x)dx=\int_1^n f(x)dx+\int_n^{n+1} f(x)dx-\int_1^n f(x)dx=\int_n^{n+1} f(x)dx$

و من أجل $n>1$: $\int_n^{n+1} f(x)dx>0$ و بالتالي المتتالية (I_n) متزايدة تماما .

تصحيح مقترح لبكالوريا 2019 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 13$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

1) أ- برهن بالبرهان بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

ب- أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة .

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

3) أكتب v_n بدلالة n ، ثم بيّن أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ و أحسب عندئذ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) بيّن أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0 - 1)\times(u_1 - 1)\times\ldots\times(u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

التمرين الثاني (4ن)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و كرية واحدة تحمل الرقم 2 و سبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 . (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد و نعتبر الحادثتين A و B حيث :

A : " سحب كريتين من نفس اللون " ، B : " سحب كريتين تحملان نفس الرقم "

1) بيّن أن إحتمال الحادثة A هو $P(A) = \frac{31}{66}$ و احسب إحتمال الحادثة B .

2) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس اللون ، ما إحتمال أن تحملا نفس الرقم ؟

3) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .

عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي و أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الثالث (5ن)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0$.

II) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها : i ، $2 - i$ و $2 + i$ على الترتيب .

1) أكتب العدد المركّب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2 + i$ نضع : $f(z) = \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$.

أ- عيّن المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $|f(z)| = \frac{1}{2}$.

ب- بيّن أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب .

3) نعتبر الدوران r الذي مركزه النقطة C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r و بيّن أن النقط D ، A و C في إستقامية .

ب- استنتج أن النقطة D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة .

التمرين الرابع (7ن)

f الدالة العددية المعرّفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا .

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيبيرية " ln " في المعلم السابق .

أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) .

4) أرسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .

5) H الدالة المعرّفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث t متغيّر حقيقي موجب تماما .

أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن عبارة $H(x)$ بدلالة x .

ب- أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين :
$x=3$ و $x=4$.

6) g الدالة المعرّفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$.

دون حساب عبارة $g(x)$ حدد إتجاه تغيّر الدالة g على مجموعة تعريفها .

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن)

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كريتان تحملان الرقم 0 و ثلاث تحمل الرقم 1 و الكريات الأخرى تحمل الرقم 2 . نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .

1) عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

2) بيّن أن إحتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$.

3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع .

ما إحتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداؤهما زوجي ؟

التمرين الثاني (4ن)

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $[4;7[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+2}+4$

1) أ- بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$.

ب- استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)\in[4;7[$.

2) برهن أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$.

ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)-x>0$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4\le u_n<7$.

بـ ـ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم بيّن أنها متقاربة.

4) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $7-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(7-u_n)$.

بـ ـ استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<7-u_n\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث(5ن)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث: $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2z_A$.

1) أ ـ أكتب العدد المركّب z_A على الشكل الأسي.

بـ ـ أحسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

2) أ ـ T الإنسحاب الذي يحول A إلى C ، عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب T.

بـ ـ استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) أكتب العدد المركب z_C-z_A على الشكل الأسي.

4) جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.

5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث تختلف عن A و تختلف عن C .

عيّن (E) مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\frac{z_A-z}{z_C-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

التمرين الرابع(7ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$.

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=e^x-ex \quad \text{و} \quad f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2.$$

1) أ ـ أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

بـ ـ إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f .

3) أحسب كلا من $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5) أرسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (يعطى $e^2-2e\approx 2$)

6) أحسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g).

7) h الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي: $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ ـ بيّن أن الدالة h زوجية.

بـ ـ من أجل $x\in[0;2]$ أحسب $h(x)+f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه.

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 13$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

1) أ ـ البرهان بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0 = 13$ و منه $u_0 > 1$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n > 1$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} > 1$.

