الجزء الأول : لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بجدول تغيراتها كالتالي :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

I) تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x}$ حيث : a ، b و c أعداد حقيقية

1) أحسب الدالة المشتقة f' بدلالة a و c

2) بالإستعانة بجدول تغيرات الدالة f عين الأعداد الحقيقية a ، b و c.

3) عين $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

4) استنتج معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-1$.

5) أجب بصح أو خطأ مع التبرير :

أ)- $f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{1}{3}\right)$

ب)- المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$

جـ)- المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا β في المجال. $]2.5;2.7[$

د)- $f'(3)>0$

6) استنتج إشارة الدالة f .

الجزء الثاني : نأخذ في ما يلي $a=1;b=-3;c=1$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-3$ مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ و $-\infty$

2) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

3) بين أن $f(-x)+f(x)=-6$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

4) أنشئ (C_f) و المستقيمات المقاربة.

5) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m إشارة و عدد حلول المعادلة : $f(x)=m$.

الجزء الثالث : g دالة ذات المتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ : $g(x)=[f(x)]^2$

1) أوجد نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أحسب $g(-1)$, $g(1)$ ، $g(\alpha)$ و $g(\beta)$

3) بإستعمال مشتق مركب دالتين أحسب $g'(x)$

4) استنتج جدول تغيرات الدالة g (دون دراسة تغيراتها).

الحـــــل

✍ الجزء الأول :

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ و تكتب على الشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x}$ حيث : a ، b و c أعداد حقيقية

1) حساب الدالة المشتقة f' بدلالة a و c:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ ودالتها المشتقة f' : $f'(x)=a-\frac{c}{x^2}=\frac{ax^2-c}{x^2}$

2) تعيين الأعداد a ، b و c بالإستعانة بجدول تغيرات الدالة f :

من جدول التغيرات نجد : $\begin{cases} f'(-1)=0 \\ f(-1)=-5 \\ f(1)=-1 \end{cases}$ وبتعويض نجدأن: $\begin{cases} \frac{a(-1)^2-c}{(-1)^2}=0 \\ a\times(-1)+b+\frac{c}{-1}=-5 \\ a\times(1)+b+\frac{c}{1}=-1 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a-c=0...(1) \\ -a+b-c=-5...(2) \\ a+b+c=-1...(3) \end{cases}$

تكافئ بجمع (2) و (3): $\begin{cases} a=c...(1) \\ 2b=-6...(2) \\ a+b+c=-1...(3) \end{cases}$ وبتعويض (1) و(2) في (3) نجد : $\begin{cases} a=c...(1) \\ b=-3...(2) \\ 2c-3=-1...(3) \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} a=c...(1) \\ b=-3...(2) \\ 2c=2...(3) \end{cases}$ نستنتج أن : $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=1 \end{cases}$ و منه عبارة $f(x)$ تكتب على الشكل $f(x)=x-3+\frac{1}{x}$.

3) تعين $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا :

لدينا من الجدول نجد أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x)=-\infty$.

التفسير الهندسي : المنحنى البياني (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (محور التراتيب) مستقيم مقاربا.

4) استنتاج معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-1$:

بما أن $f'(-1)=0$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل

معادلته : $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=f(-1)=-5$.

5) الإجابة بصح أو خطأ مع التبرير :

أ)- $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$ (خطأ)

الدالة f متناقصة تماما على $]0;1]$ الذي يشمل العددين $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ لأن $\frac{1}{2}<\frac{1}{3}$ فبتالي ينعكس ترتيب الصور .

ب)- المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$ (صح)

الدالة f مستمرة على $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$ لأنها عبارة عن دالة ناطقة مستمرة على $\mathbb{R}-\{0\}$

الدالة f رتيبة على $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$ (متناقصة تماما على $]0;1]$ الذي يحويه)

لدينا : $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}-3+\frac{1}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-3+\frac{1}{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$ ومنه : $f\left(\frac{1}{3}\right)\times f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة - المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$.

ج) - المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا β في المجال $[2.5;2.7]$ (صح)

لأنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، الدالة f مستمرة على $[2.5;2.7]$ لأنها عبارة عن دالة ناطقة مستمرة على $\mathbb{R}-\{0\}$

الدالة f رتيبة على $[2.5;2.7]$ (متزايدة تماما على $]1;+\infty[$ الذي يحويه)

لدينا: $f(2.7)=2.7-3+\frac{1}{2.7}=0.07$ و $f(2.5)=2.5-3+\frac{1}{2.5}=-0.1$ ومنه : $f(2.5)\times f(2.7)=-0.007<0$.

د) - $f'(3)>0$ (صح)

لأن $f'(x)>0$ على المجال $]1;+\infty[$ و $3\in]1;+\infty[$.

6) استنتاج جدول إشارة الدالة f :

من السؤال (5) وجدول تغيرات الدالة f نجد :

x	$-\infty$		0		α		β		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

✍ الجزء الثاني :

نأخذ في ما يلي $a=1;b=-3;c=1$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس :

1) تبيان أن (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-3$ مقاربا مائلا :

ليكن x عدد حقيقي غير معدوم $f(x)-y=\left(x-3+\frac{1}{x}\right)-(x-3)=\frac{1}{x}$

بمأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$

نستنتج أن (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-3$ مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

2) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

يكافئ دراسة إشارة الفرق $f(x)-y=\frac{1}{x}$ ومنه :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	‖	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)

