الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

تمرين مع الحل في المتتاليات العددية

8

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 31

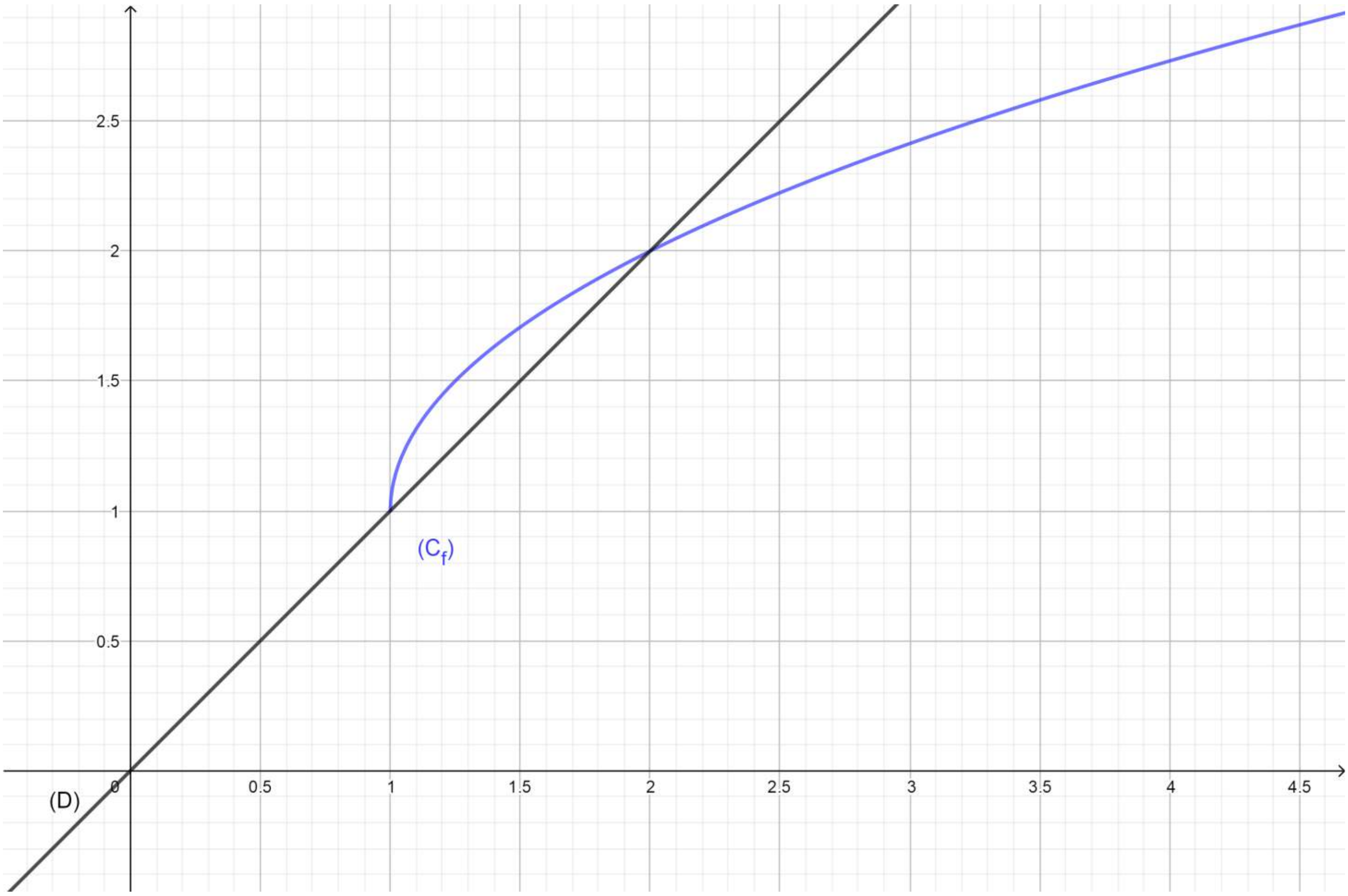
التمريـــن

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

وليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.



ونعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{5}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

❶

① باستعمال المنحني (C_f) والمستقيم (D) ، مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ،u_1 ،u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل.

② ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

❷

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$.

② اثبت ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

③ استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة.

