الرياضيات السهلة

# حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية في البكالوريا

شعبة : علوم تجريبية

إنجاز : خالد بخاخشة

# 01 التمارين

**التمرين رقم 01** [باك 2009][م1]

I) $h$ دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$ .

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} h(x)$ .

2) بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ : $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و إستنتج اتجاه تغيَر الدالة $h$ ثم أنجز جدول تغيَراتها .

3) أحسب $h(0)$ و إستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم $x$ .

II) لتكن $f$ دالة عددية معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ .

نرمز بـ $(C_f)$ لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$ ، ثم فسَر هذه النتيجة بيانيا .

بـ ـ باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$ .

جـ ـ إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

د ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ .

هـ ـ أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

2) بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيَرات الدالة $f$ .

3) بيَن أن المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند النقطة التي فاصلتها محصورة بين $3{,}3$ و $3{,}4$ .

4) أرسم $(C_f)$ .

**التمرين رقم 02** [باك 2010][م1]

I) $f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=1+\ln(2x-1)$ .

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\>}} f(x)$ .

2) بيَن أن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $I$ ، ثم شكَل جدول تغيَراتها .

3) عيَن فاصلة النقطة من $(C_f)$ التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم $(d)$ ذي المعادلة $y=x$ .

4) أ ـ أثبت أنه من أجل كل $x$ من $I$ يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث $a$ ، $b$ عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

بـ ـ استنتج أنه يمكن رسم $(C_f)$ إنطلاقا من $(C)$ منحى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ ثم أرسم $(C)$ و $(C_f)$ .

II) نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $I$ بـ : $g(x)=f(x)-x$ .

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\>}} g(x)$ ثم بيَن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $g$ على $I$ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ ـ أحسب $g(1)$ ثم بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا $\alpha$ . تحقق أن $2<\alpha<3$ .

بـ ـ أرسم $(C_g)$ منحنى الدالة $g$ على المجال $\left]\frac{1}{2};5\right[$ في المعلم السابق .

إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $I$ ثم حدد وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(d)$ .

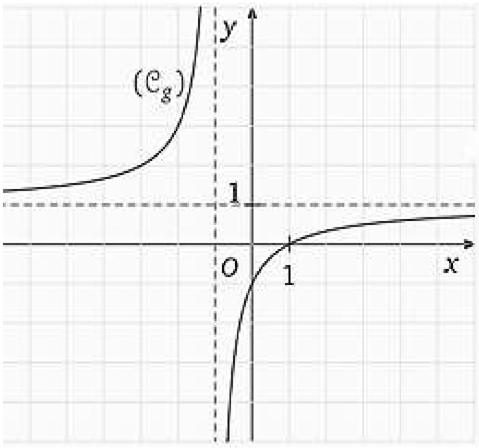
4) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]1;\alpha[$ فإن : $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$ .

## التمرين رقم 03

**[باك 2011][م1]**

**I)** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

و $(C_g)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل) ،




**بقراءة بيانية :**

أ ـ شكّل جدول تغيّرات الدالة $g$ .

بـ ـ حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$ .

جـ ـ عيّن بيانيا قيم $x$ التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

**II)** لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا.

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$ .

بـ ـ أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ .

3) باستعمال الجزء $I$) السؤال جـ ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$ .

## التمرين رقم 04

**[باك 2012][م1]**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أ - أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ <}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

بـ - أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x(x-1)}$ .

إستنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ ـ بيّن المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $-\infty$ .

بـ ـ أدرس وضع المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$ .

5) أنشئ المنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ .

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ .

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم $(AB)$ .

ب- بيّن أن المستقيم $(AB)$ يمس المنحنى $(C_f)$ في نقطة $M_0$ يطلب تعيين إحداثيتها .

7) $g$ الدالة المعرّفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$ .

بيّن أنه من كل $x\in]-\infty;0[$ : $g'(x)=f(x)$ .

## التمرين رقم 05

[باك 2013][م2]

I) $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$ .

1) أدرس تغيّرات الدالة $g$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) إستنتج أنه من أجل كل $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$ .

II) $f$ الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$ .

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ . (وحدة الطول $2cm$ )

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$ . فسّر النتيجة بيانيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2) أ- بيّن أنه من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب- أدرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

جـ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم تحقق أن $0<\alpha<0,5$ .

3) أ- بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ .

ب- أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ .

4) نقبل أن المستقيم $(T)$ ذا المعادلة $y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى $(C_f)$ في نقطة فاصلتها $x_0$ .

أ- أحسب $x_0$ .

ب- أرسم المستقيمين المقاربين و المماس $(T)$ ثم المنحنى $(C_f)$ .

جـ- عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.

## التمرين رقم 06

[باك 2014][م1]

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا.

ب- أدرس إتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ- أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته : $y=1$ .

ب- أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا $\alpha$، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

3) أنشئ $(T)$ و $(C_f)$.

4) لتكن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

و ليكن $(C_h)$ تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

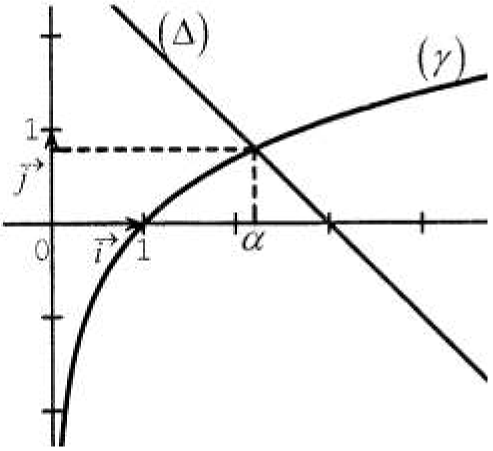
ب- أنشئ المنحنى $(C_h)$ إعتمادا على المنحنى $(C_f)$.

جـ- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

## التمرين رقم 07

[باك 2015][م1]

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.




I) $(\gamma)$ التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ و $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$

$\alpha$ هي فاصلة نقطة تقاطع $(\gamma)$ و $(\Delta)$.

1) بقراءة بيانية حدد وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ على $]0;+\infty[$.

2) $g$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$.

إستنتج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$.

3) تحقق أن: $2,2<\alpha<2,3$.

II) $f$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

3) بيّن أن: $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$، ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى حامل محور الفواصل، ثم أنشئ $(C_f)$ على المجال $]0;e^2]$.

## التمرين رقم 08

[باك 2016][د1][م1]

I) $g$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $g$.

2) أحسب $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$، $g(x)>0$.

II) $f$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$.

و $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب ـ شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ .

3) أكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C)$ في النقطة التي فاصلتها 1 .

4) بيّن أن $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ حيث : $y = x-1$ معادلة له .

ب ـ أدرس الوضع النسبي لـ $(C)$ و $(\Delta)$.

5) أرسم المستقيمين $(T)$ و $(\Delta)$ ثم المنحنى $(C)$ .

6) $m$ عدد حقيقي . $(\Delta_m)$ المستقيم حيث : $y = mx - m$ معادلة له .

أ ـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta_m)$ .

ب ـ ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$ .

## التمرين رقم 09

[باك 2016][د2][م1]

I) $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x) = -1+(x+1)e+2\ln(x+1)$ . ( العدد $e$ هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) أدرس تغيّرات الدالة $g$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$ .

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي $x$ على المجال $]-1;+\infty[$ .

II) $f$ الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{e}{x+1} + \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أ ـ بيّن أن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا .

ب ـ بيّن أنه من أجل كل $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

جـ ـ أدرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

د ـ أرسم المنحنى $(C_f)$. (نقبل أن : $f(\alpha) = 3,16$ )

2) نعتبر الدالة العددية $k$ المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x) = f\left(-|x|\right)$ ، $(C_k)$ تمثيلها لبياني في المعلم السابق.

أ ـ بيّن أن الدالة $k$ زوجية .

ب ـ بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى $(C_k)$ انطلاقا من المنحنى $(C_f)$ ثم أرسمه . (دون دراسة تغيرات الدالة $k$ )

جـ ـ ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة $k(x) = m$ .

## التمرين رقم 10

[باك 2017][م1]

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $D$ حيث $D = ]-\infty;-1[ \cup ]1;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{2}{3}x + \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة $f$ فردية ثم فسّر ذلك بيانيا .

2) أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

استنتج أن $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب .

3) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $D$ ، $f'(x) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)$ .

إستنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1.8 < \alpha < 1.9$

5) بيَن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ ثم أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$ .

6) أنشئ المنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ .

7) $m$ وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

## التمرين رقم 11

**[باك 2017][د إ][م1]**

نعتبر $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$ .

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا .

2) أ ـ بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f'(x)=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$

ب ـ أدرس إتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$ .