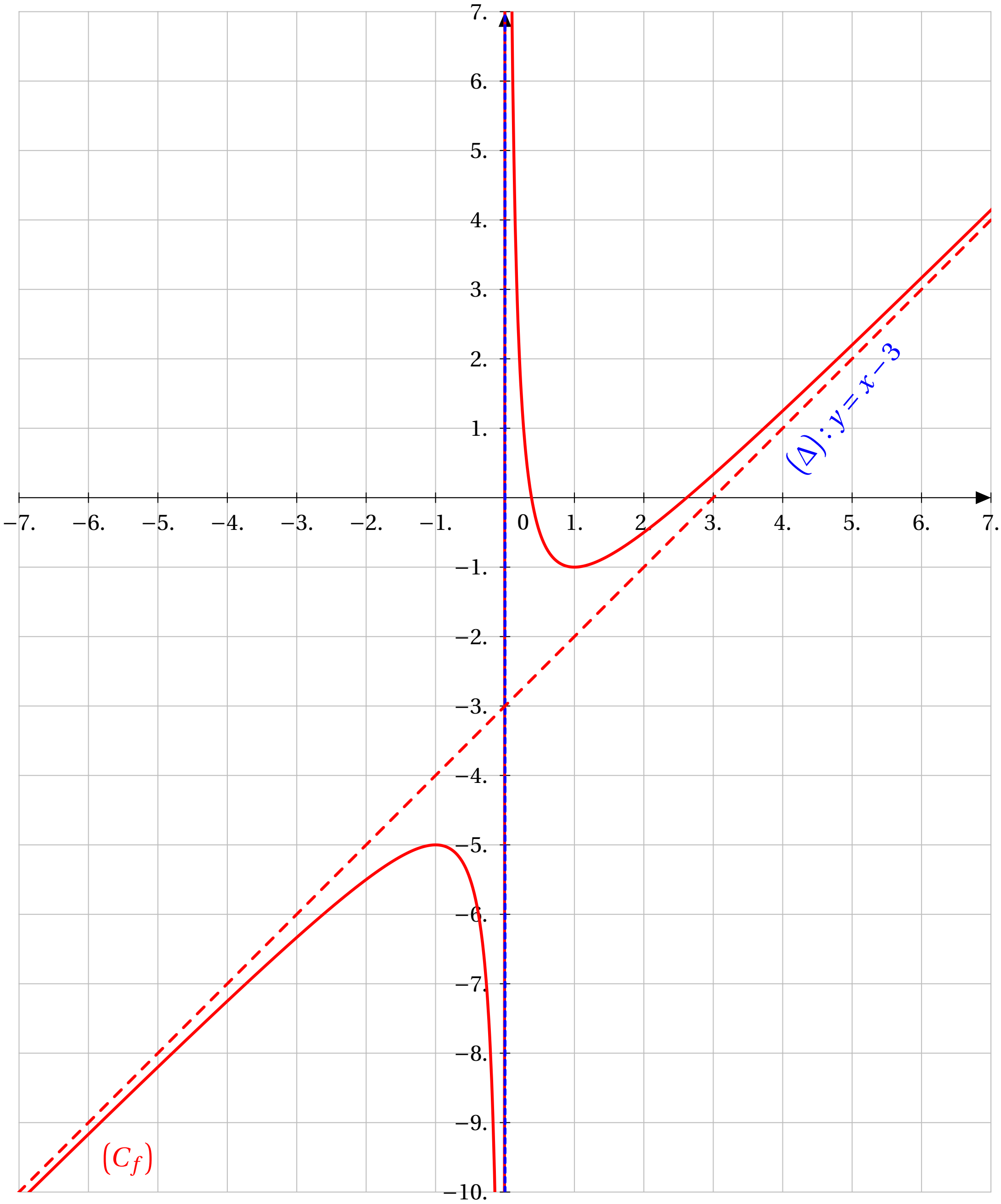
إذا كان $x\in]-\infty;0[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) ، أما إذا كان $x\in]0;+\infty[$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ)

3) بيان أن $f(-x)+f(x)=-6$ ، ثم تفسير النتيجة بيانيا.

لدينا : $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ و $-x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ومنه : $f(-x)+f(x)=\left(-x-3-\frac{1}{x}\right)+\left(x-3+\frac{1}{x}\right)=-3-3=-6$

العلاقة العكسية محققة : $f(2a-x)+f(x)=2b$ مع $a=0$ و $b=-3$ ومنه النقطة $(0;-3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f)

4) التمثيل البياني لـ (C_f) و المستقيمات المقاربة:



5) المناقشةالبيانية حسب قيم العدد الحقيقي m إشارة و عدد حلول المعادلة : $f(x) = m$

حلول المعادلة $f(x) = m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$.

✍ إذا كان $m \in]-\infty : -5[$ يوجد حلين مختلفين سالبين

✍ إذا كان $m = -5$ يوجد حل مضاعف سالب

✍ إذا كان $m \in]-5 : -1[$ لايوجد حل

✍ إذا كان $m = -1$ يوجد حل مضاعف موجب

✍ إذا كان $m \in]-1 : +\infty[$ يوجد حلين مختلفين موجبين.

✍ الجزء الثالث :

g دالة ذات المتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $g(x) = [f(x)]^2$ ، (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) إيجاد نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

حساب نهاية الدالة g عند $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)^2 = +\infty$

حساب نهاية الدالة g عند $-\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)^2 = +\infty$

حساب نهاية الدالة g عند 0 :

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0} g(x) = \left(\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x)\right)^2 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x) = \left(\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)\right)^2 = +\infty$$

2) حساب $g(-1)$, $g(1)$ ، $g(\alpha)$ و $g(\beta)$:

$$g(-1) = [f(-1)]^2 = (-5)^2 = 25$$

$$g(1) = [f(1)]^2 = (-1)^2 = 1$$

$$g(\alpha) = [f(\alpha)]^2 = (0)^2 = 0$$

$$g(\beta) = [f(\beta)]^2 = (0)^2 = 0$$

3) حساب $g'(x)$

تفكك الدالة g إلى دالتين f و h بحيث : $g = h \circ f$ $\qquad x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{h} x^2$

حساب $g'(x)$ بإستعمال مشتق مركب دالتين: الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R} - \{0\}$ لأنها مربع دالة قابلة للإشتقاق و عليه: و بتالي: $g'(x) = h'(f(x)) \times f'(x) = 2f'(x) \times f(x)$

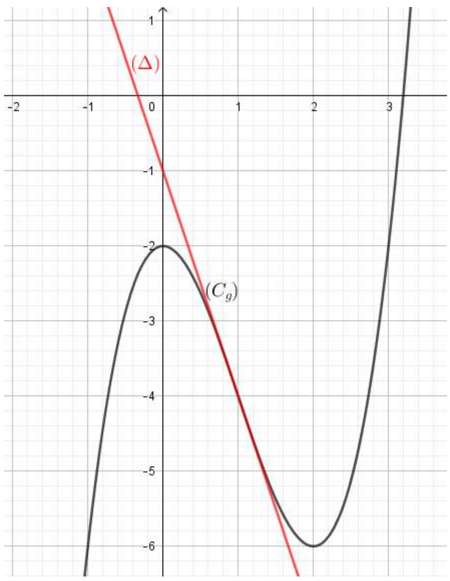
4) تشكيل جدول تغيرات الدالة h :

لدينا إشارة $g'(x)$ من إشارة الجداء $f'(x) \times f(x)$ باستعمال جدول اشارة $f'(x)$ و $f(x)$ لدينا:

x	$-\infty$		-1		0		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$			0	$+$			
$f(x)$		$-$			‖	$+$	0			$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$+25$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2022 و لا تنسونا من خالص دعائكم

✍ الجزء الأول :



✍ g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل.

المستقيم (D) هو مماس للمنحنى (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 1.

بقراءة بيانية :

1) أحسب كل من : $g'(0)$ ، $g'(2)$ ، $g'(1)$ و $g''(1)$.

2) شكل جدول تغيرات الدالة g.