❸ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي كما يلي:

$$v_n = \ln(u_n - 1)$$

① برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $1/2$ وعين حدها الأول v_0.

② اكتب عبارة (v_n) بدلالة n، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

③ عين نهاية (u_n).

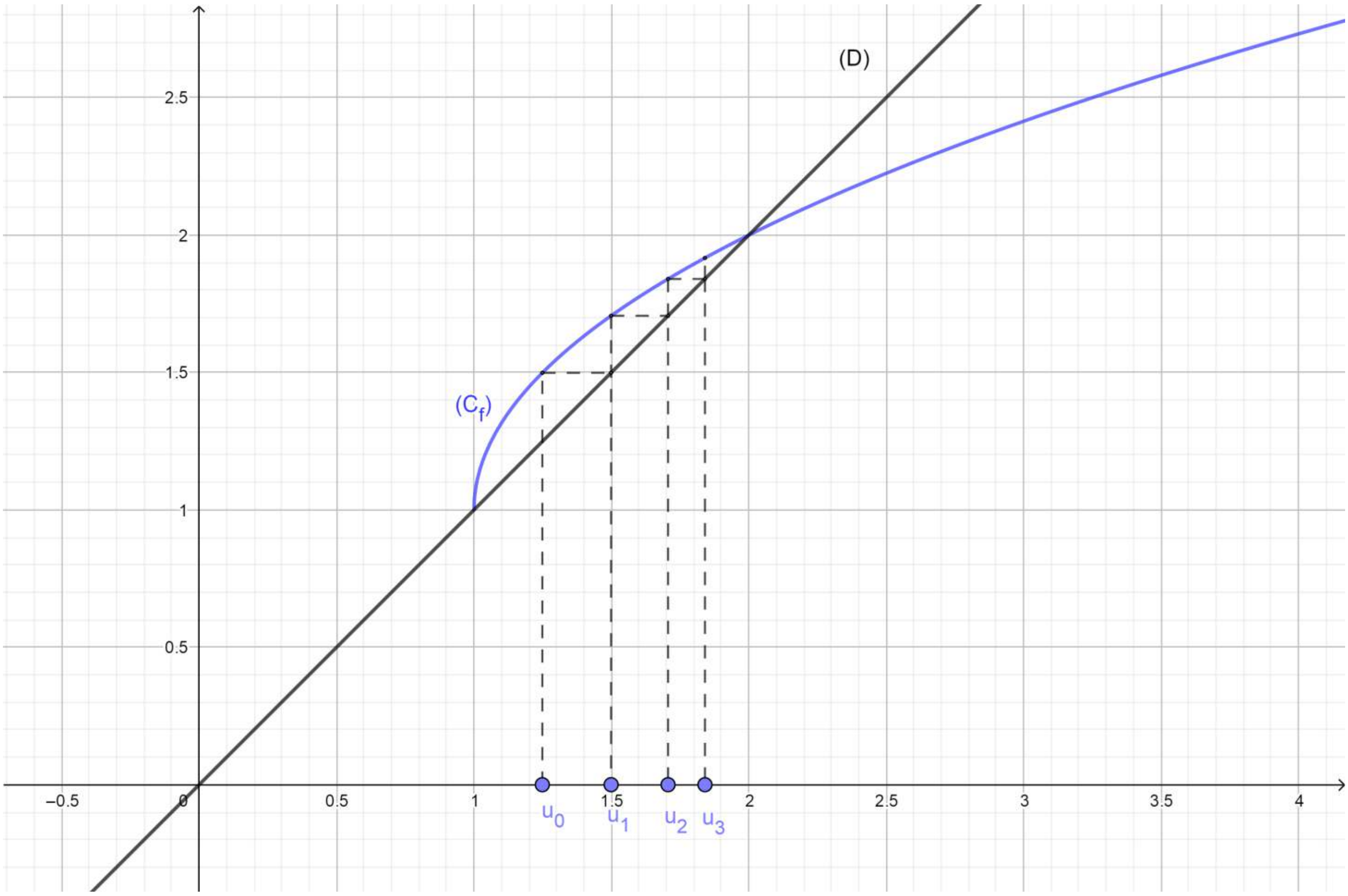
④ اكتب بدلالة n المجموع S_n والجداء P_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \ldots \times (u_n - 1)$$

حل التمريـــن ◀

❶

① تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 :



② وضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها:

يظهر لنا من تمثيل الحدود الأولى للمتتالية (u_n) أنها متزايدة وتتقارب نحو القيمة 2 .