4) بيَن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف $\omega$ يطلب تعيين إحداثييها ، ثم أنشئ $(C_f)$ .

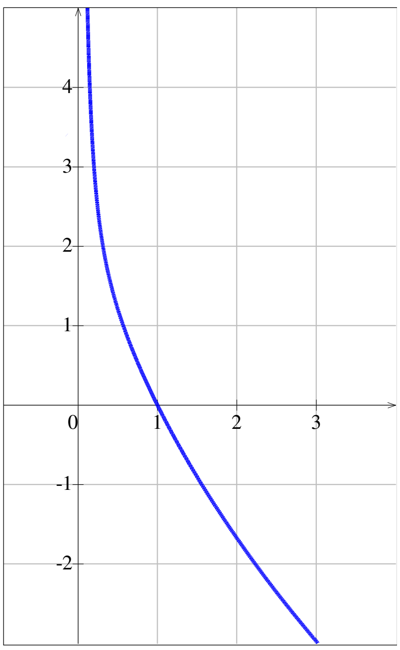
## التمرين رقم 12

**[باك 2018][م1]**

I) $g$ الدالة العددية ذات المتغيّر الحقيقي $x$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$

$(C_g)$ المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبين في الشكل المقابل :

ـ أحسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$ .




II) $f$ الدالة العددية ذات المتغيّر الحقيقي $x$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} f(x)$ و بيَن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ .

ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2) أ ـ بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$ .

ب ـ استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكّل جدول تغيّراتها .

3) بيَن أن $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ $(T)$ مماس المنحنى $(C_f)$ في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل ، ثم أرسم المماس $(T)$ و المنحنى $(C_f)$ .

4) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

## التمرين رقم 13

[باك 2019][م1]

$f$ الدالة العددية المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln x$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا .

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $f$ على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيّراتها .

3) نسمي $(\Gamma)$ المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيبيرية " $\ln$ " في المعلم السابق .

أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب- أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمنحنى $(\Gamma)$ .

4) أرسم بعناية المنحنى $(\Gamma)$ ثم المنحنى $(C_f)$ .

5) $g$ الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$ . دون حساب عبارة $g(x)$ حدد إتجاه تغيّر الدالة $g$ .

## التمرين رقم 14

[باك 2020][م1]

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x^2}$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ . الوحدة $2cm$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا ثم بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ .

ب- بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ .

جـ- أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

2) الدالة العددية $g$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^3-1+2\ln x$ .

أ- بيّن أن $g$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ .

ب- أحسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ من المجال $]0;+\infty[$ .

3) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ .

ب- استنتج إتجاه تغيّر الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أن التمثيل البياني $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$ ، يطلب تعيين معادلة له .

5) أنشئ $(T)$ ، $(\Delta)$ و $(C_f)$ .

6) الدالة العددية $h$ معرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=-|x|+1+\frac{\ln|x|}{x^2}$ .

أ- بيّن أن الدالة $h$ زوجية .

ب- إشرح كيف يتم إنشاء المنحنى $(C_h)$ الممثل للدالة $h$ إنطلاقا من $(C_f)$ . (لا يُطلب إنشاء $(C_h)$ )

" The only way to learn mathematics is to do mathematics "

## حل مقترح للتمرين 01

I) $h$ الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1) النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2+2x+\ln(x+1)\right]=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} h(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left[x^2+2x+\ln(x+1)\right]=-\infty$

2) الدالة $h$ قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-1;+\infty[$ :

$$h'(x)=2x+2+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

إتجاه تغير الدالة $h$ :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-1;+\infty[$ : $x+1>0$ و $1+2(x+1)^2>0$ و منه $h'(x)>0$

و بالتالي الدالة $h$ متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة $h$ :

| $x$ | $-1$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ |
| $h(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ |

حساب $h(0)$ و إستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم $x$ :

$$h(0)=0^2+2\times 0+\ln(0+1)=0$$

- إشارة $h(x)$ :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

II) $f$ الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

1) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$ :

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left(x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\ln(x+1)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى $(C_f)$.

بـ- باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، نبرهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$ .

نضع $t=\ln u$ فيكون $u=e^t$ و منه : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^t}{t}\right)}=0$ .

جـ- إستنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$ .

د ـ حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=0$$

التفسير البياني : المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ .

هـ ـ دراسة وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل :

لندرس إشارة الفرق $f(x)-(x-1)$ .

$f(x)-(x-1)=-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ و بالتالي إشارة $f(x)-(x-1)$ من إشارة $-\ln(x+1)$ لأن $x+1>0$ .

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضع النسبي | | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(0;-1)$ . | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | |

2) أ ـ الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-1;+\infty[$ :

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)-1\times\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=1-\left(\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

جدول تغيّرات الدالة $f$ :

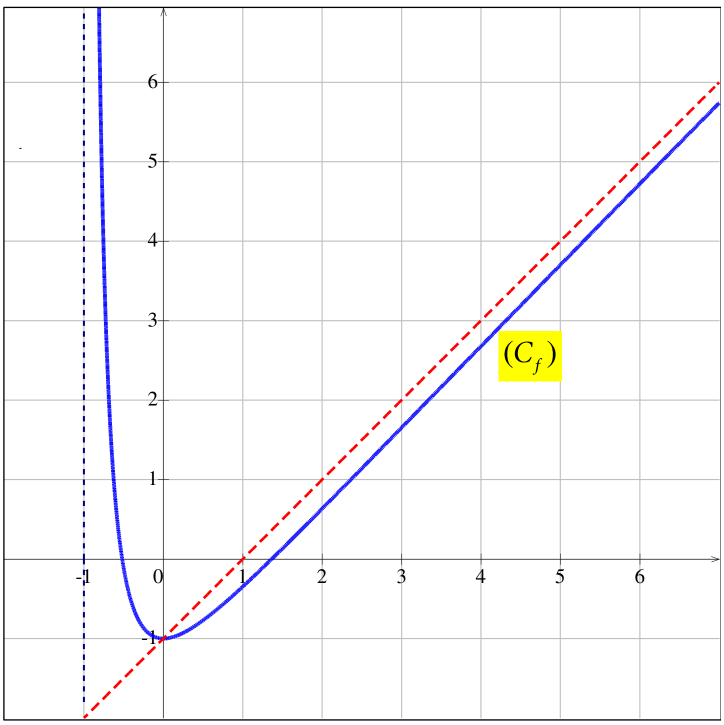
| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

3) تبيان أن المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$ .

الدالة $f$ مستمرة و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$ و $[3.3;3.4]\subset[0;+\infty[$ ولدينا $\begin{cases} f(3.3)\approx 1.96 \\ f(3.4)\approx 2.06\end{cases}$ أي $f(3.3)<2<f(3.4)$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا في المجال $[3.3;3.4]$.

4) الرسم :



## 02 حل مقترح للتمرين

I) $f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x)=1+\ln(2x-1)$ .

1) النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\ln(2x-1)\right]=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\left[1+\ln(2x-1)\right]=-\infty$ .

2) تبيان أن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $I$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $I$ ، و من أجل كل $x$ من $I$ ، $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $I$ ، $2x-1>0$ أي $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $I$ .

جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ |

3) تعيين فاصلة النقطة من $(C_f)$ التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم $(d)$ ذي المعادلة $y=x$ .

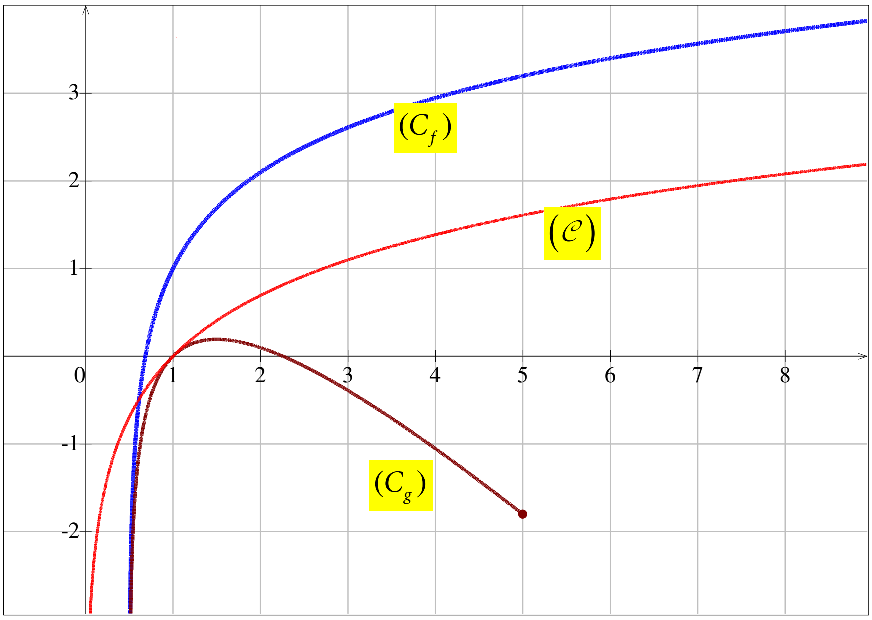
فاصلة هذه النقطة هي حل للمعادلة $f'(x)=1$ في $I$ .