3) حدد إشارة $g(3)$ و $g\left(\frac{7}{2}\right)$ ثم إستنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]3;\frac{7}{2}\right[$ بحيث $g(\alpha) = 0$ ثم تحقق أن : $3.1 < \alpha < 3.2$.

4) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

✍ الجزء الثاني :

✍ f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، أحسب $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) بين أنه من أجل كل $x \neq 1$: $f'(x) = \dfrac{(x-1)\times g(x)}{(x-1)^4}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) أحسب $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x)$ ثم إستنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

4) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5) عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

6) بين أن : $f(\alpha) = 3 + \dfrac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم أعط حصر لـ $f(\alpha)$ تدور النتائج إلى 10^{-2}.

7) أكتب معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{3}$.

8) جد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

9) أنشئ (Δ) ، (C_f).

10) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

✍ الجزء الثالث :

✍ h الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $h(x) = \dfrac{|x^3+1|}{(x-1)^2}$ و (C_h) تمثيلها البياني .

1) أكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة h عند القيمة -1 ثم فسر النتيجة هندسيا.

3) إستنتج رسم المنحنى (C_h) إنطلاقا من (C_f).

الحـــل

✍ الجزء الأول :

1) حساب $g''(1), g'(1), g'(2), g'(0)$:

✍ $g'(0) = g'(2) = 0$ قيم حدية محلية .

✍$g'(1)$ ميل المماس (D) نختار نقطتين كيفيتين من المماس $A(1;-4)$ و $B(0;-1)$ و منه : $g'(1) = \dfrac{-1-(-4)}{0-1} = -3$.

✍ $g''(1) = 0$ المماس (D) يغير وضعيته عند نقطة التماس و بالتالي فهو يخترق المنحنى (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 1 التي تعتبر نقطة إنعطاف .

2) تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

3) تحديد إشارة $g(3)$ و $g\left(\frac{7}{2}\right)$:

من البيان نلاحظ أن : $g(3) < 0$ و $g\left(\frac{7}{2}\right) > 0$.

إستنتاج وجود عدد حقيقي α وحيد من $\left]3;\frac{7}{2}\right[$ بحيث : $g(\alpha) = 0$:

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $\left]3;\frac{7}{2}\right[$ و $g(3)\times g\left(\frac{7}{2}\right) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $3 < \alpha < \frac{7}{2}$ يحقق : $g(\alpha) = 0$.

التحقق أن : $3.1 < \alpha < 3.2$:

لدينا : $\left]3;\frac{7}{2}\right[\supset]3.1;3.2[$ إذن الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[3.1;3.2]$ و $g(3.1) \approx -1.039$ و $g(3.2) \approx 0.048$ أي : $g(3.1)\times g(3.2) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث : $3.1 < \alpha < 3.2$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

4) إستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

✍ الجزء الثاني :

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

2) حساب $\lim_{x\to1} f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا :

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$.

التفسير الهندسي : وجود مستقيم مقارب عمودي (موازي لمحور التراتيب) للمنحنى (C_f) معادلته $x=1$.

3) تبيان أنه من أجل كل $x \neq 1$: $f'(x) = \dfrac{(x-1)\times g(x)}{(x-1)^4}$ ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3+1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(3x^2)(x-1) - 2(x^3+1)]}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(3x^3-3x^2-2x^3-2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(x^3-3x^2-2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)\times g(x)}{(x-1)^4}$$

إشارة المشتقة : إشارتها من إشارة $(x-1)$ و $g(x)$ لأن $(x-1)^4 > 0$

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$(x-1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;1[$ و $[\alpha;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]1;\alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) حساب $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-x]$ ثم إستنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1-x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1-x(x^2-2x+1)}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-x+1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-x] = 2$ أي : $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-x-2] = 0$ أي : $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-(x+2)] = 0$ و منه نستنتج أن المستقيم $(\Delta): y = x+2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

5) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x) - y = f(x) - (x+2) = \frac{x^3+1}{(x-1)^2} - (x+2) = \frac{x^3+1-(x+2)(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^3+1-(x+2)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{x^3+1-x^3+2x^2-x-2x^2+4x-2}{(x-1)^2}=\frac{3x-1}{(x-1)^2}$$

إذن : إشارة الفرق من إشارة البسط $3x-1$ لأن المقام موجب تماما $(x-1)^2>0$.

$3x-1=0$ أي : $3x=1$ أي : $x=\frac{1}{3}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$	‖	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(\frac{1}{3};\frac{7}{3})$	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)

6) تعيين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا :

طريقة 1 : $f'(\alpha)=\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$, بما أن الدالة f تقبل قيمة حدية عند $x=\alpha$ فإن : $f'(\alpha)=0$.

طريقة 2 : $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)=f'(\alpha)=\frac{(\alpha-1)\times g(\alpha)}{(\alpha-1)^4}=0$ لأن $g(\alpha)=0$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مماسا أفقيا معادلته : $y=f(\alpha)$.

7) تبيان أن : $f(\alpha)=3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم إعطاء حصرا لـ $f(\alpha)$:

$f(\alpha)=3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ معناه : $f(\alpha)-\left[3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}\right]=0$ و منه :

$$f(\alpha)-\left[3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}\right]=\frac{\alpha^3+1}{(\alpha-1)^2}-3-\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}=\frac{\alpha^3+1-3(\alpha-1)^2-6\alpha}{(\alpha-1)^2}=\frac{\alpha^3-3\alpha^2-2}{(\alpha-1)^2}=\frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2}=0$$

إذن : $f(\alpha)=3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$.

حصر لـ $f(\alpha)$:

نعلم أن : $3.1<\alpha<3.2$ أي : $(3.1-1)^2<(\alpha-1)^2<(3.2-1)^2$ أي : $4.41<(\alpha-1)^2<4.84$ أي : $\frac{1}{4.84}<\frac{1}{(\alpha-1)^2}<\frac{1}{4.41}$

أي : $0.2<\frac{1}{(\alpha-1)^2}<0.23$ و لدينا أيضا : $18.6<6\alpha<19.2$ و منه : $0.2\times18.6<\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}<0.23\times19.2$ أي :

$3+3.72<3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}<3+4.42$ أي : $6.72<3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}<7.42$ إذن : $6.72<f(\alpha)<7.42$.

8) كتابة معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{3}$:

$(T):y=f'\left(\frac{-1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{-1}{3}\right)$ و $f'\left(\frac{-1}{3}\right)=1$ و $f\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{13}{24}$ و منه :

$(T):y=1\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{13}{24}=x+\frac{1}{3}+\frac{13}{24}=x+\frac{8}{24}+\frac{13}{24}=x+\frac{21}{24}=x+\frac{7}{8}$.