❷

① البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$:

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$1 < u_0 < 2 \Rightarrow 1 < \frac{5}{4} < 2 \dots (*)$$

- نفرض أن $(1 < u_n < 2)$ ونثبت أن $(1 < u_{n+1} < 2)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} 1 < u_n < 2 &\Rightarrow 0 < u_n - 1 < 1 \\ &\Rightarrow 0 < \sqrt{u_n - 1} < 1 \\ &\Rightarrow 1 < 1 + \sqrt{u_n - 1} < 2 \\ &\Rightarrow 1 < f(u_n) < 2 \\ &\Rightarrow 1 < u_{n+1} < 2 \dots (**) \end{aligned}$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع: من $(*)$ و $(**)$ نجد:

$$\boxed{1 < u_n < 2}$$

② اثبات ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n \\ &= \frac{\left(1 - u_n + \sqrt{u_n - 1}\right)\left(1 - u_n - \sqrt{u_n - 1}\right)}{1 - u_n - \sqrt{u_n - 1}} \\ &= \frac{(1 - u_n)^2 - (u_n - 1)}{1 - \sqrt{u_n - 1} - u_n} \\ &= \frac{(u_n - 1)^2 - (u_n - 1)}{1 - \sqrt{u_n - 1} - u_n} \\ &= \frac{(u_n - 1)(u_n - 1 - 1)}{1 - \sqrt{u_n - 1} - u_n} \\ &= \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{1 - u_n - \sqrt{u_n - 1}} \\ &= \frac{-(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n - 1 + \sqrt{u_n - 1}} \end{aligned}$$

بما أن: $(1 < u_n < 2)$

لدينا: $u_n - 1 \geq 0$ ومنه: $\left(u_n - 1 + \sqrt{u_n - 1}\right) \geq 0$ إذن إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$-(u_n - 1)(u_n - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_n - 1 = 0 \\ \text{أو} \\ u_n - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n = 1 \\ \text{أو} \\ u_n = 2 \end{cases}$$

u_n	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن (u_n) $\boxed{\text{متزايدة}}$ تماما على $\mathbb{N}$.

③ استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 2 فهي $\boxed{\text{متقاربة}}$

❸

① برهان أن المتتالية (v_n) هندسية :

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}-1) \\ &= \ln\left(1+\sqrt{u_n-1}-1\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{u_n-1}\right) \\ &= \ln\left((u_n-1)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n-1) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_0 &= \ln(u_0-1) \\ &= \ln\left(\frac{5}{4}-1\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= -\ln 4 \end{aligned}$$

اذن (v_n) متتالية $\boxed{\text{هندسية}}$ أساسها $\boxed{\frac{1}{2}}$ وحدها الأول $\boxed{v_0 = -\ln(4)}$

② كتابة عبارة (v_n) و (u_n) بدلالة n:

لدينا:

$$\boxed{v_n = -\ln(4)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_n = \ln(u_n-1) &\Rightarrow e^{v_n} = u_n - 1 \\ &\Rightarrow u_n = e^{v_n}+1 \\ &\Rightarrow u_n = e^{-\ln(4)\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1 \\ &\Rightarrow \boxed{u_n = 4^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1} \end{aligned}$$

③ تعيين نهاية (u_n):

$$\begin{aligned} lim(u_n) &= lim\left(4^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1\right) \\ &= 1+1 \\ &= \boxed{2} \end{aligned}$$

لأن:

$$lim\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=0$$

④ كتابة بدلالة n المجموع S_n والجداء P_n :

$$\begin{aligned}S_n&=v_0+v_1+\cdots+v_n\\&=-\ln(4)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)\\&=\ln(4)\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}}\right)\\&=2\ln(4)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)\\&=\boxed{\ln(16)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_n&=(u_0-1)\times(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)\\&=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\ldots\times e^{v_n}\\&=e^{v_0+v_1+\cdots+v_n}\\&=e^{S_n}\\&=e^{\ln(16)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)}\\&=\boxed{16^{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)}}\end{aligned}$$

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►