$f'(x)=1$ تكافئ $\dfrac{2}{2x-1}=1$ تكافئ $2=2x-1$ أي $x=\dfrac{3}{2}$ .

4) أ- من أجل كل $x$ من $I$ : $f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=1+\ln 2+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ، و منه : $a=-\dfrac{1}{2}$ و $b=1+\ln 2$ .

بـ- لدينا : $f(x)=h(x+a)+b$ حيث : $h(x)=\ln x$ و منه $(C_f)$ هو صورة $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$ أي $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1+\ln 2\end{pmatrix}$ .

الرسم :



II) $g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $I$ بـ : $g(x)=f(x)-x$

1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}}(f(x)-x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}}[1-x+\ln(2x-1)]=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\left[\dfrac{1-x}{2x-1}+\dfrac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]=-\infty$ (تذكر أن : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$ )

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة $g$ على $I$ :

الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على $I$ ، و $g'(x)=-1+\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{-2x+3}{2x-1}$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $I$ ، $2x-1>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+3$ .

إشارة $g'(x)$ :

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

الدالة $g$ متزايدة على المجال $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ .

جدول تغيرات الدالة $g$ :

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{1}{2}+\ln 2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

3) أ ـ لدينا : $g(1)=0$ .

الدالة $g$ مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ و $\begin{cases} g\left(\frac{3}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}\approx 0{,}19 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ ، و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا $\alpha$ .

التحقق أن $2<\alpha<3$ :

لدينا : $\begin{cases} g(2)\approx 0{,}09 \\ g(3)\approx -0{,}39 \end{cases}$ أي : $g(2)\times g(3)<0$ و منه $2<\alpha<3$ .

بـ-رسم المنحنى $(C_g)$ : أنظر الشكل السابق .

4) إشارة $g(x)$ :

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(d)$ :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-x=g(x)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $g(x)$ .

إذن : من أجل $x\in\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]\alpha;+\infty\right[$ ، يكون $(C_f)$ واقعا أسفل $(d)$.

من أجل $x\in\left]1;\alpha\right[$ ، يكون $(C_f)$ واقعا أعلى من $(d)$ .

$(C_f)$ يقطع $(d)$ في النقطتين $A(1;1)$ و $B(\alpha;\alpha)$ .

5) الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $\left]1;\alpha\right[$ و منه : من أجل كل $x\in\left]1;\alpha\right[$ فإن : $f(x)\in\left]f(1);f(\alpha)\right[$ .

و لدينا : $f(1)=1$ و $f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha=\alpha$ ، إذن : من أجل كل $x\in\left]1;\alpha\right[$ فإن : $f(x)\in\left]1;\alpha\right[$ .

**I)** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

أ ـ جدول تغيّرات الدالة $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | \|\| | $+$ | |
| $g(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ |

بـ ـ حل المتراجحة $g(x)>0$ بيانيا :

$g(x)>0$ تكافئ $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ .

جـ ـ تعيين قيم $x$ التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$ :

$0<g(x)<1$ تكافئ $x\in]1;+\infty[$ .

**II)** الدالة $f$ معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ .

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left[\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$ .

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى $(C_f)$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]=1$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0\end{cases}$ .

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$ .

2) أ ـ الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]1;+\infty[$ :

$$g'(x)=\frac{1\times(x+1)-1\times(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

بـ ـ حساب $f'(x)$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]1;+\infty[$ :

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{(x+1)^2}\left(\frac{2x}{x-1}\right)=\frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]1;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ .

جدول تغيّرات الدالة $f$ :

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ |

3) باستعمال الجزء $I$) السؤال جـ ، تعيين إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$ .

لدينا حسب الجزء $I$) السؤال جـ : من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ ، فإن $0<\dfrac{x-1}{x+1}<1$ و منه $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)<0$ .

## حل مقترح للتمرين 04

$f$ الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ : $f(x)=x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ .

1) أ ـ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left[x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}(x+5)=5\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left[6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty\end{cases}$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب ) مقارب للمنحنى $(C_f)$ .

بـ ـ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+5)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]=0\end{cases}$

2) الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-\infty;0[$ :

$$f'(x)=1+6\left(\dfrac{\dfrac{-1}{(x-1)^2}}{\dfrac{x}{x-1}}\right)=1-\dfrac{6}{(x-1)^2}\times\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{6}{x(x-1)}=\dfrac{x(x-1)-6}{x(x-1)}=\dfrac{x^2-x-6}{x(x-1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-\infty;0[$ ، $\dfrac{x}{x-1}>0$ و منه $x(x-1)>0$ .

من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-\infty;0[$ ، $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ و منه :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

الدالة $f$ متزايدة على المجال $]-\infty;-2]$ و متناقصة على المجال $[-2;0[$ .

جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3+6\ln\dfrac{2}{3}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

3) أ ـ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+5)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]=0$ و منه المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $-\infty$ .

بـ ـ دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-(x+5)=6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ :

من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-\infty;0[$ ، $x>x-1$ و منه $\dfrac{x}{x-1}<1$ و بالتالي $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)<0$ .

إذن نستنتج أن $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ .

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$ .

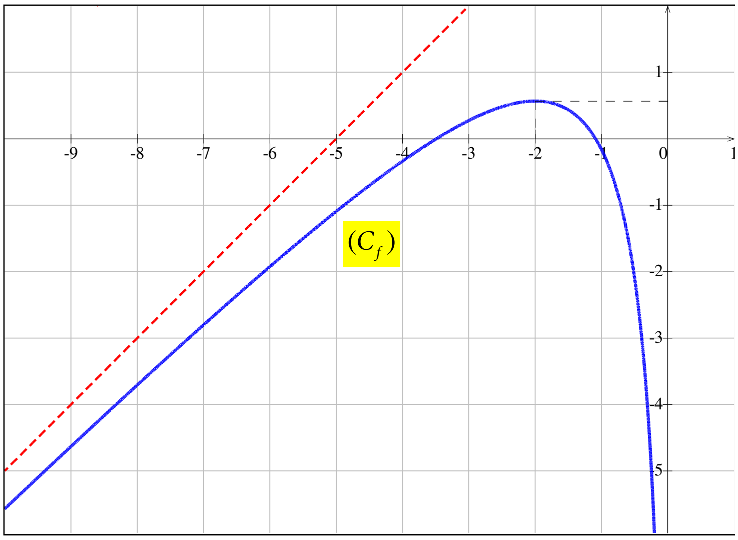
• الدالة $f$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2[$ و $]-3,5;-3,4[\subset]-\infty;-2[$ و $\begin{cases} f(-3.4)\approx 0,05 \\ f(-3.5)\approx -0,01 \end{cases}$

أي $f(-3,4)\times f(-3,5)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي $\alpha$ حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و يحقق $f(\alpha)=0$ .

• الدالة $f$ مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-2;0[$ و $]-1,1;-1[\subset]-2;0[$ و $\begin{cases} f(-1.1)\approx 0,02 \\ f(-1)\approx -0,16 \end{cases}$

أي $f(-1,1)\times f(-1)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي $\beta$ حيث $-1.1<\beta<-1$ و يحقق $f(\beta)=0$ .

5) الرسم :




6) أ- لدينا : $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ .

تبيان أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم $(AB)$ .

يمكن التحقق أن إحداثيات كلا من النقطتين $A$ و $B$ تحقق المعادلة المعطاة .

$y_A=\frac{1}{2}x_A+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=3+6\ln\frac{3}{4}$ ، $y_B=\frac{1}{2}x_B+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{4}$

( أو يمكن كتابة معادلة للمستقيم $(AB)$ و الحصول على المعادلة المعطاة )

بـ- تبيان أن المستقيم $(AB)$ يمس المنحنى $(C_f)$ في نقطة $M_0$ يطلب تعيين إحداثيتيها .

لدينا : معامل توجيه المستقيم $(AB)$ هو $\frac{1}{2}$ و بالتالي نحل في المجال $]-\infty;0[$ المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$ .

$f'(x)=\frac{1}{2}$ تكافئ $\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\frac{1}{2}$ تكافئ $x^2-x-12=0$ .

المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حل و هو $x_0=-3$ .

إذن : المستقيم $(AB)$ يمس المنحنى $(C_f)$ في النقطة $M_0(x_0;y_0)$ ، مع $y_0=f(-3)=2+6\ln\frac{3}{4}$ .

7) $g$ الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$ .

الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ :

$$g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6x}{x(x-1)}-\frac{6}{1-x}=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6}{x-1}+\frac{6}{x-1}=f(x)$$

I) $g$ الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$ .