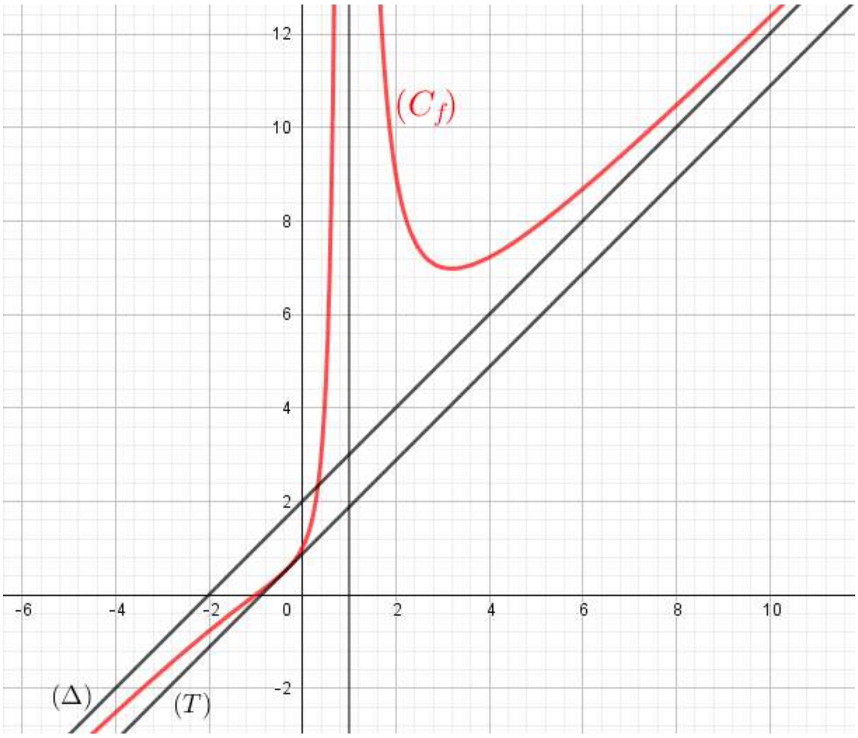
9) إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات :

مع محور الفواصل : نحل المعادلة $f(x)=0$

أي : $\frac{x^3+1}{(x-1)^2}=0$ أي : $x^3+1=0$ و منه : $x=-1$ إذن : $(C_f)\cap(xx')=\{A(-1;0)\}$.

مع محور التراتيب : نحسب $f(0)$ أي : $f(0)=\frac{0^3+1}{(0-1)^2}$ و منه : $f(0)=1$ إذن : $(C_f)\cap(yy')=\{B(0;1)\}$.

إنشاء المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) :



10) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$:

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ بيانيا هي نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=x+m$.

- $m<\frac{7}{8}$: لا توجد حلول .
- $m=\frac{7}{8}$: حل مضاعف سالب .
- $m=1$: حلين أحدهما معدوم و الآخر سالب .
- $1<m<2$: حلين مختلفين في الإشارة .
- $m=2$: حل وحيد موجب .
- $m>2$: حلين موجبين .

الجزء الثالث :

1) كتابة الدالة h بدون رمز القيمة المطلقة :

إشارة x^3+1 من إشارة $x+1$ لأن : $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ و $x^2-x+1>0$ إذن :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x^3+1		$-$	0	$+$	

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=f(x): x\in[-1;1[\cup]1;+\infty[\\ -\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=-f(x): x\in]-\infty;-1[\end{cases}$$

دراسة قابلية إشتقاق الدالة h عند (-1) :

دراسة قابلية إشتقاق الدالة h عند القيمة (-1) من اليمين :

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\frac{f(x)-f(1)}{x-(-1)}=\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\frac{\frac{x^3+1}{(x-1)^2}-0}{x+1}=\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\frac{x^3+1}{(x+1)(x-1)^2}=\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x-1)^2}=\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}=\frac{3}{4}$$

و منه الدالة h تقبل الإشتقاق عند (-1) من اليمين .

دراسة قابلية إشتقاق الدالة h عند القيمة (-1) من اليسار :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{f(x)-f(1)}{x-(-1)} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{-\frac{x^3+1}{(x-1)^2}}{x+1} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{-(x^3+1)}{(x+1)(x-1)^2} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{-(x+1)(x^2-x+1}{(x-1)(x-1)^2} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{-(x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{4}$$

و منه الدالة h تقبل الإشتقاق عند (-1) من اليسار .

بما أن : $\lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{f(x)-f(1)}{x-(-1)} \neq \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{f(x)-f(1)}{x-(-1)}$ فإن الدالة h لا تقبل الإشتقاق عند القيمة (-1).

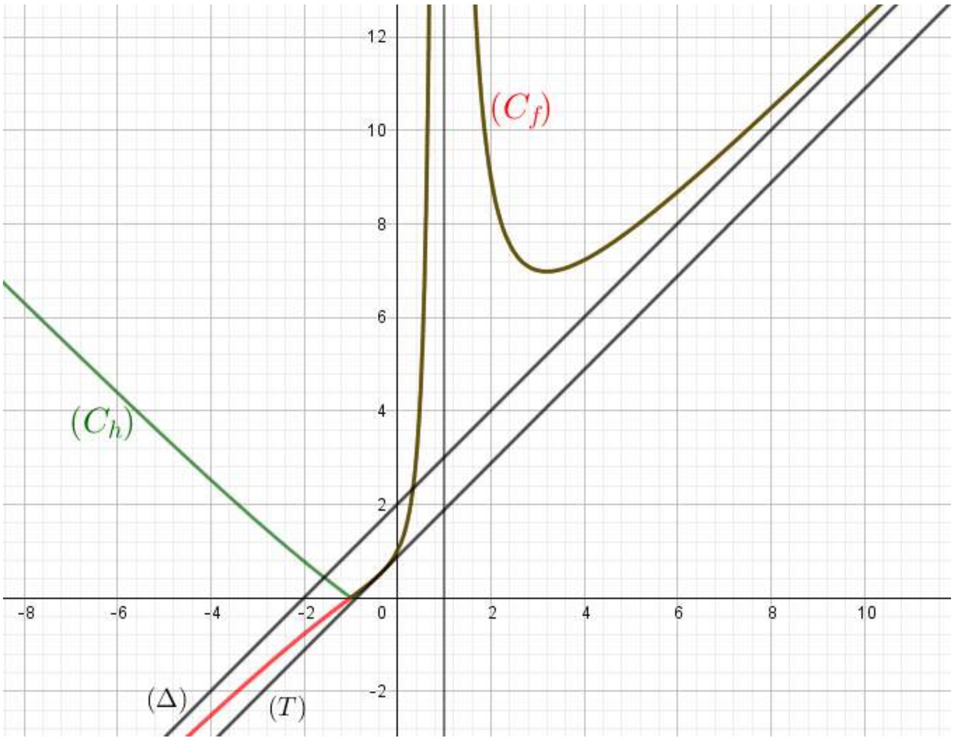
التفسير الهندسي :

المنحنى (C_h) يقبل عند النقطة $A(-1;f(-1))$ نصفي مماسين حيث $A(-1;0)$ هي نقطة زاوية .