لدينا حسب الفرض $u_n > 1$ و منه $\frac{1}{5}u_n > \frac{1}{5}\times 1$ و منه $\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} > \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$ أي $u_{n+1} > 1$. و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

بـ ـ دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}(1-u_n)$.

و لدينا : $u_n > 1$ من أجل كل عدد طبيعي n ، و منه $1 - u_n < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$

و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

ـ إستنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل إذن فهي متقاربة.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$.

ـ إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n،

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}(u_n - 1)\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln(u_n - 1) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + v_n .$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$ و حدها الأول : $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln 12$.

3) كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 + nr$ و منه $v_n = \ln 12 + n\ln\left(\frac{1}{5}\right)$ أي : $v_n = \ln 12 + \ln\left[\left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = \ln\left(\frac{12}{5^n}\right)$

- تبيان أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \ln(u_n - 1)$ و منه $e^{v_n} = u_n - 1$ و منه $u_n = 1 + e^{v_n}$

أي $u_n = 1 + e^{\ln\left(\frac{12}{5^n}\right)} = 1 + \frac{12}{5^n}$.

- حساب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{12}{5^n}\right) = 1$ لأن : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{12}{5^n}\right) = 0$.

4) تبيان أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0-1)\times(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{v_n}=u_n-1$ و منه

$$(u_0-1)\times(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\ldots\times e^{v_n}=e^{v_0+v_1+\ldots+v_n}$$

و $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n=\left(\frac{n+1}{2}\right)(v_0+v_n)=\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\ln 12+\ln\frac{12}{5^n}\right)=\left(\frac{n+1}{2}\right)\ln\left(\frac{12^2}{5^n}\right)=(n+1)\ln\left(\frac{12^2}{5^n}\right)^{\frac{1}{2}}$

أي : $S_n=\ln\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$. إذن : $(u_0-1)\times(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)=e^{S_n}=e^{\ln\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}}=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$

حل مقترح التمرين الثاني

عدد السحبات الممكنة : $C_{12}^2=\frac{12!}{2!(12-2)!}=66$.

1) تبيان أن إحتمال الحادثة A هو $P(A)=\frac{31}{66}$:

A : "سحب كريتين من نفس اللون"

$$P(A)=\frac{C_5^2+C_7^2}{66}=\frac{10+21}{66}=\frac{31}{66}$$

- حساب إحتمال الحادثة B :

B : "سحب كريتين تحملان نفس الرقم"

$$P(B)=\frac{C_8^2+C_4^2}{66}=\frac{28+6}{66}=\frac{34}{66}=\frac{17}{33}$$

2) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس اللون ، ما إحتمال أن تحملا نفس الرقم ؟

لدينا : $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ و $P(A\cap B)=\frac{C_4^2+C_3^2+C_4^2}{66}=\frac{15}{66}$ و منه $P_A(B)=\frac{\frac{15}{66}}{\frac{31}{66}}=\frac{15}{31}$.

3) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .

لدينا : $X\in\{3;4;5\}$.

$P(X=3)=\frac{C_5^2}{66}=\frac{10}{66}$ ، $P(X=4)=\frac{C_5^1\times C_7^1}{66}=\frac{35}{66}$ ، $P(X=5)=\frac{C_7^2}{66}=\frac{21}{66}$

قانون الإحتمال:

X_i	3	4	5
$P(X=X_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{21}{66}$

ب- حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=3\times\frac{10}{66}+4\times\frac{35}{66}+5\times\frac{21}{66}=\frac{275}{66}.$$

حل مقترح التمرين الثالث

I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-i)(z^2-4z+5)=0$

$(z-i)(z^2-4z+5)=0$ تكافئ $z=i$ أو $z^2-4z+5=0$.