1) دراسة تغيّرات الدالة $g$ :

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} g(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\left[x^2+2x+4-2\ln(x+1)\right]=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\ln(x+1)=-\infty$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\dfrac{x^2+2x+4}{x+1}-2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+4}{x+1}\right)=+\infty\end{cases}$ .

الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ، و $g'(x)=2x+2-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}$ .

إشارة $g'(x)$ من إشارة $x$ ، لأنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ فإن : $x+1>0$ و $x+2>0$ .

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

الدالة $g$ متناقصة على المجال $]-1;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$ .

جدول تغيّرات الدالة $g$ :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $4$ | ↗ | $+\infty$ |

2) من جدول التغيرات : من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)\geq 4$ و بالتالي نستنتج أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$ .

II) $f$ الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$ .

1) أ) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}\left[x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}\right]=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left[x(x+1)-1+2\ln(x+1)\right]=-\infty$ .

التفسير البياني : المستقيم ذا المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى $(C_f)$ .

بـ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ .

2) أ ـ الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ :

$$f'(x)=1-\frac{\frac{-2}{x+1}(x+1)-1\times(1-2\ln(x+1))}{(x+1)^2}=1-\frac{-3+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2+3-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

بـ ـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ :

لدينا :من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$ و بالتالي $f'(x)>0$ إذن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ .

جدول تغيّرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

جــ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-1;+\infty[$ :

الدالة $f$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=-\infty\end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-1;+\infty[$ حلا وحيدا $\alpha$.

التحقق أن $0<\alpha<0,5$.

لدينا : $]0;0,5[\subset]-1;+\infty[$ و $\begin{cases}f(0)=-1\\ f(0.5)\approx 0.37\end{cases}$ أي $f(0)\times f(0.5)<0$ و منه $0<\alpha<0,5$ .

3) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$ و منه المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $+\infty$ .

بــ دراسة وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

لدينا : $f(x)-x=\dfrac{-1+2\ln(x+1)}{x+1}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-1+2\ln(x+1)$ .

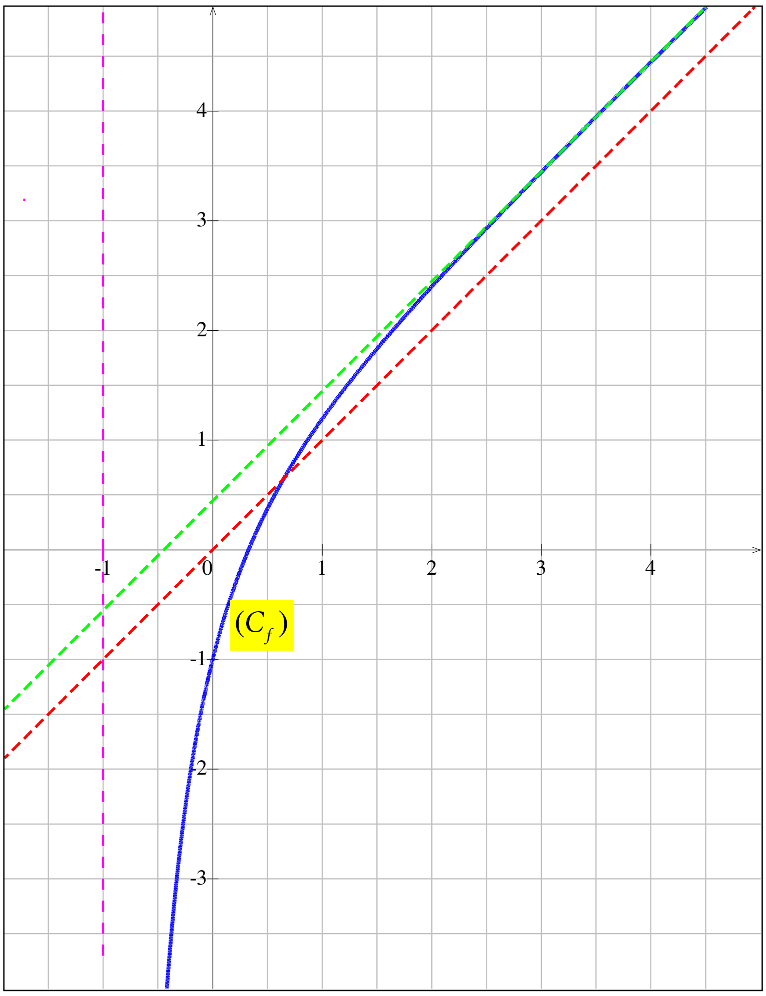
| $x$ | $-1$ | $-1+\sqrt{e}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في $A(-1+\sqrt{e};-1+\sqrt{e})$ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |

4) المستقيم $(T)$ ذا المعادلة $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ مماس للمنحنى $(C_f)$ في نقطة فاصلتها $x_0$ .

أ ـ حساب $x_0$ :

لدينا : $f'(x_0)=1$ تكافئ $\dfrac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ تكافئ $g(x_0)=(x_0+1)^2$ تكافئ $2\ln\left(x_0+1\right)=3$ تكافئ $x_0=-1+\sqrt{e^3}$ .

بــ الرسم :



جـ- بيانيا ، حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ .

إذن : تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين إذا و فقط إذا كان $0<m<\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ .

## حل مقترح للتمرين 06

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$ .

1) أ- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(1+\frac{2\ln x}{x}\right)=-\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى $(C_f)$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2\ln x}{x}\right)=1$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ .

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ .

بـ- الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، و من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ :

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-1\times 2\ln x}{x^2}=\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-\ln x$ .

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

الدالة $f$ متزايدة على المجال $]0;e]$ و متناقصة على المجال $[e;+\infty[$ .

جدول تغيّرات الدالة $f$ :

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1+2e^{-1}$ | $\searrow$ | $+\infty$ |

2) أ- دراسة وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته : $y=1$ .

لدينا : $f(x)-y=1+\frac{2\ln x}{x}-1=\frac{2\ln x}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ لأن $\frac{2}{x}>0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ .

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضع النسبي | | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(1;1)$ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | |

بـ- كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

لدينا : $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T): y=2x-1$ .

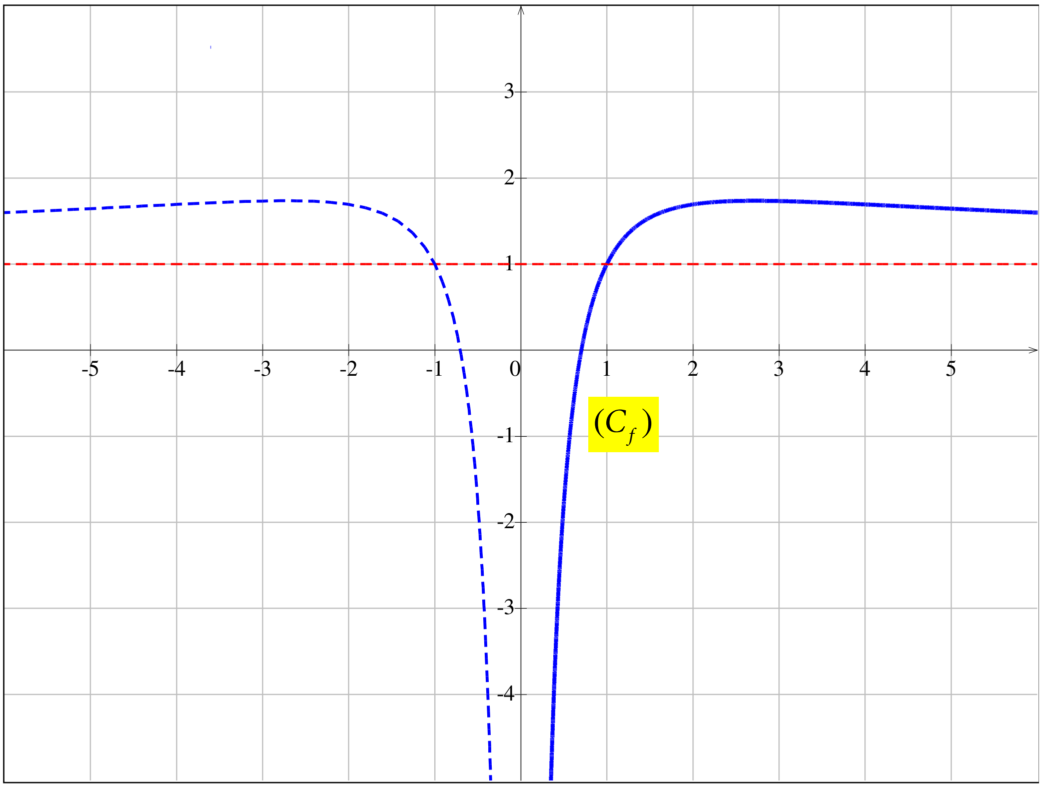
جـ- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا $\alpha$ ، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$ .