3) إستنتاج رسم المنحنى (C_h) إنطلاقا من (C_f) :

(C_h) منطبق على (C_f) في المجال $[-1;1[\cup]1;+\infty[$.

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل في المجال $]-\infty;-1[$.



بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2022 و لا تنسوا من خالص دعائكم

الجزء الأول :

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3-3x^2+4x$، و (C_g) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) برهن أن (C_g) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها ثم برهن أن هذه النقطة هي مركز تناظر للمنحنى (C_g).

3) α و β عددان حقيقيان .

برهن أنه إذا كان $\beta>\alpha$ فإن $g(\beta)>g(\alpha)$ ثم إستنتج مقارنة العددين $g(2021)$ و $g(2022)$ دون حساب قيمتها .

4) أعط إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم إستنتج وضعية (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل .

5) أرسم المنحنى (C_g).

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$، (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) عين العددين الحقيقين a و b حيث : $f(x)=ax+\dfrac{bx}{(x-1)^2}$.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1}f(x)$, ثم فسر النتيجة هندسيا .

3) أحسب $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$, ثم فسر النتيجة هندسيا .

4) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$.

5) إستنتج إتجاه تغير الدالة f على مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

6) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

7) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة وحيدة A يطلب تعيينها ثم أكتب معادلة لـ (T).

8) أحسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

9) إعط إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$ ثم إستنتج وضعية (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .

10) أرسم (Δ), (T) ثم (C_f) في معلم جديد يختلف عن (C_g).

11) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلات التالية :

$f(x)=m$; $f(x)=|m|-1$; $f(x)=f(m)$; $-\dfrac{x}{(x-1)^2}=m$; $f(x)=x+m^2-4$; $x^3-2x^2=mx(x-1)^2$.

الجزء الثالث :

لتكن الدوال العددية التالية : h_1 , h_2 , h_3 حيث :

$h_1(x)=f(|x|)$ و $D_{h_1}=\mathbb{R}-\{-1;1\}$, $h_2(x)=|f(x)|$ و $D_{h_2}=D_f$, $h_3(x)=f(x-1)+2$ و $D_{h_3}=\mathbb{R}-\{2\}$

1) بين أن h_1 دالة زوجية .

2) إشرح كيف يتم رسم المنحنيات (C_{h_1}), (C_{h_2}), (C_{h_3}) إنطلاقا من منحنى (C_f) ثم أنشئها .

الجزء الرابع :

لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $k(x)=f(x^2)$

1) أدرس إتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

الحـــــل

✍ الجزء الأول :

1) دراسة تغيرات الدالة g : $g(x)=x^3-3x^2+4x$

أ) حساب النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

ب) حساب المشتقة و إشارتها :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $g'(x)=3x^2-6x+4$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة : "$3x^2-6x+4$" $\Delta=b^2-4ac=36-4(3)(4)=-12<0$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $a=3>0$ و منه : $g'(x)>0$.

ج) إتجاه تغير الدالة g : لدينا $g'(x)>0$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

د) جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2) تبيان أن (C_g) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها :

لدينا : $g'(x)=3x^2-6x+4$ و الدالة $g'(x)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

حساب الدالة المشتقة الثانية : $g''(x)=6x-6$ $g''(x)=0$ معناه : $6x-6=0$ و منه : $6x=6$ و منه : $x=\frac{6}{6}=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$

بما أن $g''(x)$ إنعدمت عند 1 و غيرت من إشارتها فإن النقطة $I(1;g(1))$ أي : $I(1;2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_g).

البرهان أن النقطة I هي مركز تناظر لـ (C_g) :

$x\in D_g$ و $2\alpha-x\in D_g$, $g(2\alpha-x)+g(x)=2\beta$ أي : $g(2-x)+g(x)=4$

لدينا : $g(x)=x^3-3x^2+4x$

$g(2-x)=(2-x)^3-3(2-x)^2+4x=(2-x)(2-x)^2-3(x^2+4-4x)+8-4x=(2-x)(x^2+4-4x)-12-3x^2+12x+8-4x=$

$8+2x^2-8x-4x-x^3+4x^2-12-3x^2+12x+8-4x=-x^3+3x^2-4x+4$

$g(2-x)+g(x)=-x^3+3x^2-4x+4+x^3-3x^2+4x=4$ و منه : $I(1;2)$ مركز تناظر المنحنى (C_g).

3) البرهان أنه إذا كان $\beta>\alpha$ فإن : $g(\beta)>g(\alpha)$:

لدينا : $\beta>\alpha$ و الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن : $g(\beta)>g(\alpha)$.

إستنتاج المقارنة بين $g(2021)$ و $g(2022)$:

لدينا : $2022>2021$ و الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن : $g(2022)>g(2021)$.

4) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$: $g(x)=x^3-3x^2+4x$ أي : $g(x)=x(x^2-3x+4)$

$g(x)=0$ معناه : إما $x=0$ أو : $x^2-3x+4=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(1)(4)=9-16=-7<0$ و منه : $x^2-3x+4>0$

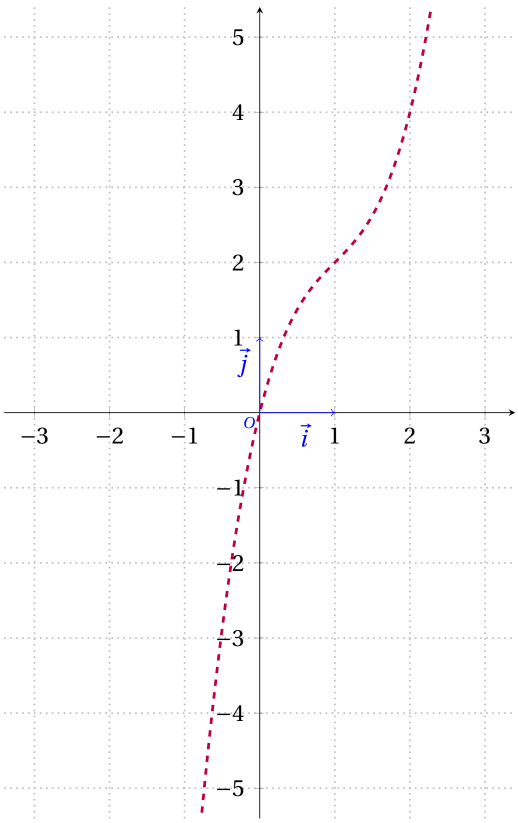
x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
x^2-3x+4		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	

إستنتاج وضعية (C_g) بالنسبة إلى محور الفواصل :

نحتاج إلى إشارة $g(x)$ لتحديد وضعية (C_g) بالنسبة إلى محور الفواصل .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_g) تحت (xx')	(C_g) يقطع (xx') في النقطة $A(0;0)$	(C_g) فوق (xx')	

5) الرسم :



✍ الجزء الثاني :

$f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$.