لنحل في $\mathbb{C}$ في المعادلة $z^2-4z+5=0$:

لدينا: $\Delta=(-4)^2-4\times1\times5=-4=4i^2=(2i)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما:

$z_1=\frac{4+2i}{2}=2+i$ و $z_2=\frac{4-2i}{2}=2-i$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $(z-i)(z^2-4z+5)=0$ هي: $S=\{2-i;2+i;i\}$.

II) لدينا: $z_A=i$ ، $z_B=2-i$ و $z_C=2+i$.

1) كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي:

لدينا: $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=\frac{2+i-i}{2+i-(2-i)}=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=-i$ و منه $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

• استنتاج طبيعة المثلث ABC:

$\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $\begin{cases}\left|\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ /k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}AC=BC\\ (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$

و منه المثلث ABC قائم في C و متساوي الساقين.

2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع: $f(z)=\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$.

أ- تعيين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق: $|f(z)|=\frac{1}{2}$:

$\left|\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}\right|=\frac{1}{2}$ يكافئ $\frac{1}{2}\left|\frac{i(z+i-2)}{z-2-i}\right|=\frac{1}{2}$ يكافئ $\left|\frac{z-(2-i)}{z-(2+i)}\right|=1$ يكافئ $|z-z_B|=|z-z_C|$

و منه المجموعة (E) هي محور القطعة $[BC]$.

ب- تبيان أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب:

لدينا: $f(i)=\frac{i^2-1-2i}{2i-4-2i}=\frac{-2-2i}{-4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}(1+i)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

و منه $[f(i)]^{1440}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1440}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}e^{i360\pi}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}e^{i(0+180\times2\pi)}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}$

3) r الدوران الذي مركزه النقطة C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- تعيين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r:

الكتابة المختصرة للدوران r: $z'-z_C=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_C)$

و منه $z_D-z_C=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_C)$ و منه $z_D=i(z_B-z_C)+z_C$ أي: $z_D=i(-2i)+2+i=4+i$.

• تبيان أن النقط D ، A و C في إستقامية:

لدينا: $\frac{z_D-z_C}{z_A-z_C}=\frac{(4+i)-(2+i)}{i-(2+i)}=\frac{2}{-2}=-1$ و هذا يعني أن $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CA}$ و منه النقط D ، A و C في إستقامية.

بـ- استنتاج أن النقطة D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة :

لدينا : $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = -1$ و منه $z_D - z_C = -(z_A - z_C)$ و بالتالي النقطة D هي صورة A بتحاك مركزه C و نسبته -1 .

(أو بدوران مركزه C و زاويته π أو بتناظر مركزي بالنسبة لـ C أو بتشابه مباشر مركزه C و نسبته 1 و زاويته π)

حل مقترح التمرين الرابع

f الدالة العددية المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$.

1) أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x\right] = -\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور التراتيب) مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x\right] = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x\right] = +\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

بـ- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x\right] = +\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;2[\cup]2;+\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x + (x-2)^2}{x(x-2)^2} = \frac{-x + x^2 - 4x + 4}{x(x-2)^2} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2 - 5x + 4$ لكون $x(x-2)^2 > 0$ من أجل كل x من $]0;2[\cup]2;+\infty[$.

- إشارة $f'(x)$:

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	‖	−	0	+	

و منه : الدالة f متزايدة على المجالين $[4;+\infty[$ و $]0;1]$ و متناقصة على المجالين $]2;4]$ و $[1;2[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2} + \ln 4$	↗	$+\infty$

3) أ- $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x-2}\right) = 0$.

