التمرين رقم 03

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2-\sqrt{3}z+1=0$$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب z_A، z_B و z_C حيث:

$$z_C=\overline{z_B} \text{ و } z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2} \text{ ، } z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(يرمز بـ $\overline{z_B}$ لمرافق z_B).

أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

3) أ- تحقق أن: $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدد طبيعة المثلث OBC.

ب- استنتج أن B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة.

4) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق:

$$|z|=\left|\overline{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$$

عين طبيعة المجموعة (γ) ثم عين صورتها بالدوران r.

حل التمرين رقم 03

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2-\sqrt{3}z+1=0 \ldots (*)$$

نحسب المميز Δ:

$$\Delta=(-\sqrt{3})^2-4=3-4=-1=i^2$$

$$\Delta=i^2$$

ومنه:

$$z_1=\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

$$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

$$z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

$$z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

مجموعة حلول المعادلة $(*)$ هي:

$$S=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\right\}$$

2) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي ثم تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

كتابة z_A على الشكل الأسي:

$$z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|z_A|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$|z_A|=1$$

لتكن θ_A عمدة العدد المركب z_A حيث:

$$\begin{cases} \cos\theta_A=\frac{1}{2} \\ \sin\theta_A=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\theta_A\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

ومنه:

$$z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

كتابة z_B على الشكل الأسي:

$$z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$|z_B| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$|z_B| = 1$$

لتكن θ_B عمدة العدد المركب z_B حيث:

$$\begin{cases} \cos\theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\theta_B \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

ومنه:

$$z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

لدينا:

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

بالتعويض نكتب:

$$\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(e^{i\frac{\pi}{3}-i\frac{\pi}{6}}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{i\frac{n\pi}{6}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

حيث:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

ومنه:

$$e^{i\frac{n\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\frac{n}{6} = \frac{1}{3} + 2k$$

$$n = 2 + 12k\ ;\ (k \in \mathbb{Z})$$

3) أ- التحقق أن: $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ وتحديد طبيعة المثلث OBC:

التحقق أن: $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{z_B}{z_C} = \frac{z_B}{\overline{z_B}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

تحديد طبيعة المثلث OBC:

لدينا:

$$\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} = z_A$$

ونكتب:

$$\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = z_A$$

حسب خواص الطويلة نكتب:

$$\left|\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}\right| = |z_A|$$

$$\frac{|z_B - z_O|}{|z_C - z_O|} = 1$$

$$|z_B - z_O| = |z_C - z_O|$$

$OB = OC$ ... ①

حسب خواص العمدة نكتب:

$$arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}\right) = arg(z_A)$$

$$arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OC}\ ;\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \ldots ②$$

من ① و ② : المثلث OBC متقايس الأضلاع.

ب- استنتاج أن B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة:

لدينا:

$$\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه:

$$z_B - z_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_O)$$

هذه الكتابة هي الصيغة المختصرة للدوران r (لأن: $|z_A| = 1$) الذي مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ (لأن: $arg(z_A) = \frac{\pi}{3}$) ويحول النقطة C إلى النقطة B.

نستنتج أن:

B هي صورة C بدوران r مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

4) تعيين طبيعة المجموعة (γ) ثم تعيين صورتها بالدوران r:

تعيين طبيعة المجموعة (γ):

لدينا:

$$|z| = \left|\bar{z} - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$$

$$|z| = \left|\bar{z} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$|z| = |\bar{z} - z_B|$$

$$|z| = |\bar{z} - z_B|$$

حسب خواص الطويلة نكتب:

$$\overline{|z|} = \overline{|\bar{z} - z_B|}$$

$$|z| = \left|\bar{\bar{z}} - \overline{z_B}\right|$$

$$|z| = |z - z_C|$$

$$|z - z_O| = |z - z_C|$$

تذكر أن:

$$\left|\bar{\bar{z}}\right| = |z| \text{ و } |\bar{z}| = |z|$$

ونكتب:

$$OM = CM$$

ومنه:

المجموعة (γ) هي محور القطعة $[OC]$.

تعيين (γ') صورة (γ) بالدوران r:

بما أن:

- صورة النقطة O بالدوران r هي النقطة O (O نقطة صامدة).
- صورة النقطة C بالدوران r هي النقطة B.

فإن:

صورة المجموعة (γ) بالدوران r هي المجموعة (γ') محور القطعة $[OB]$.