

❖ الإحتمالات ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول ❖

حساب $P(A)$ احتمال الحادثة A :

A : «الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني»
معناه نسحب:

- كرية واحدة بيضاء (توجد 4 كريات بيضاء في الصندوق).
- و:
- كرية واحدة حمراء (توجد 3 كريات حمراء في الصندوق).
- و:
- كرية واحدة خضراء (توجد 3 كريات خضراء في الصندوق).

فيكون عدد الحالات الملائمة للحادثة A هو:

$$\text{card}(A) = C_4^1 \times C_3^1 \times C_3^1 = 4 \times 3 \times 3 = 36$$

$$\text{card}(A) = 36$$

ومنه:

احتمال الحادثة A هو:

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{36}{120} = \frac{3 \times 12}{10 \times 12} = \frac{3}{10}$$

$$P(A) = \frac{3}{10}$$

حساب $P(B)$ احتمال الحادثة B :

B : «الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم»

معناه نسحب:

- 3 كريات تحمل الرقم 2 (في الصندوق 5 كريات تحمل الرقم 2).
- أو:
- 3 كريات تحمل الرقم 3 (في الصندوق 4 كريات تحمل الرقم 3).

ملاحظة:

لا يمكن سحب 3 كريات تحمل كلها الرقم 1 لأن الصندوق يحوي كرية واحدة فقط تحمل الرقم 1.

فيكون عدد الحالات الملائمة للحادثة B هو:

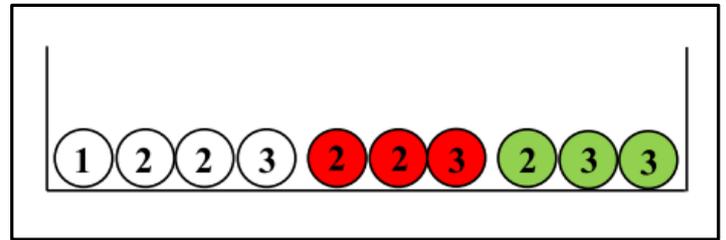
التمرين رقم 02

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة ب: 1، 2، 2، 3 وثلاث كريات حمراء مرقمة ب: 2، 2، 3 وثلاث كريات خضراء مرقمة ب: 2، 3، 3. نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق. نعتبر الحادثتين:

A : «الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني»

B : «الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم»

- (1) أ- أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.
ب- بين أن: $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ثم استنتج $P(A \cup B)$ و $P_A(B)$.
- (2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.
عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

حل التمرين رقم 02

- (1) أ- حساب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب:
عدد الحالات الممكنة لسحب 3 كريات عشوائيا من الصندوق في آن واحد هو:

$$\text{card}(\Omega) = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 7!} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

$$\text{card}(\Omega) = 120$$

❖ الإحتمالات ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول ❖

فيكون عدد الحالات الملائمة للحادثة $A \cap B$ هو:

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cap B) &= (C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1) + (C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1) \\ &= (2 \times 2 \times 1) + (1 \times 1 \times 2) = 6 \\ \text{card}(A \cap B) &= 6 \end{aligned}$$

ومنه:

احتمال الحادثة $A \cap B$ هو:

$$P(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{120} = \frac{1 \times 6}{20 \times 6} = \frac{1}{20}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

استنتاج $P_A(B)$:

معناه:

احتمال الحادثة B علما أن الحادثة A محققة.

أي:

احتمال أن تكون الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم علما أنها تحمل ألوان العلم الوطني.

لدينا:

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{20} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$P_A(B) = \frac{1}{6}$$

استنتاج $P(A \cup B)$:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{7}{60} - \frac{1}{20} \\ &= \frac{18 + 7 - 3}{60} = \frac{22}{60} = \frac{11 \times 2}{30 \times 2} = \frac{11}{30} \\ P(A \cup B) &= \frac{11}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{card}(B) &= C_5^3 + C_4^3 = \frac{5!}{2! \times 3!} + \frac{4!}{3! \times 1!} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} + \frac{4 \times 3!}{3!} \\ &= 10 + 4 = 14 \end{aligned}$$

$$\text{card}(B) = 14$$

ومنه:

احتمال الحادثة B هو:

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{14}{120} = \frac{7 \times 2}{60 \times 2} = \frac{7}{60}$$

$$P(B) = \frac{7}{60}$$

ب- البرهان أن: $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ثم استنتاج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$:

البرهان أن $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$:

تعرف الحادثة $A \cap B$ كما يلي:

$A \cap B$: «الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني وتحمل كلها نفس الرقم»

معناه نسحب:

- كرية واحدة بيضاء تحمل الرقم 2 و كرية واحدة حمراء تحمل الرقم 2 و كرية واحدة خضراء تحمل الرقم 2.