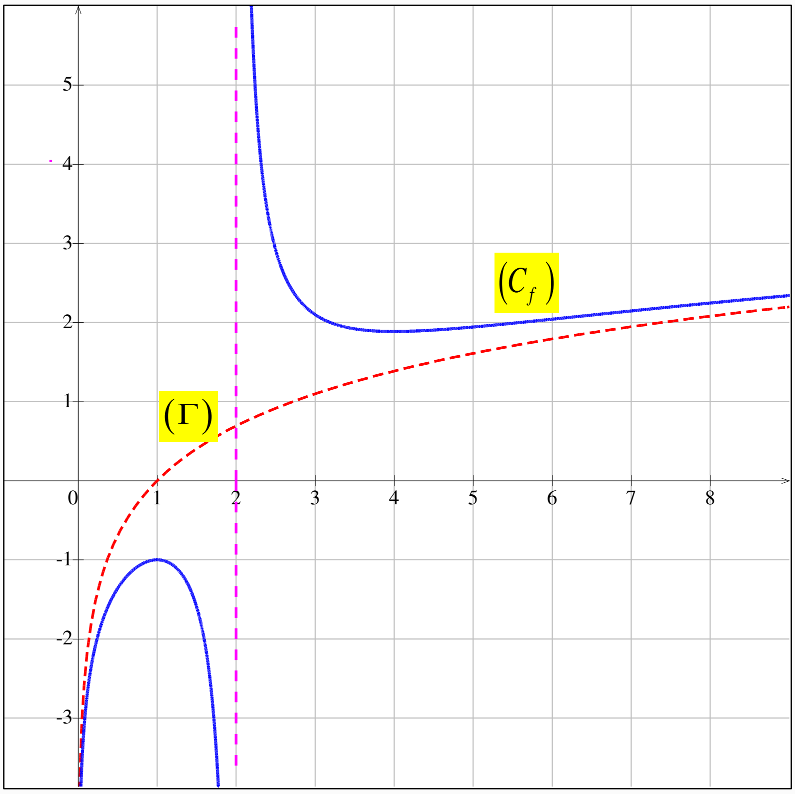
التفسير : المنحنى (Γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) :

لدينا : $f(x) - \ln x = \frac{1}{x-2}$ و منه إشارة الفرق $f(x) - \ln x$ من إشارة $x - 2$.

على المجال $]0;2[$: (C_f) يقع تحت (Γ) و على المجال $]2;+\infty[$: (C_f) يقع فوق (Γ) .

4) الرسم :



5) H الدالة المعرفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما .

أ- تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

نضع $u(t)=\ln(t)$ ، $v'(t)=1$ و منه $u'(t)=\frac{1}{t}$ ، $v(t)=t$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$H(x)=[t\ln t]_3^x-\int_3^x \frac{1}{t}\times t\,dt=x\ln x-3\ln 3-\int_3^x dt=x\ln x-3\ln 3-[t]_3^x$$

و منه $H(x)=x\ln x-3\ln 3-(x-3)$ أي : $H(x)=-x+3+x\ln x-3\ln 3$.

ب- حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين : $x=3$ و $x=4$.

$$A=\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}+\ln x\right)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+\int_3^4 \ln x dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+H(4)=\left[\ln|x-2|\right]_3^4+H(4)$$

و منه $A=\ln 2+4\ln 4-4-3\ln 3+3$ أي : $A=(-1+9\ln 2-3\ln 3)(u.a)$.

6) g الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ، و $g'(x)=-2f'(-2x)$.

إتجاه تغير الدالة g :

$g'(x)>0$ تكافئ $f'(-2x)<0$ تكافئ : $\begin{cases}1<-2x<2\\2<-2x<4\end{cases}$ أو تكافئ : $\begin{cases}-1<x<-\frac{1}{2}\\-2<x<-1\end{cases}$ أو .

و منه الدالة g متزايدة على $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[\cup]-2;-1[$ و متناقصة على $\left]-\frac{1}{2};0\right[\cup]-\infty;-2[$.

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

عدد السحبات الممكنة : $C_{10}^{3}=\dfrac{10!}{3!(10-3)!}=120$.

1) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة.

لدينا : $X\in\{0;1;2;4;8\}$.