الدالة $f$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و $]e^{-0,4};e^{-0,3}[\subset]0;1]$ و $\begin{cases} f(e^{-0,4})\approx -0,2 \\ f(e^{-0,3})\approx 0,2 \end{cases}$

أي $f(e^{-0,4})\times f(e^{-0,3})<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا

وحيدا $\alpha$ بحيث $e^{-0,3} < \alpha < e^{-0,4}$.

3) الرسم :




4) $h$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي : $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$ .

أـ من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم :

$$h(x)-h(-x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|-x|}{|-x|}=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|x|}{|x|}=0$$

نستنتج أن الدالة $h$ زوجية و تمثيلها البياني $(C_h)$ متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب.

بـ ـ كيفية إنشاء المنحنى $(C_h)$ إعتمادا على المنحنى $(C_f)$ :

من أجل $x \in ]0;+\infty[$ ، يكون $h(x)=f(x)$ و بالتالي $(C_h)$ منطبق على $(C_f)$ .

من أجل $x \in ]-\infty;0[$ ، $(C_h)$ نظير $(C_f)$ بالنسبة لحامل محور التراتيب لكون الدالة $h$ زوجية.

الرسم : أنظر الشكل.

جـ ـ المناقشة البيانية :

$h(x)=m$ أي $1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}=m$ تكافئ $2\ln|x|=(m-1)|x|$ تكافئ $\ln x^2=(m-1)|x|$

و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_h)$ و المستقيم ذي المعادلة $y=m$ .

لما $m\in]-\infty;0]$ المعادلة تقبل حلين .

لما $m\in\left]0;1+\dfrac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل أربعة حلول.

لما $m=1+\dfrac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلين (مضاعفين).

لما $m\in\left]1+\dfrac{2}{e};+\infty\right[$ المعادلة ليس لها حلول.

**I)** $(\gamma)$ التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ، $\alpha$ هي فاصلة نقطة تقاطع $(\gamma)$ و $(\Delta)$.

1) بقراءة بيانية :

تحديد وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ على المجال $]0;+\infty[$ :

من أجل $x \in ]0;\alpha[$ ، $(\gamma)$ يقع تحت $(\Delta)$ .

من أجل $x \in ]\alpha;+\infty[$ ، $(\gamma)$ يقع فوق $(\Delta)$ .

2) إشارة $g(x)$ :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

3) التحقق أن : $2,2<\alpha<2,3$ .

لدينا : $\begin{cases} g(2,2) \approx -0,011 \\ g(2,3) \approx 0,13 \end{cases}$ و منه $g(2,2)\times g(2,3)<0$ أي $2,2<\alpha<2,3$ .

**II)** $f$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ .

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}(\ln x-2)=-\infty \end{cases}$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty}(\ln x-2)=+\infty \end{cases}$

2) الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0;+\infty[$ :

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{\ln x-2+x-1}{x^2}=\frac{-3+x+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيّرات الدالة $f$ :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3) تبيان أن : $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ .

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $\ln\alpha=-\alpha+3$ و بالتالي : $f(\alpha)=\left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha-2)=\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha+1)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ .

إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$ :

لدينا : $2,2<\alpha<2,3$ يكافئ : $\begin{cases} \dfrac{1}{2,3}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{2,3} \\ 1,2<\alpha-1<1,3 \\ (1,2)^2<(\alpha-1)^2<(1,3)^2 \end{cases}$ و منه $\dfrac{(1,2)^2}{2,3}<\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\dfrac{(1,3)^2}{2,2}$

و منه : $-\frac{(1,2)^2}{2,3} < f(\alpha) < -\frac{(1,3)^2}{2,2}$ أي : $-0,76 < f(\alpha) < -0,62$ .

4) دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى حامل محور الفواصل .

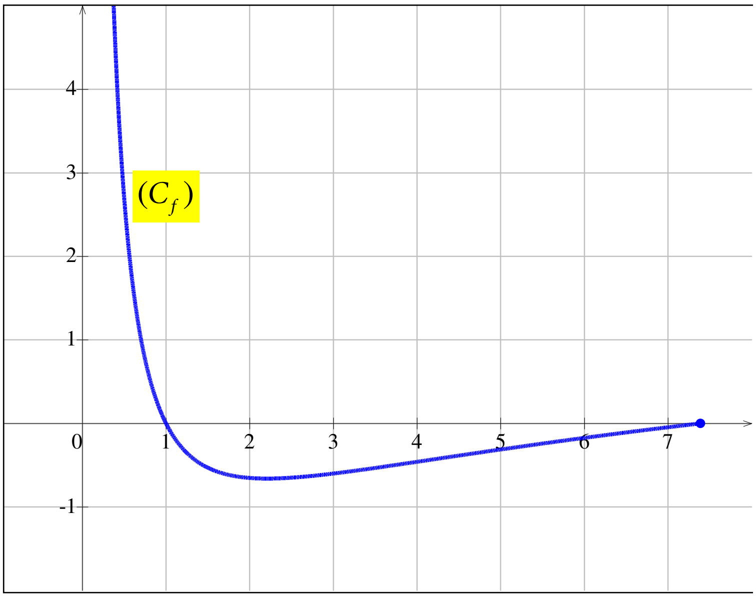
لندرس إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

لدينا : $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = \frac{1}{x}(x-1)(-2+\ln x)$ و منه إشارة $f(x)$ من إشارة $(x-1)(-2+\ln x)$ .

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

و منه $(C_f)$ فوق حامل محور الفواصل على كل من المجالين $]e^2;+\infty[$ و $]0;1[$ و تحته على المجال $]1;e^2[$ ، و يتقاطعان في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و $e^2$ .

الرسم :




## حل مقترح للتمرين 08

I) $g$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$ .

1) دراسة إتجاه تغير الدالة $g$ :

الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x \in ]0;+\infty[$ ، $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$ .

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x^2-1$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

الدالة $g$ متناقصة على المجال $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ و متزايدة على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ .

2) $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$ .

الدالة $g$ تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0;+\infty[$ هي $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و بالتالي من أجل كل $x \in ]0;+\infty[$ ، $g(x) > 0$ .

**II)** $f$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$ .

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left(\dfrac{\ln x}{x}+x-1\right)=-\infty$ .

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}+x-1\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ .

2) أ ـ الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x \in ]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}+1=\dfrac{x^2+1-\ln x}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$ .

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ ، إذن من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ .

بـ ـ جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

3) كتابة معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C)$ في النقطة التي فاصلتها 1 :

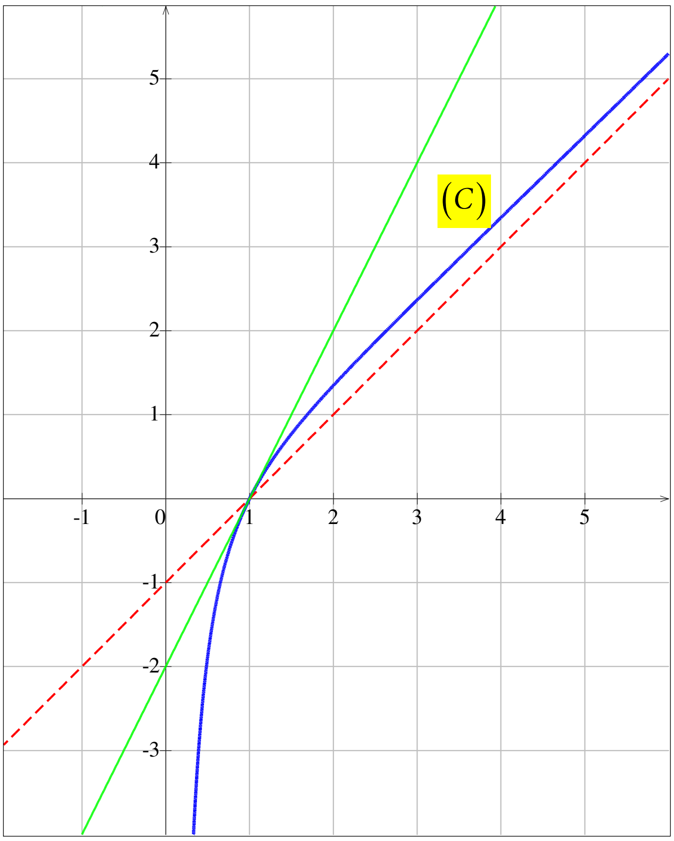
لدينا : $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T): y=2x-2$ .

4) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و منه للمنحنى $(C)$ مستقيم مقارب $(\Delta)$ حيث : $y=x-1$ معادلة له .

