

❖ المتتاليات العددية ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول ❖

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > -2$ »ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} > -2$ »

لدينا من الفرضية:

$$u_n > -2$$

$$u_n + 5 > -2 + 5$$

$$u_n + 5 > 3$$

$$\frac{1}{u_n + 5} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{9}{u_n + 5} < \frac{9}{3}$$

$$\frac{9}{u_n + 5} < 3$$

$$-\frac{9}{u_n + 5} > -3$$

$$1 - \frac{9}{u_n + 5} > 1 - 3$$

$$1 - \frac{9}{u_n + 5} > -2$$

$$u_{n+1} > -2$$

ومنه:

الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

نتيجة:

« من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > -2$ »(1) ب) البرهان أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على \mathbb{N} :

معناه نبرهن أن:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

التمرين رقم 01

 (u_n) متتالية عددية معرفة بمجدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$$

(1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > -2$.ب) بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على \mathbb{N} واستنتج أنها متقاربة.(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.(3) عبر بدلالة n عن u_n و v_n ، واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.(4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$$

حل التمرين رقم 01

لدينا:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5} \end{cases}$$

(1) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > -2$ نسمي $P(n)$ الخاصية:« من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > -2$ »التحقق من صحة الخاصية $P(0)$:لدينا من أجل $n = 0$:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{و} \rightarrow u_0 > -2 \\ 1 > -2 \end{cases}$$

ومنه:

الخاصية $P(0)$ محققة.

❖ المتتاليات العددية ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول ❖

استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متناقصة تماما على \mathbb{N} ($u_{n+1} - u_n < 0$) ومحدودة من الأسفل بالعدد -2 ($u_n > -2$) فهي إذن متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

البرهان أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يتطلب تعيين حدها الأول:

تكون (v_n) متتالية حسابية أساسها r إذا كان:

$$v_{n+1} = r + v_n$$

لدينا:

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} + 2} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{9}{u_n + 5} + 2} \\ &= \frac{1}{3 - \frac{9}{u_n + 5}} \\ &= \frac{1}{\frac{3(u_n + 5) - 9}{u_n + 5}} \\ &= \frac{1}{\frac{3u_n + 15 - 9}{u_n + 5}} \\ &= \frac{1}{\frac{3u_n + 6}{u_n + 5}} \\ &= \frac{1}{\frac{3(u_n + 2)}{u_n + 5}} \\ &= \frac{u_n + 5}{3(u_n + 2)} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{9}{u_n + 5} - u_n \\ &= \frac{u_n + 5 - 9 - u_n(u_n + 5)}{u_n + 5} \\ &= \frac{u_n - 4 - u_n^2 - 5u_n}{u_n + 5} \\ &= \frac{-u_n^2 - 4u_n - 4}{u_n + 5} \\ &= -\frac{u_n^2 + 4u_n + 4}{u_n + 5} \\ u_{n+1} - u_n &= -\frac{(u_n + 2)^2}{u_n + 5} \end{aligned}$$

حسب نتيجة البرهان بالتراجع لدينا:

$$u_n > -2$$

ينتج:

$$\begin{cases} u_n + 2 > 0 \\ \text{و} \\ u_n + 5 > 3 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} (u_n + 2)^2 > 0 \\ \text{و} \\ u_n + 5 > 0 \quad (\text{لأن } 3 > 0) \end{cases}$$

فنكتب:

$$\frac{(u_n + 2)^2}{u_n + 5} > 0$$

وعليه:

$$-\frac{(u_n + 2)^2}{u_n + 5} < 0$$

ومنه:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

نتيجة:

(u_n) متتالية متناقصة تماما على \mathbb{N}

❖ المتتاليات العددية ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول ❖

$$u_n = \frac{1 - 2v_n}{v_n}$$

$$u_n = \frac{1}{v_n} - \frac{2v_n}{v_n}$$

$$u_n = \frac{1}{v_n} - 2$$

بالتعويض:

$$u_n = \frac{1}{\frac{n+1}{3}} - 2$$

$$= \frac{3}{n+1} - 2$$

$$u_n = \frac{3}{n+1} - 2$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n+1} - 2 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 \times \frac{1}{n+1} - 2 \right) = -2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$$

لأن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0$$

(4) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{3} (1 - n^2)$$

نضع:

$$T = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

لدينا مما سبق:

$$u_n = \frac{1}{v_n} - 2$$

ومنه:

$$T = \left(\frac{1}{v_0} - 2 \right) v_0 + \left(\frac{1}{v_1} - 2 \right) v_1 + \dots + \left(\frac{1}{v_n} - 2 \right) v_n$$

$$= 1 - 2v_0 + 1 - 2v_1 + \dots + 1 - 2v_n$$

$$= (1 + 1 + \dots + 1) - 2(v_0 + v_1 + \dots + v_n)$$

$$= S_1 - 2S_2$$

بتفكيك البسط نكتب:

$$v_{n+1} = \frac{(u_n + 2) + 3}{3(u_n + 2)}$$

$$= \frac{\cancel{(u_n + 2)} + \cancel{3}}{\cancel{3}(u_n + 2) + \cancel{3}(u_n + 2)} \quad (u_n > -2 : \text{تذكر أن})$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{(u_n + 2)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3} + v_n \quad (v_{n+1} = r + v_n : \text{من الشكل})$$

نتيجة:

المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$

وحدها الأول:

$$v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$v_0 = \frac{1}{3}$$

(3) التعبير بدلالة n عن u_n و v_n وحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

التعبير بدلالة n عن v_n :

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول v_0 بالعلاقة:

$$v_n = v_0 + r \times n$$

ومنه:

$$v_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}(n+1)$$

$$v_n = \frac{1}{3}(n+1)$$

التعبير بدلالة n عن u_n :

لدينا:

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

ومنه:

$$v_n(u_n + 2) = 1$$

$$v_n u_n + 2v_n = 1$$

$$v_n u_n = 1 - 2v_n$$

❖ المتتاليات العددية ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول

$$= \frac{1}{3}(n+1)(1-n)$$

$$= \frac{1}{3}(1+n)(1-n)$$

$$= \frac{1}{3}(1-n^2)$$

ومنه:

$$u_0v_0 + u_1v_1 + \dots + u_nv_n = \frac{1}{3}(1-n^2)$$

حيث:

$$\begin{cases} S_1 = 1 + 1 + \dots + 1 \\ \text{و} \\ S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_n \end{cases}$$

■ S_1 هو مجموع $(n+1)$ مرة العدد 1.

أي:

$$S_1 = n + 1$$

■ S_2 هو مجموع $(n+1)$ حدا من حدود متتابعة لمتتالية حسابية حدهاالأول $v_0 = \frac{1}{3}$ وأساسها $r = \frac{1}{3}$ ، يعطى بالعلاقة:

$$S_2 = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحدا الأخير في المجموع} + \text{الحدا الأول في المجموع})$$

بالتعويض:

$$S_2 = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$$

$$= \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(n+1) \right)$$

$$= \frac{n+1}{2} \left(\frac{1+n+1}{3} \right)$$

$$S_2 = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

لدينا مما سبق:

$$T = S_1 - 2S_2$$

ومنه:

$$T = n + 1 - 2 \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

$$= n + 1 - \frac{(n+1)(n+2)}{3}$$

$$= \frac{3(n+1) - (n+1)(n+2)}{3}$$

$$= \frac{1}{3} [3(n+1) - (n+1)(n+2)]$$

$$= \frac{1}{3} (n+1)(3 - n - 2)$$

جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

عبد الحميد