$P(X=0)=\dfrac{C_2^1\times C_8^2+C_2^2\times C_8^1}{120}=\dfrac{64}{120}$ ، $P(X=1)=\dfrac{C_3^3}{120}=\dfrac{1}{120}$ ،

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2\times C_5^1}{120}=\dfrac{15}{120}$

$P(X=4)=\dfrac{C_5^2\times C_3^1}{120}=\dfrac{30}{120}$ ، $P(X=8)=\dfrac{C_5^3}{120}=\dfrac{10}{120}$.

قانون الإحتمال:

X_i	0	1	2	4	8
$P(X=X_i)$	$\dfrac{64}{120}$	$\dfrac{1}{120}$	$\dfrac{15}{120}$	$\dfrac{30}{120}$	$\dfrac{10}{120}$

- حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$E(X)=0\times\dfrac{64}{120}+1\times\dfrac{1}{120}+2\times\dfrac{15}{120}+4\times\dfrac{30}{120}+8\times\dfrac{10}{120}=\dfrac{231}{120}$.

2) تبيان أن إحتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\dfrac{7}{24}$.

A : "سحب ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا"

$$P(A)=\frac{C_7^3}{120}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$$

3) عدد السحبات الممكنة $A_{10}^{2}=90$.

B : "سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي"

C : "سحب كريتين تحملان رقمين جداؤهما زوجي"

$P(B)=\dfrac{2A_2^1\times A_3^1+2A_3^1\times A_5^1}{90}=\dfrac{42}{90}$ ، $P(C)=\dfrac{2A_3^1\times A_7^1+A_7^2}{90}=\dfrac{84}{90}$ ، $P(B\cap C)=\dfrac{A_7^2}{90}=\dfrac{42}{90}$

إحتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداؤهما زوجي :

$$P_C(B)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{42}{90}}{\frac{84}{90}}=\frac{42}{84}=\frac{1}{2}$$

حل مقترح التمرين الثاني

f الدالة المعرفة على المجال $[4;7[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+2}+4$

1) أ- تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[4;7[$ و $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ ، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$.

بـ- استنتاج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x) \in [4;7[$.

لدينا : الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$ ومنه من أجل كل $x \in [4;7[$ ، $f(x) \in [f(4);f(7)[$

أي : $f(x) \in [4+\sqrt{6};7[$ ولدينا $[4+\sqrt{6};7[\subset [4;7[$ ومنه : من أجل كل $x \in [4;7[$ ، $f(x) \in [4;7[$

2) لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$:

$$f(x)-x = \sqrt{x+2}+4-x = \frac{\left[\sqrt{x+2}+(4-x)\right]\left[\sqrt{x+2}-(4-x)\right]}{\sqrt{x+2}-(4-x)} = \frac{x+2-(4-x)^2}{x-4+\sqrt{x+2}} = \frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$$

الاستنتاج :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$: $f(x)-x = \dfrac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}} = \dfrac{(7-x)(x-2)}{x-4+\sqrt{x+2}}$

ومن أجل كل $x \in [4;7[$ ، $x-4+\sqrt{x+2} > 0$ و $(7-x)(x-2) > 0$ ومنه $f(x)-x > 0$.

3) المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \le u_n < 7$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $4 \le u_n < 7$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0 = 4$ ومنه $4 \le u_0 < 7$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $4 \le u_n < 7$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $4 \le u_{n+1} < 7$.

لدينا حسب الفرض $4 \le u_n < 7$ ومنه $4 \le f(u_n) < 7$ (حسب نتيجة السؤال 1 بـ) أي $4 \le u_{n+1} < 7$.

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \le u_n < 7$.

بـ- إستنتاج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \le u_n < 7$ و $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n > 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

- تبرير تقارب المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد 7 ، إذن فهي متقاربة .

4) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $7-u_{n+1} \le \frac{1}{4}(7-u_n)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$7-u_{n+1} = 7-\sqrt{u_n+2}-4 = 3-\sqrt{u_n+2} = \frac{\left(3-\sqrt{u_n+2}\right)\left(3+\sqrt{u_n+2}\right)}{3+\sqrt{u_n+2}} = \frac{7-u_n}{3+\sqrt{u_n+2}} .$$

ومن جهة أخرى : $4 \le u_n < 7$ يكافئ $\dfrac{1}{3+\sqrt{u_n+2}} < \dfrac{1}{4}$ ومنه $7-u_{n+1} < \frac{1}{4}(7-u_n)$.

بـ- استنتاج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 7-u_n \le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 7-u_n \le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0 = 4$ و $7-u_0 = 3$ منه $0 < 7-u_0 \le 3\left(\frac{1}{4}\right)^0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $0<7-u_n\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ونبرهن صحة $P(n+1)$

أي $0<7-u_{n+1}\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

لدينا حسب الفرض $0<7-u_n\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ولدينا $7-u_{n+1}<\frac{1}{4}(7-u_n)$ منه $0<7-u_{n+1}\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $0<7-u_n\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

(يمكن إستخدام طريقة أخرى غير البرهان بالتراجع)

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $0<7-u_n\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(7-u_n)=0$

أي: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=7$.

حل مقترح التمرين الثالث

$z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2z_A$.

1) أ- كتابة العدد المركب z_A على الشكل الأسي:

لدينا: $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ومنه: $|z_A|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

وبفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A، يكون: $\begin{cases}\cos\theta_A=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_A=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$، ومنه $\arg(z_A)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$، حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن: $z_A=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب- حساب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$:

لدينا: $z_B=\overline{z_A}=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019}+\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019}=e^{i673\pi}+e^{-i673\pi}=e^{i\pi}+e^{-i\pi}=-2$$

2) أ- T الإنسحاب الذي يحول A إلى C

تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب T .

الكتابة المختصرة للإنسحاب T: $z'=z+z_C-z_A$ أي: $z'=z-3z_A$

ومنه $z_D=z_B-3z_A$ ومنه $z_D=\overline{z_A}-3z_A$ أي: $z_D=\sqrt{2}-i\sqrt{6}-3\left(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)=-2\sqrt{2}-4i\sqrt{6}$.

ب- استنتاج طبيعة الرباعي $ABDC$:

لدينا: النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ أي: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ ومنه الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.

3) كتابة العدد المركب z_C-z_A على الشكل الأسي:

لدينا $z_C-z_A=-3z_A$ ومنه $z_C-z_A=6\sqrt{2}e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}$ أي: $z_C-z_A=6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

4) إيجاد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا :

لدينا : $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n = \left(\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^n = e^{-i\frac{n\pi}{3}}$.

$\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n \in \mathbb{R}$ يكافئ $\frac{-n\pi}{3} = k\pi$ يكافئ $n = -3k$ ، مع $k \in \mathbb{Z}_-$.

5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث تختلف عن A و تختلف عن C .

تعيين (E) مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

$\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) \in \mathbb{R}^+$ يكافئ $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = 0 + 2k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}$ أي $\left(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MA}\right) = 0 + 2k\pi$.

و بالتالي المجموعة (E) هي : $(AC) - [AC]$ (المستقيم (AC) باستثناء القطعة $[AC]$)

حل مقترح التمرين الرابع

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \qquad \text{و} \qquad g(x) = e^x - ex$$

1) أ- دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = e^x - e$

من أجل $x \in]-\infty;1]$ ، يكون $e^x \le e$ أي $g'(x) \le 0$ و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

من أجل $x \in [1;+\infty[$ ، يكون $e^x \ge e$ أي $g'(x) \ge 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

ب- إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ فإن 0 قيمة حدية صغرى للدالة g .