أو:

- كرية واحدة بيضاء تحمل الرقم 3 و كرية واحدة حمراء تحمل الرقم 3 و كرية واحدة خضراء تحمل الرقم 3.

حيث يوجد في الصندوق:

- كرتان بيضاوان تحملان الرقم 2 وكرتان حمراوان تحملان الرقم 2 وكرية واحدة خضراء تحمل الرقم 2.

- كرية واحدة بيضاء تحمل الرقم 3 وكرية واحدة حمراء تحمل الرقم 3 وكرتان خضراوان تحملان الرقم 3.

❖ الإحتمالات ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول

ومنه:

$$P(X = 0) = \frac{C_5^3}{\Omega} = \frac{10}{120} = \frac{1 \times 10}{12 \times 10} = \frac{1}{12}$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{12}$$

الحالة الثانية:

- الكريات الثلاث المسحوبة تحمل رقما فرديا واحدا ($X = 1$).

معناه:

من بين الكريات الثلاث المسحوبة، توجد كرية واحدة تحمل رقما فرديا وكرتين تحملان رقما زوجيا.

أي:

نسحب كرية واحدة من الكريات الخمس التي تحمل رقما فرديا، ونسحب كرتين من الكريات الخمس التي تحمل رقما زوجيا.

ومنه:

$$P(X = 1) = \frac{C_5^1 \times C_5^2}{\Omega} = \frac{5 \times 10}{120} = \frac{50}{120} = \frac{5 \times 10}{12 \times 10} = \frac{5}{12}$$

$$P(X = 1) = \frac{5}{12}$$

الحالة الثالثة:

- الكريات الثلاث المسحوبة تحمل رقمين فرديين ($X = 2$).

معناه:

من بين الكريات الثلاث المسحوبة، توجد كرتين تحملان رقما فرديا وكرية واحدة تحمل رقما زوجيا.

أي:

نسحب كرتين من الكريات الخمس التي تحمل رقما فرديا، ونسحب كرية واحدة من الكريات الخمس التي تحمل رقما زوجيا.

ومنه:

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2 \times C_5^1}{\Omega} = \frac{10 \times 5}{120} = \frac{50}{120} = \frac{5 \times 10}{12 \times 10} = \frac{5}{12}$$

$$P(X = 2) = \frac{5}{12}$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وحساب أمله الرياضي:

تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

المتغير العشوائي X يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

معناه:

السحب يُظهر إحدى الحالات الأربع التالية:

- الكريات الثلاث المسحوبة لا تحمل ولا رقما فرديا.
- الكريات الثلاث المسحوبة تحمل رقما فرديا واحدا.
- الكريات الثلاث المسحوبة تحمل رقمين فرديين.
- الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ثلاثة أرقام فردية.

ومنه:

قيم المتغير العشوائي X هي:

$$X = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$$

حيث يوجد في الصندوق:

- خمس (5) كريات تحمل رقما فرديا (كرتان بيضاوان، كرية واحدة حمراء وكرتان خضراوان).

- خمس (5) كريات تحمل رقما زوجيا (كرتان بيضاوان، كرتان حمراوان وكرية واحدة خضراء).

الحالة الأولى:

- الكريات الثلاث المسحوبة لا تحمل ولا رقما فرديا ($X = 0$).

معناه:

الكريات الثلاث المسحوبة تحمل رقما زوجيا.

أي:

نسحب الكريات الثلاث من الكريات الخمس التي تحمل رقما زوجيا.

❖ الإحتمالات ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول ❖

الحالة الرابعة:

- الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ثلاثة أرقام فردية ($X = 3$).

معناه:

نسحب الكريات الثلاث من الكريات الخمس التي تحمل رقما فرديا.

ومنه:

$$P(X = 3) = \frac{C_5^3}{\Omega} = \frac{10}{120} = \frac{1 \times 10}{12 \times 10} = \frac{1}{12}$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{12}$$

قانون احتمال المتغير العشوائي X :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

لاحظ أن:

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

حساب الأمل الرياضي $E(x)$:

$$E(x) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{5}{12} + 3 \times \frac{1}{12}$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{10}{12} + \frac{3}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3 \times 6}{2 \times 6} = \frac{3}{2}$$

$$E(x) = \frac{3}{2}$$

جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

عالم الحميد