بـ ـ دراسة الوضع النسبي لـ $(C)$ و $(\Delta)$ : لدينا $f(x)-y=\dfrac{\ln x}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ :

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| الوضع النسبي | $(C)$ تحت $(\Delta)$ | $(C)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(1;0)$ | $(C)$ فوق $(\Delta)$ |

5) الرسم :



6) $m$ عدد حقيقي. $(\Delta_m)$ المستقيم حيث: $y=mx-m$ معادلة له.

أ- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $m$، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta_m)$.

لدينا $y_A=mx_A-m$ أي $0=m-m$ و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي $m$، $A\in(\Delta_m)$

ب- المناقشة البيانية:

لدينا: $(\Delta_m)$ معامل توجيهه $m$ و يشمل النقطة $A(1;0)$.

إذا كان $m\in]-\infty;1]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا.

إذا كان $m\in]1;2[$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m=2$ فإن المعادلة تقبل حل (مضاعف) و هو 1.

إذا كان $m\in]2;+\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين.

## 09 حل مقترح للتمرين

I) $g$ الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة $g$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[-1+(x+1)e+2\ln(x+1)]=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}[-1+(x+1)e+2\ln(x+1)]=-\infty$

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-1;+\infty[$: $g'(x)=e+\dfrac{2}{x+1}$

من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g'(x)>0$ و بالتالي الدالة $g$ متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة $g$:

| $x$ | $-1$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ |
| $g(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ |

2) تبيان أنه للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-0,34<\alpha<-0,33$.

الدالة $g$ مستمرة و متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و $\begin{cases}g(-0,34)\approx-0,03\\g(-0,33)\approx0,02\end{cases}$ أي $g(-0,34)\times g(-0,33)<0$ و منه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $-0,34<\alpha<-0,33$.

3) إشارة $g(x)$:

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

II) $f$ الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

1) أ- تبيان أن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left[\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=-\infty$ ، لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left(\dfrac{e}{x+1}\right)=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left[\dfrac{1}{(x+1)^2}\times\ln(x+1)\right]=-\infty\end{cases}$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى $(C_f)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left[e+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$ ، لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (حامل محور الفواصل) مقارب للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ .

بـ ـ الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-1;+\infty[$ :

$$f'(x)=-\frac{e}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)^2-2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-e(x+1)+1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3}=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

جـ ـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ :

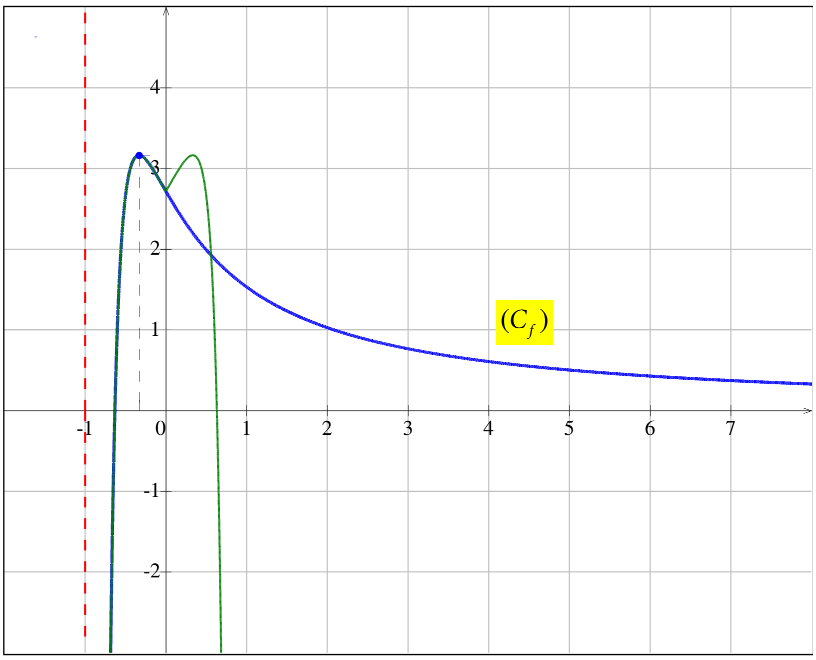
| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

الدالة $f$ متناقصة على المجال $]\alpha;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-1;\alpha]$ .

جدول تغيّرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $0$ |

د ـ الرسم :




2) $k$ الدالة العددية المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f(-|x|)$

أ ـ تبيان أن الدالة $k$ زوجية :

المجال $]-1;1[$ متناظر بالنسبة للصفر و من أجل كل $x\in]-1;1[$ : $k(-x)=f(-|-x|)=f(-|x|)=k(x)$ .

و بالتالي الدالة $k$ زوجية .

بـ ـ شرح كيفية إنشاء المنحنى $(C_k)$ انطلاقا من المنحنى $(C_f)$ :

لدينا : $k(x)=f(-|x|)=\begin{cases} f(x); x\in]-1;0] \\ f(-x); x\in[0;1[ \end{cases}$

إذن : من أجل $x\in]-1;0]$ ، $(C_k)$ ينطبق على $(C_f)$ و نتم الرسم باستخدام التناظر بالنسبة لمحور الترتيب لكون $k$ زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

جـ ـ المناقشة البيانية :

حلول المعادلة $k(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_k)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$ .

إذا كان $m>f(\alpha)$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا .

إذا كان $m = f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين (مضاعفين) مختلفين في الإشارة .
إذا كان $e < m < f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل 4 حلول ، حلان سالبان و حلان موجبان .
إذا كان $m = e$ فإن المعادلة تقبل 3 حلول ، حل سالب و آخر موجب و الثالث معدوم .
إذا كان $m < e$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

## حل مقترح للتمرين 10

$f$ الدالة المعرفة على $D$ حيث $D = ]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

1) تبيان أن الدالة $f$ فردية :

المجموعة $D$ متناظرة بالنسبة إلى الصفر ( من أجل كل $x \in D$ ، $x \in D$ )

و من أجل كل $x \in D$ ، $f(-x) = -\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = -\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\frac{2}{3}x-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x)$

التفسير البياني : مبدأ المعلم $O$ مركز تناظر بالنسبة للمنحنى $(C_f)$ .

2) حساب النهايات :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] = -\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] = +\infty$$

التفسير البياني : المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب معادلتيهما : $x=1$ و $x=-1$ .

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، لأن : $\lim_{|x| \to +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1$ .

3) الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $D$ ، من أجل كل $x \in D$ :

$$f'(x) = \frac{2}{3}+\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = \frac{2}{3}+\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{3}+\frac{2}{x^2-1} = \frac{2(x^2-1)+6}{3(x^2-1)} = \frac{2x^2+4}{3(x^2-1)} = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$$

إتجاه تغير الدالة $f$ :

لدينا : من أجل كل $x \in D$ ، $x^2-1>0$ و منه $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة $f$ متزايدة تماما على $D$ .

جدول تغيرَات الدالة $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1.8<\alpha<1.9$:

الدالة $f$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $]1,8;1,9[\subset]1;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1,9)\approx 0,10 \\ f(1,8)\approx -0,05 \end{cases}$

أي $f(1.8)\times f(1.9)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1;+\infty[$ حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1.8<\alpha<1.9$.

5) لدينا : $\lim_{|x| \to +\infty}\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right] = \lim_{|x| \to +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$

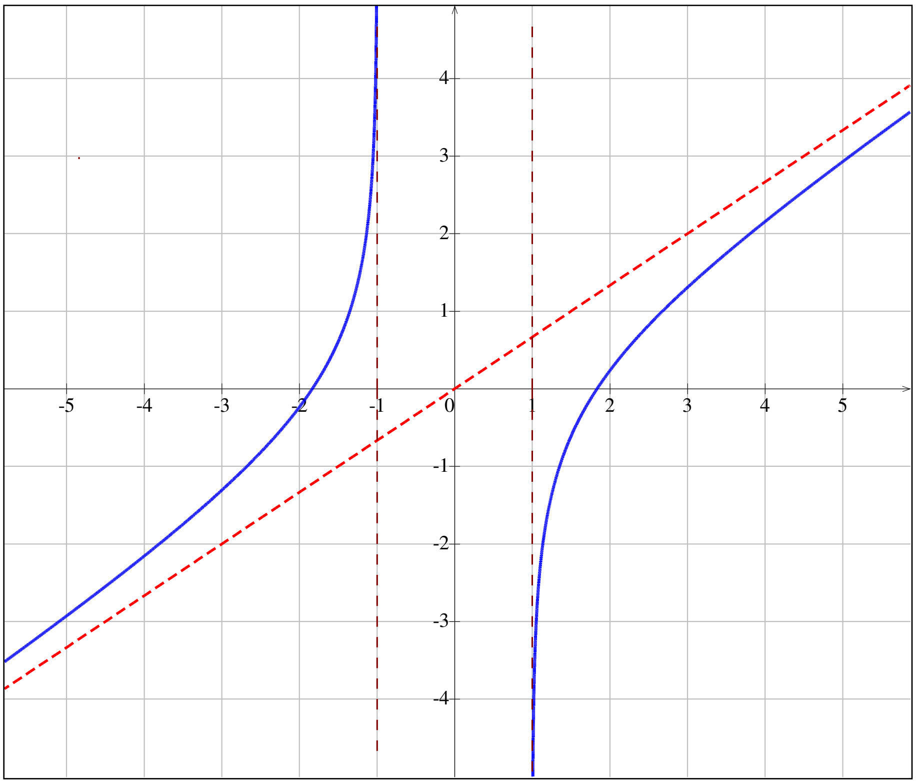
و منه المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

دراسة وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-\frac{2}{3}x=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ .

| $x$ | $-\infty \qquad -1$ | | $1 \qquad +\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $+$ | | $-$ |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

6) الرسم :




7) المناقشة البيانية :

$(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ تكافئ $2x-3|m|x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ تكافئ $\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=|m|x$

أي $f(x)=|m|x$ و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y=|m|x$ .