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \ge 0$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^x - ex = g(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) \ge 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

3) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x - \frac{1}{2}ex^2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}e\right)\right] = +\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x - \frac{1}{2}ex^2\right) = -\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}ex^2\right) = -\infty \end{cases}$

جدول تغيّرات الدالة f :

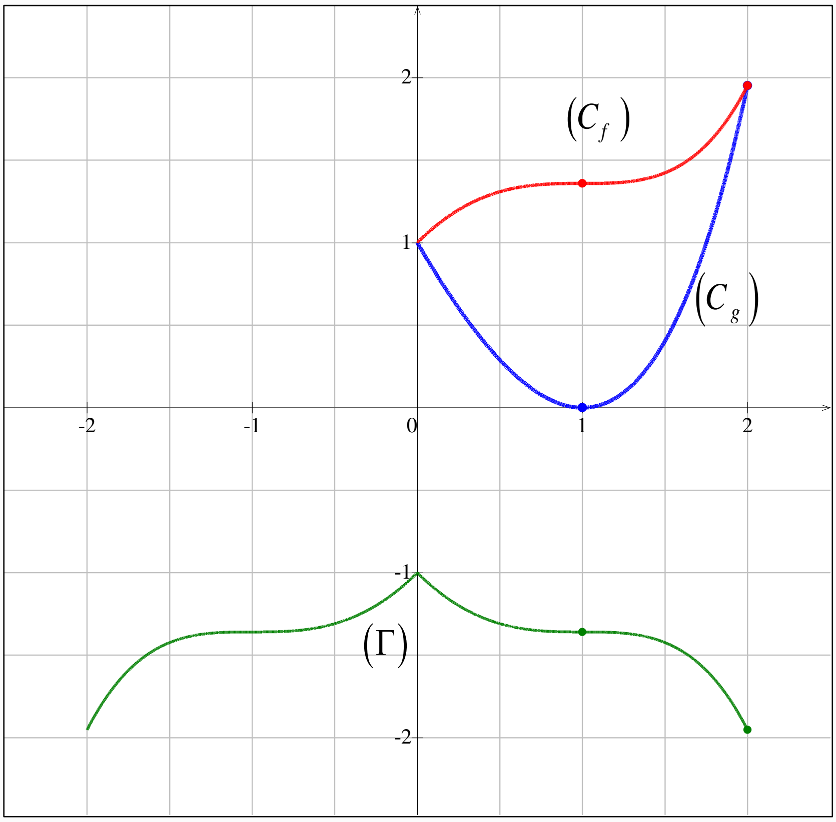
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$:

من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-g(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2-(e^x-ex)=-\frac{1}{2}ex^2+ex=ex\left(-\frac{1}{2}x+1\right)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (C_g)	(C_f) يقطع (C_g) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) فوق (C_g)	(C_f) يقطع (C_g) في النقطة $B(2;e^2-2e)$	(C_f) تحت (C_g)	

5) الرسم :



6) حساب مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g):

$$A=\int_0^2[f(x)-g(x)]dx=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}ex^2+ex\right)dx=\left[-\frac{1}{6}ex^3+\frac{1}{2}ex^2\right]_0^2=-\frac{8}{6}e+2e=\frac{2e}{3}(u.a)$$

و منه $A=\frac{2e}{3}\times 4=\frac{8e}{3}cm^2$.

7) h الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي: $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$.

أ- من أجل كل $x\in[-2;2]$ ، $-x\in[-2;2]$ و $h(-x)=\frac{1}{2}e(-x)^2-e^{|-x|}=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}=h(x)$.

و منه الدالة h زوجية.

بـ- من أجل $x\in[0;2]$ ، $h(x)+f(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^x+e^x-\frac{1}{2}ex^2=0$.

استنتاج كيفية رسم (Γ) انطلاقا من (C_f) :

من أجل $x\in[0;2]$ ، $h(x)=-f(x)$ و بالتالي (Γ) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $[0;2]$.

و لرسم (Γ) على المجال $[-2;0]$ نستخدم كون الدالة h زوجية.   الرسم : أنظر الشكل .

لا تترددوا بتقديم ملاحظاتكم و إقتراحاتكم

Bekhakhecha.khaled@gmail.com