طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

تمرين مع الحل في المتتاليات العددية

9

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 02 / 03

التمريـــــن

نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n \end{cases}$$

1. احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3.
2. نعتبر المتتاليتان (v_n) و (w_n) المعرفتان كما يلي:

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$$
$$w_n = \ln(v_n)$$

① برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0.

② اكتب بدلالة n عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

③ بين أن (w_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، ثم اكتب عبارة حدها العام.

④ اكتب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$S'_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$$

⑤ استنتج بدلالة n الجداء P_n حيث:

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$$

حل التمريـــن

❶ حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3:

- $u_{0+1} = 2u_0 + 2(0)^2 - (0) \Rightarrow u_1 = 2(1)$
  $\Rightarrow \boxed{u_1 = 2}$
- $u_{1+1} = 2u_1 + 2(1)^2 - (1) \Rightarrow u_2 = 2(2) + 2 - 1$
  $\Rightarrow \boxed{u_2 = 5}$
- $u_{2+1} = 2u_2 + 2(2)^2 - (2) \Rightarrow u_3 = 2(5) + 8 - 2$
  $\Rightarrow \boxed{u_3 = 16}$

❷

① برهان أن المتتالية (v_n) هندسية:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5 \\ &= 2u_n + 2n^2 - n + 2n^2 + 2 + 4n + 3n + 3 + 5 \\ &= 2u_n + 4n^2 + 6n + 10 \\ &= 2(u_n + 2n^2 + 3n + 5) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 + 2(0)^2 + 3(0) + 5 \\ &= 1 + 5 \\ &= 6 \end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية $\boxed{\text{هندسية}}$ أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = 6$

② كتابة بدلالة n عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) :

$v_n = v_0 \times q^n \Rightarrow \boxed{v_n = 6 \times 2^n}$

- استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n :

$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5 \Rightarrow u_n = v_n - 2n^2 - 3n - 5$
$\Rightarrow \boxed{u_n = 6 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5}$

③ تبيين أن (w_n) متتالية حسابية:

لدينا:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \ln(v_{n+1}) \\ &= \ln(6 \times 2^{n+1}) \\ &= \ln(6 \times 2^n \times 2) \\ &= \ln(v_n \times 2) \\ &= \ln(v_n) + \ln(2) \\ &= w_n + \ln(2) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$w_0 = \ln(v_0)$$
$$= \ln(6)$$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $\ln(2)$ وحدها الأول $\ln(6)$.

اذن:

$$w_n = w_0 + n \times r \Rightarrow \boxed{w_n = \ln(6) + n\ln(2)}$$

④ كتابة بدلالة n المجموعين S_n و S'_n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$= v_0\left(\frac{1 - q^{(\text{مجموع الحدود})}}{1-q}\right)$$
$$= 6\left(\frac{1-2^{n-0+1}}{1-2}\right)$$
$$= -6(1-2^{n+1})$$
$$= \boxed{6(2^{n+1}-1)}$$

$$S'_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$$
$$= \frac{1}{2}(\text{مجموع الحدود})(w_0 + w_n)$$
$$= \frac{1}{2}(n-0+1)(\ln 6 + \ln 6 + n\ln 2)$$
$$= \frac{n+1}{2}(\ln(6\times 6) + \ln 2^n)$$
$$= \boxed{\frac{n+1}{2}\ln(36 \times 2^n)}$$

⑤ استنتاج بدلالة n الجداء P_n:

لدينا:

$$w_n = \ln(v_n) \Rightarrow v_n = e^{w_n}$$

ومنه:

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$$
$$= e^{w_0} \times e^{w_1} \times \ldots \times e^{w_n}$$
$$= e^{w_0 + w_1 + \cdots + w_n}$$
$$= \boxed{e^{S'_n}}$$

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►