1) تعيين العددين الحقيقين a و b حيث : $f(x)=ax+\dfrac{bx}{(x-1)^2}$:

$$f(x)=ax+\frac{bx}{(x-1)^2}=\frac{ax(x-1)^2+bx}{(x-1)^2}=\frac{ax(x^2-2x+1)+bx}{(x-1)^2}=\frac{ax^3-2ax^2+ax+bx}{(x-1)^2}=\frac{ax^3-2ax^2+(a+b)x}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$ نجد : $a=1$ و $a+b=0$ أي : $1+b=0$ أي : $b=-1$, إذن : $f(x)=x+\dfrac{-x}{(x-1)^2}$.

2) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا (موازي لمحور التراتيب) معادلته $x=1$.

3) حساب $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{(2+h)^3-2(2+h)^2}{(2+h-1)^2}-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{(2+h)(2+h)^2-2(2+h)^2}{(2+h-1)^2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^2[2+h-2]}{h(h+1)^2}=$$

$$\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^2}{(h+1)^2}=\frac{2+0)^2}{(0+1)^2}=4\in\mathbb{R}$$

الدالة f قابلة للإشتقاق عند العدد 2 أي : $f'(2)=4$.

التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 2 معامل توجيهه يساوي 4 و منه معادلة هذا المماس هي:

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=4(x-2)+0=4x-8$.

4) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجالين : $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{(3x^2-4x)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-2x^2)}{(x-1)^4}=\frac{3x^3-3x^2-4x^2+4x-2x^3+4x^2}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{g(x)}{(x-1)^3}.$$

5) إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$ و منه : إشارة $f'(x)$ من إشارة $\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $]1;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $[0;1[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

6) تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to\pm\infty} x-\frac{x}{(x-1)^2}-x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{x}=0 .$$

و منه : $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

دراسة الوضعية النسبية بين (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

لدينا : $f(x)-y=\dfrac{-x}{(x-1)^2}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	

الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;0)$	(C_f) تحت (Δ)	$\|$	(C_f) تحت (Δ)	

7) تبيان أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة وحيدة A :

$(\Delta)\parallel(T)$ معناه : $f'(x)=1$

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}=1$ يكافئ : $\dfrac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3}=1$ يكافئ : $\dfrac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3}-1=0$ يكافئ : $\dfrac{x^3-3x^2+4x-1(x-1)^3}{(x-1)^3}=0$

يكافئ : $\dfrac{x^3-3x^2+4x-x^3+3x^2-3x+1}{(x-1)^3}=0$ أي : $x+1=0$ أي : $x=-1$.

و منه (C_f) يقبل مماسا (T) حيث $(\Delta)\parallel(T)$ عند النقطة $A(-1;f(-1))$

$f(-1)=\dfrac{(-1)^3-2(-1)}{(-1-1)^2}=\dfrac{-1-2}{4}=\dfrac{-3}{4}$ أي : $A(-1;-\dfrac{3}{4})$.

معادلة ديكارتية للمماس (T) عند النقطة $A(-1;-\dfrac{3}{4})$: $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=1(x+1)-\dfrac{3}{4}=x+\dfrac{1}{4}$.

8) إيجاد إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل (xx') :

نحل المعادلة : $f(x)=0$ أي : $\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=0$ أي : $x^3-2x^2=0$ أي : $x^2(x-2)=0$ إما : $x^2=0$ أو : $x-2=0$ أي :
$x=0$; $x=2$ و منه : $(C_f)\cap(xx')=\{(0,0);(2,0)\}$.

9) إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$: لدينا : $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$ أي : $f(x)=\dfrac{x^2(x-2)}{(x-1)^2}$

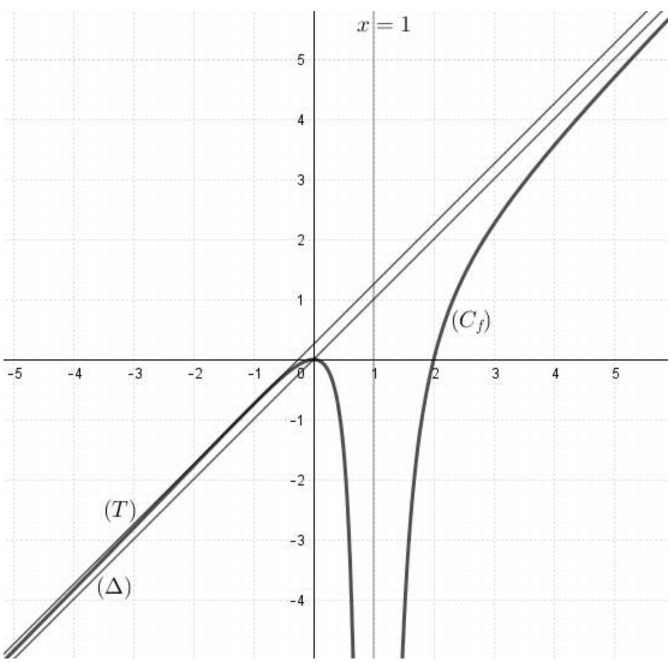
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل (xx') :

لدينا إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$ و منه :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (xx')	(C_f) يمس (xx')	(C_f) تحت (xx')	$\Vert$	(C_f) تحت (xx')	(C_f) يقطع (xx')	(C_f) فوق (xx')	

10) الرسم :



11) المناقشة البيانية :

◄ $f(x)=m$ الحلول البيانية للمعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=m$.

✍ $m<0$ أو $m\in]-\infty;0[$ للمعادلة ثلاث حلول (2 موجبة و حلا سالبا) .

✍ $m=0$ للمعادلة حلا مضاعفا معدوما و حلا موجبا تماما .

✍ $m>0$ أو $m\in]0;+\infty[$ للمعادلة حلا واحد موجبا تماما .

◄ $f(x)=|m|-1$

✍ $|m|-1<0$ أي : $|m|<1$ أي : $-1<m<1$ للمعادلة ثلاث حلول (2 موجبة و حلا سالبا).