**(مناقشة دورانية)**

إذا كان $|m|\in\left[0;\frac{2}{3}\right[$ أي $m\in\left]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين .

إذا كان $|m|\in\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ أي $m\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

## حل مقترح للتمرين 11

I) $f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$ .

1) حساب النهايات :

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ >}}\left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=\lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ >}}\left[\left(\frac{1}{(2x+1)^2}\right)[1+2\ln(2x+1)]\right]=-\infty$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x=-\frac{1}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى $(C_f)$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{(2x+1)^2}+2\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=0$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ .

2) أ ـ الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ :

$$f'(x)=\frac{\frac{4}{2x+1}\times(2x+1)^2-4(2x+1)\left[1+2\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^4}=\frac{(2x+1)\left[-8\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^4}=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

بـ ـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة $f$ :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-8\ln(2x+1)$ لأن : $(2x+1)^3>0$ من أجل $x$ من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ :

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

الدالة $f$ متزايدة على المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right]$ و متناقصة على المجال $[0;+\infty[$ .

جدول تغيّرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$ :

$f(x)=0$ تكافئ $1+2\ln(2x+1)=0$ تكافئ $\ln(2x+1)=-\frac{1}{2}$ تكافئ $2x+1=e^{-\frac{1}{2}}$ أي : $x=\frac{1}{2\sqrt{e}}-\frac{1}{2}$

إشارة $f(x)$ :

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1\right)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

4) تبيان المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف $\omega$ يطلب تعيين إحداثييها :

الدالة $f'$ قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ :

$$f''(x)=\frac{\frac{-8\times2}{2x+1}\times(2x+1)^3-3\times2(2x+1)^2\times\left[-8\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^6}=\frac{16\left(-1+3\ln(2x+1)\right)}{(2x+1)^4}$$

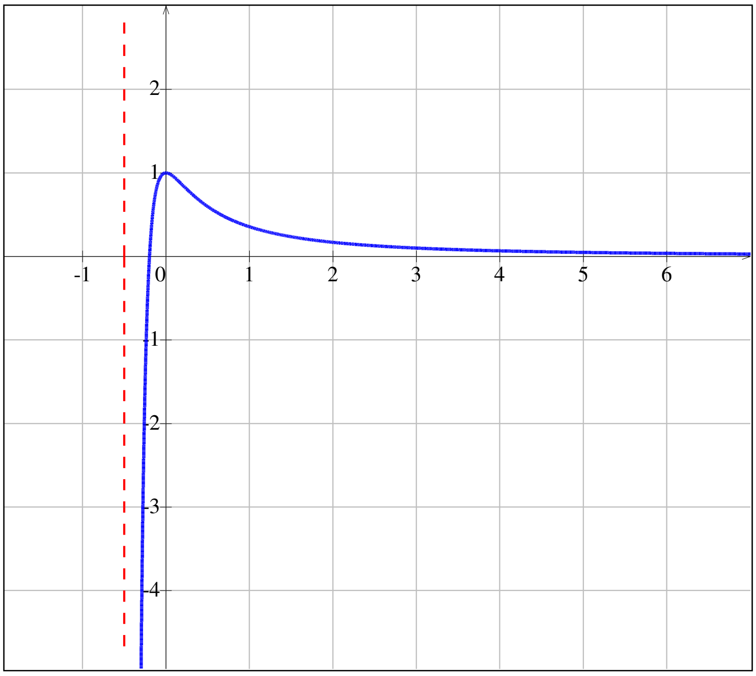
$f''(x)=0$ تكافئ $-1+3\ln(2x+1)=0$ تكافئ $\ln(2x+1)=\frac{1}{3}$ تكافئ $2x+1=e^{\frac{1}{3}}$ أي : $x=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$

إشارة $f''(x)$ :

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

إذن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف $\omega$ إحداثييها : $\left(\frac{e^{\frac{1}{3}}-1}{2};\frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}\right)$ .

الرسم :




## حل مقترح للتمرين 12

I) $g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$ .

• حساب $g(1)$ : $g(1)=1-(\ln 1)^2-\ln 1-1=0$

• إشارة $g(x)$ :

| $x$ | $0$ $\qquad$ $1$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g(x)$ | $+$ $\quad$ $0$ $\quad$ $-$ |

II) $f$ الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(1+\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(1+x\ln x)=1\end{cases}$ ( تذكَّر أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x=0$ )

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى $(C_f)$.

• تبيان أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}\right)=0$ ، ( تذكَّر أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ )

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ .

2) أ ـ الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0;+\infty[$ :

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1+x\ln x)-(1+\ln x)(1+\ln x)}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-(1+\ln x)^2}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1}{(1+x\ln x)^2}=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$$

بـ ـ إتجاه تغيّر الدالة $f$ :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ .

| $x$ | $0$ $\qquad$ $1$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ $\quad$ $0$ $\quad$ $-$ |

الدالة $f$ متزايدة على المجال $]0;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

3) تبيان أن $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ $(T)$ مماس المنحنى $(C_f)$ في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل :

أولا : تعيين نقطة تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل .

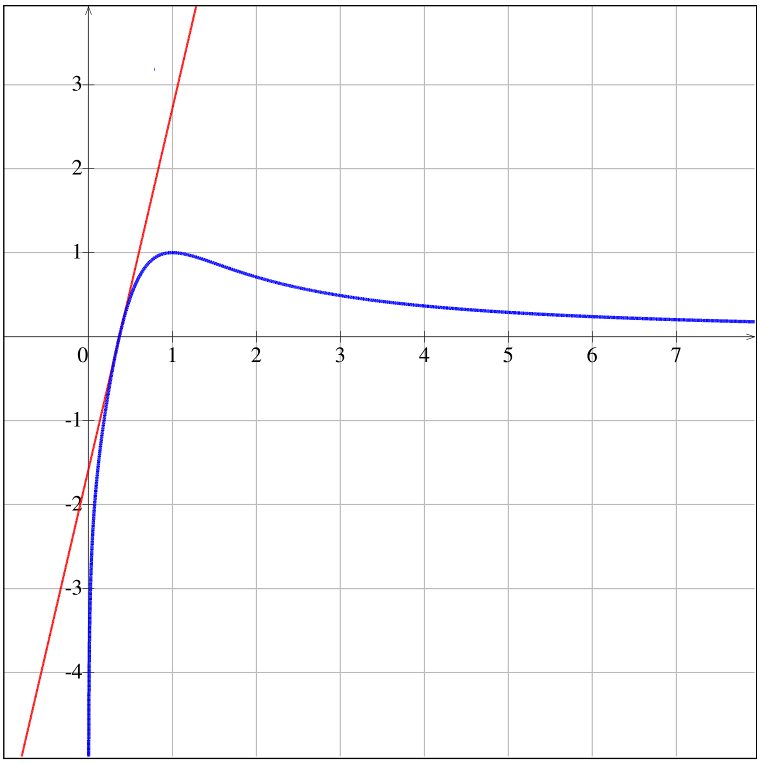
نحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f(x)=0$ .

$f(x)=0$ تكافئ $\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}=0$ تكافئ $1+\ln x=0$ تكافئ $\ln x=-1$ أي : $x=\frac{1}{e}$ .

معادلة لـ $(T)$ مماس المنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{e}$ :

لدينا : $(T): y=f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right)+f\left(\frac{1}{e}\right)$ و منه $(T): y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ .

الرسم :




4) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

$(e-1)f(x)=e^2x-me$ تكافئ $f(x)=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$ .

حلول المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع المستقيم $(T_m)$ ذي المعادلة $y=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$ .

من البيان : المعادلة تقبل حلين متمايزين لما $-\frac{e}{e-1}m<-\frac{e}{e-1}$ أي $m>1$ .

$f$ الدالة العددية المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln x$ .

1) أ ـ حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{1}{x-2}+\ln x\right]=-\infty$ .

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب عمودي للمنحنى $(C_f)$ .