✍ $|m|-1=0$ أي : $|m|=1$ أي : $m=-1$ و $m=1$ للمعادلة حلا مضاعفا معدوما و حلا موجبا تماما .

✍ $|m|-1>0$ أي : $|m|>1$ $m<-1$ و $m>1$ للمعادلة حلا واحد موجبا تماما .

◄ $f(x)=f(m)$ مع $m\neq 1$.

✍ $f(m)<0$ أي : $m\in]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,2[$ للمعادلة ثلاث حلول (2 موجبة و حلا سالبا).

✍ $f(x)=m$ أي : $m=0$ أو $m=2$ للمعادلة حلا مضاعفا معدوما و حلا موجبا تماما $x=2$.

✍ $f(m)>0$ أي : $m>2$ للمعادلة حلا واحد موجبا تماما .

◄ $-\dfrac{x}{(x-1)^2}=m$ نضيف x لكل طرف $x-\dfrac{x}{(x-1)^2}=x+m$ أي : $f(x)=x+m$ مناقشة مائلة أي : $(T)\parallel(\Delta_m)\parallel(\Delta)$.

✍ $m<0$ للمعادلة حلان موجبان تماما .

✍ $m=0$ للمعادلة حلا وحيدا معدوما .

✍ $0<m<\frac{1}{4}$ للمعادلة حلان سالبان .

✍ $m=\frac{1}{4}$ للمعادلة حلا مضاعفا سالبا .

✍ $m>\frac{1}{4}$ لا يوجد حلول للمعادلة .

◄ $f(x)=x+m^2-4$ مناقشة مائلة $(T)\parallel(\Delta_m)\parallel(\Delta)$.

✍ $m^2-4<0$ أي : $m^2<4$ أي : $\sqrt{m^2}<\sqrt{4}$ أي : $|m|<2$ و منه : $-2<m<2$ للمعادلة حلان متمايزان موجبان .

✍ $m^2-4=0$ أي : $m^2=4$ أي : $\sqrt{m^2}=\sqrt{4}$ أي : $|m|=2$ أي : $m=-2$ و $m=2$ للمعادلة حلا واحدا معدوما .

✍ $0<m^2-4<\frac{1}{4}$ أي : $4<m^2<\frac{17}{4}$ أي : $\sqrt{4}<\sqrt{m^2}<\sqrt{\frac{17}{4}}$ أي : $2<m<\sqrt{\frac{17}{4}}$ أي : $-\frac{\sqrt{17}}{2}<m<-2$ أو : $2<m<\frac{\sqrt{17}}{2}$ للمعادلة حلان سالبان .

✍ $m^2-4=\frac{1}{4}$ أي : $m^2=\frac{17}{4}$ أي : $\sqrt{m^2}=\sqrt{\frac{17}{4}}$ أي : $|m|=\frac{\sqrt{17}}{2}$ أي : $m=-\frac{\sqrt{17}}{2}$ أو $m=\frac{\sqrt{17}}{2}$ للمعادلة حلا مضاعفا سالبا .

✍ $m^2-4>\frac{1}{4}$ أي : $m^2>\frac{17}{4}$ أي : $\sqrt{m^2}>\frac{\sqrt{17}}{4}$ أي : $|m|>\frac{\sqrt{17}}{2}$ أي : $m<-\frac{\sqrt{17}}{2}$ أو $m>\frac{\sqrt{17}}{2}$ لا يوجد حلول للمعادلة .

◄ $x^3-2x^2=mx(x-1)^2$ أي : $\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=mx$ أي : $f(x)=mx$ مناقشة دورانية .

لتكن $A_0(x_0;y_0)$ حيث A_0 نقطة ثابتة من (Δ_m) حيث معادلة (Δ_m) هي : $y=mx$

$A_0\in(\Delta_m)$ معناه $y_0=mx_0$ معناه $mx_0-y_0=0$ (المتغير هو الوسيط m) أي : $x_0=0$ و $y_0=0$ أي : $A_0(0;0)$.

✍ $m<0$ للمعادلة ثلاث حلول واحد معدوم و 2 موجبة تماما .

✍ $m=0$ للمعادلة حلان أحدهما مضاعف معدوم و الآخر موجب تماما .

✍ $0 < m < 1$ للمعادلة ثلاث حلول واحد سالب و آخر معدوم و آخر موجب .

✍ $m = 1$ للمعادلة حلا واحدا معدوما .

✍ $m > 1$ للمعادلة حلا واحدا معدوما .

✍ الجزء الثالث :

لدينا الدوال العددية التالية : h_1 , h_2 , h_3 حيث :

$h_1(x) = f(|x|)$ و $D_{h_1} = \mathbb{R} - \{-1;1\}$, $h_2(x) = |f(x)|$ و $D_{h_2} = D_f$, $h_3(x) = f(x-1)+2$ و $D_{h_3} = \mathbb{R} - \{2\}$

1) تبيان أن h_1 دالة زوجية :

بما أن D_{h_1} متناظرة بالنسبة إلى O لأن : $D_{h_1} =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ و $x \in D_{h_1}$ و $-x \in D_{h_1}$:

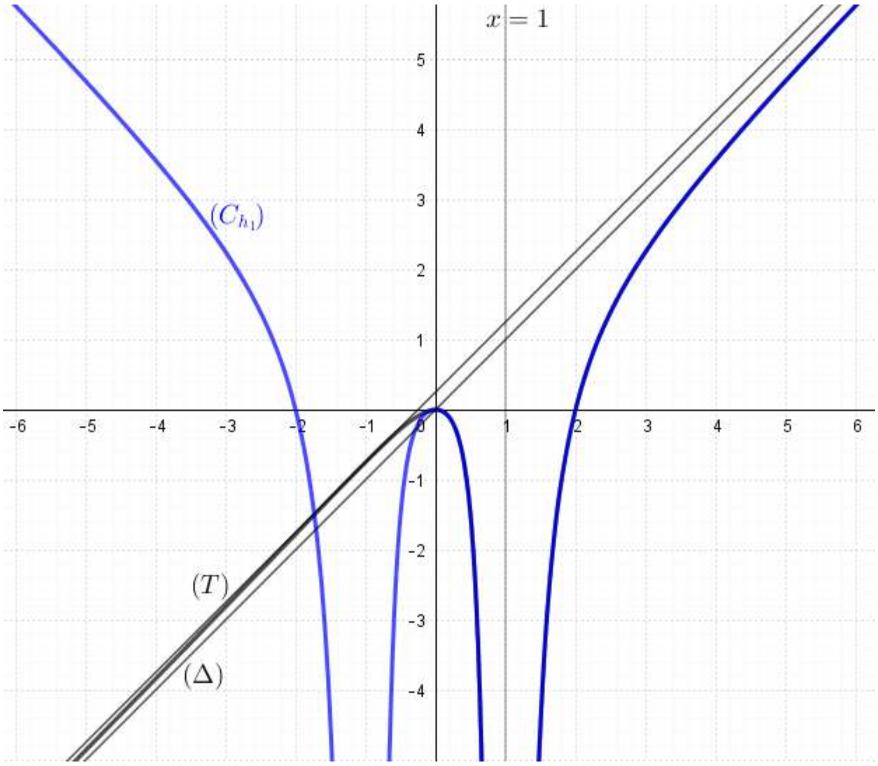
$h_1(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h_1(x)$ و منه h_1 دالة زوجية و (C_{h_1}) يكون متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .

2) شرح كيفية رسم المنحنيات (C_{h_1}), (C_{h_2}), (C_{h_3}) إنطلاقا من منحنى (C_f) مع إنشائها :

✍ شرح كيفية رسم (C_{h_1}) :

$$h_1(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) : x \in [0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(-x) : x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0] \end{cases}$$

(C_{h_1}) ينطبق على (C_f) في المجال $[0;1[\cup]1;+\infty[$ و بما أن h_1 دالة زوجية فنناظر (C_{h_1}) بالنسبة إلى محور التراتيب .

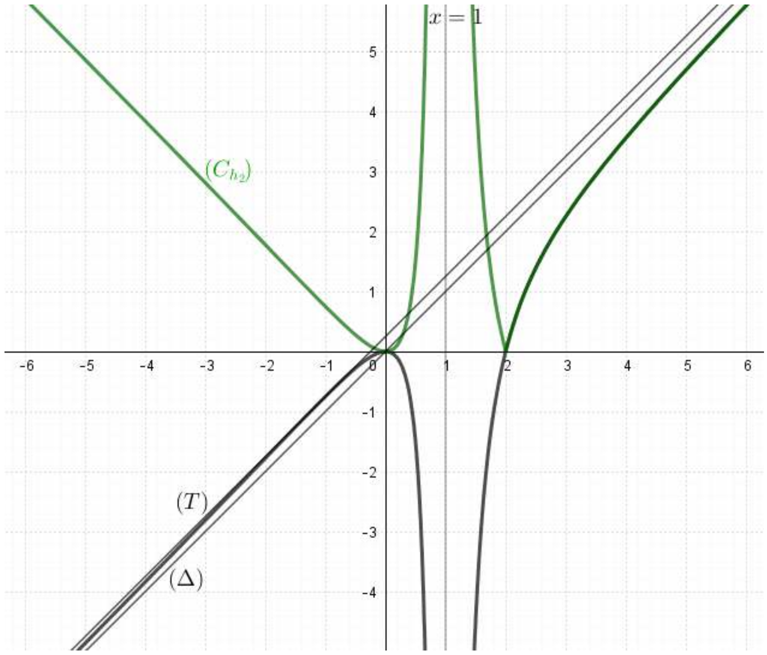


✍ شرح كيفية رسم (C_{h_2}) :

$$h_2(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) : f(x) \geq 0 \\ -f(x) : f(x) < 0 \end{cases}$$

(C_{h_2}) يقع فوق محور الفواصل لأن $|f(x)| \geq 0$

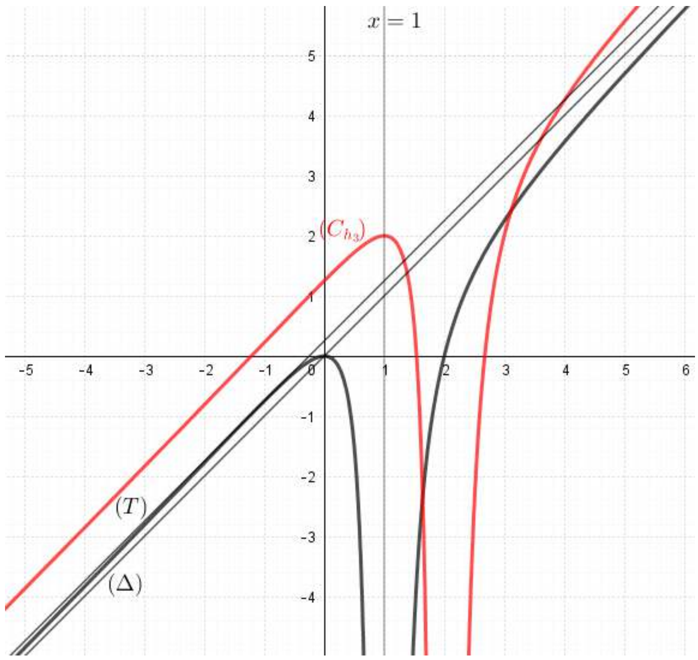
(C_{h_2}) ينطبق على (C_f) على المجال $[2;+\infty[$ و (C_{h_2}) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل على المجال $]-\infty;1[\cup]1;2]$.



✍ **شرح كيفية رسم (C_{h_3}) :**

$h_3(x)=f(x-1)+2$ و $D_{h_3}=\mathbb{R}-\{2\}$

يتم رسم (C_{h_3}) إنطلاقا من (C_f) بإنسحاب شعاعه $1\vec{i}+2\vec{j}$



✍ **الجزء الرابع :**

✍ الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $k(x)=f(x^2)$

1) دراسة إتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها :

نلاحظ أن $k=f\circ u$ حيث $u(x)=x^2$

الدالة k قابلة للإشتقاق على المجالات $]-\infty;-1[$ و $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي : $k'(x)=2xf'(x^2)$.

$f'(x^2)\geqslant 0$ إذا كان : $x^2\leqslant 0$ لما $x=0$ أو $x^2>1$ أي : $\sqrt{x^2}>\sqrt{1}$ أي : $|x|>1$ أي : $x>1$ أو $x<-1$.

$f'(x^2)\leqslant 0$ إذا كان : $0\leqslant x^2<1$ أي : $\sqrt{x^2}<\sqrt{1}$ أي : $|x|<1$ أي : $-1<x<1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f'(x^2)$		$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
$k'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

و بالتالي : الدالة k متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-1[$ و $]0;1[$ و متزايدة تماما على المجالين $]-1;0[$ و $]1;+\infty[$.

$$\lim_{x\to-\infty} k(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x^2) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\overset{<}{\to}-1} k(x) = \lim_{x\overset{<}{\to}-1} f(x^2) = \lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\overset{<}{\to}1} k(x) = \lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x^2) = \lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x) = -\infty$$
$k(0) = f(0^2) = f(0) = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x^2) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\overset{>}{\to}-1} k(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x^2) = \lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\overset{>}{\to}1} k(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x^2) = \lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x) = -\infty$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2022 و لا تنسونا من خالص دعائكم