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\left[\frac{1}{x-2}+\ln x\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}\left[\frac{1}{x-2}+\ln x\right]=+\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى $(C_f)$ .

بـ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x-2}+\ln x\right]=+\infty$ .

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة $f$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]0;2[$ و $]2;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0;2[\cup]2;+\infty[$ :

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x}=\frac{-x+(x-2)^2}{x(x-2)^2}=\frac{x^2-5x+4}{x(x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2-5x+4$ لكون $x(x-2)^2>0$ من أجل كل $x$ من $]0;2[\cup]2;+\infty[$ .

• إشارة $f'(x)$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |

و منه : الدالة $f$ متزايدة على كل من المجالين $[4;+\infty[$ و $]0;1]$ و متناقصة على كل من المجالين $]2;4]$ و $[1;2[$ .

جدول تغيّرات الدالة $f$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | ↘ | $\frac{1}{2}+\ln 4$ | ↗ | $+\infty$ |

3) أ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0$ .

التفسير : المنحنى $(\Gamma)$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ .

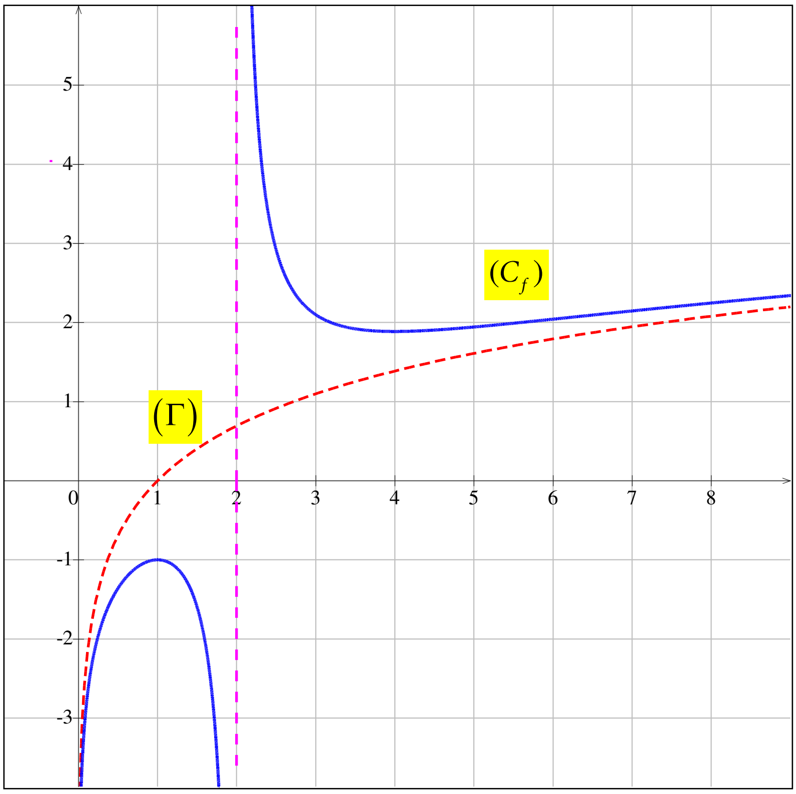
بـ ـ دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمنحنى $(\Gamma)$ :

لدينا : $f(x)-\ln x=\frac{1}{x-2}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $x-2$ .

على المجال $]0;2[$ : $(C_f)$ يقع تحت $(\Gamma)$ .

على المجال $]2;+\infty[$ : $(C_f)$ يقع فوق $(\Gamma)$ .

4) الرسم :




5) $g$ الدالة المعرفة على $]-1;0[\cup]-\infty;-1[$ بـ: $g(x)=f(-2x)$ .

الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]-\infty;-1[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ، و $g'(x)=-2f'(-2x)$ .

إتجاه تغير الدالة $g$ :

$g'(x)>0$ تكافئ $f'(-2x)<0$ تكافئ : $\begin{cases}1<-2x<2\\ 2<-2x<4\end{cases}$ أو تكافئ : $\begin{cases}-1<x<\frac{1}{2}\\ -2<x<-1\end{cases}$ أو .

و منه الدالة $g$ متزايدة على كل من المجالين $]-2;-1[$ و $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ و متناقصة على كل من المجالين $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ و $]-\infty;-2[$ .

## حل مقترح للتمرين 14

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x^2}$ .

1) أ- $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)=+\infty$ .

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ .

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-1-\frac{\ln x}{x^2}\right]=+\infty$ . لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ .

بـ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln x}{x^2}\right]=0$ و منه المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $+\infty$ .

جـ- دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

لدينا : $f(x)-(x-1)=-\frac{\ln x}{x^2}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-\ln x$ .

- المنحنى $(C_f)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$ في المجال $]0;1[$ .
- المنحنى $(C_f)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$ في المجال $]1;+\infty[$ .
- المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم $(\Delta)$ في المجال $A(1;0)$ .

2) الدالة العددية $g$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^3-1+2\ln x$ .

أ ـ الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)=3x^2+\frac{2}{x}$ .

و لدينا : من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)>0$ و بالتالي $g$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ .

بـ ـ $g(1)=0$ ،

إشارة $g(x)$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

3) أ ـ الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=1-\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$ .

بـ ـ إتجاه تغير الدالة $f$ :

الدالة $f$ متناقصة على المجال $]0;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4) تبيان أن التمثيل البياني $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$ :

نحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f'(x)=1$ .

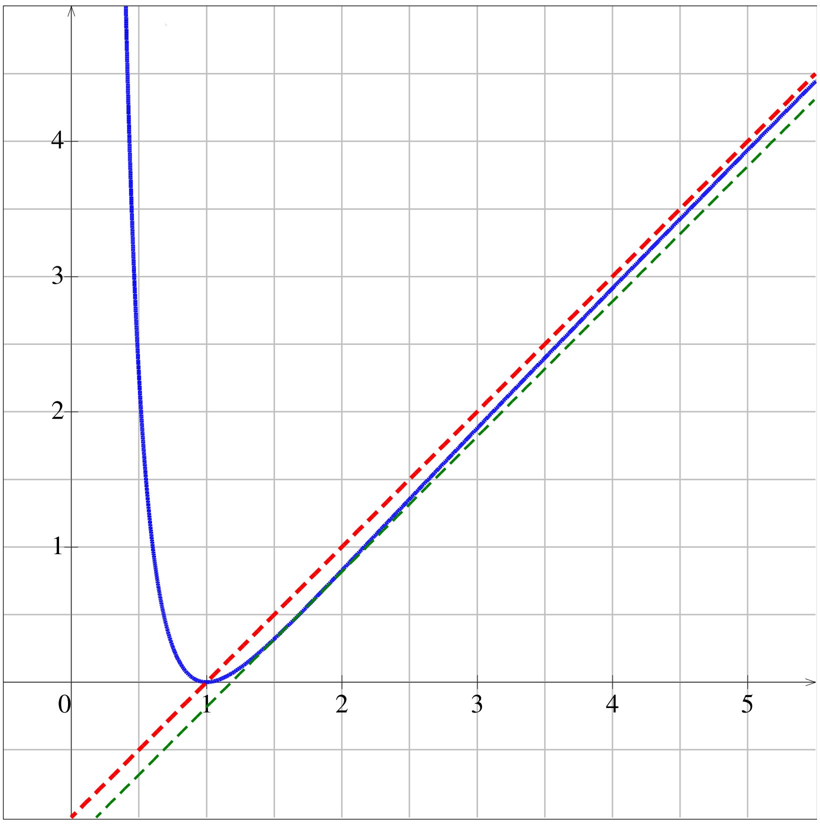
$f'(x)=1$ تكافئ $\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}=1$ تكافئ $-1+2\ln x=0$ تكافئ $\ln x=\frac{1}{2}$ تكافئ $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ .

و بالتالي $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ .

كتابة معادلة لـ $(T)$ :

لدينا $(T): y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$ و منه $(T): y=x-1-\frac{1}{2e}$ .

5) الرسم :



6) $h$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=-|x|+1+\frac{\ln|x|}{x^2}=-f(|x|)$ .

أ- تبيان أن $h$ دالة زوجية :

المجموعة $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة للصفر ، و من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم ، $h(-x)=-f(|-x|)=-f(|x|)=h(x)$ .

و بالتالي الدالة $h$ زوجية .

ب- شرح كيفية إنشاء المنحنى $(C_h)$ الممثل للدالة انطلاقا من $(C_f)$ :

لدينا : $h(x)=\begin{cases}-f(x) & ; x>0\\ -f(-x) & ; x<0\end{cases}$ و منه : على المجال $]0;+\infty[$ يكون $(C_h)$ نظير $(C_f)$ بالنسبة لحامل محور الفواصل

و نحصل على $(C_h)$ على المجال $]-\infty;0[$ بالتناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب .

بالتوفيق للجميع