الخليل
للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

تمرين مع الحل في
المتتاليات العددية

7

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 20

◀ التمريـــــن

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{9}{4u_n} \end{cases}$$

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$$

❷ ادرس اتجاه تغير (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

❸ (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$$

① بين أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

② اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n

③ عين $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$.

❹ عين بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$$

حل التمريـــن

❶ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{2} \le u_n \le 3$:

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$\frac{3}{2} \le u_0 \le 3 \Rightarrow \left[\frac{3}{2} \le 3 \le 3\right] \dots (*)$$

- نفرض أن $\left(\frac{3}{2} \le u_n \le 3\right)$ ونثبت أن $\left(\frac{3}{2} \le u_{n+1} \le 3\right)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \le u_n \le 3 &\Rightarrow 6 \le 4u_n \le 12 \\
&\Rightarrow \frac{1}{12} \le \frac{1}{4u_n} \le \frac{1}{6} \\
&\Rightarrow \frac{3}{4} \le \frac{9}{4u_n} \le \frac{3}{2} \\
&\Rightarrow -\frac{3}{2} \le -\frac{9}{4u_n} \le -\frac{3}{4} \\
&\Rightarrow \frac{3}{2} \le 3 - \frac{9}{4u_n} \le \frac{9}{4} \\
&\Rightarrow \frac{3}{2} \le u_{n+1} \le \frac{9}{4} \\
&\Rightarrow \left[\frac{3}{2} \le u_{n+1} \le 3\right] \dots (*)
\end{aligned}$$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع: من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\boxed{\frac{3}{2} \le u_n \le 3}$$

❷ دراسة اتجاه تغير (u_n) ، ثم استنتاج أنها متقاربة:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 3 - \frac{9}{4u_n} - u_n \\
&= \frac{12u_n - 9 - 4(u_n)^2}{4u_n}
\end{aligned}$$

لدينا: $4u_n > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط

$$12u_n - 9 - 4(u_n)^2 = 0$$

ولدينا:

$$\Delta = 12^2 - 4(-4)(-9) = 0$$

ومنه:

$$u_n = \frac{-12}{2(-4)} = \frac{3}{2}$$

ومنه:

$$12u_n - 9 - 4(u_n)^2 = 0 \Rightarrow \left(u_n - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{2}$$

u_n	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	$+$	0	$-$

ومنه (u_n) $\boxed{\text{متناقصة}}$ تماما على المجال $\left]\frac{3}{2};4\right[$

- الاستنتاج:

لدينا (u_n) متناقصة تماما $\left]\frac{3}{2};4\right[$ ومحدودة من الأسفل بـ $\frac{3}{2}$ فهي متقاربة

❸

① تبيين أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{2}{2u_{n+1} - 3} \\
&= \frac{2}{2\left(3 - \frac{9}{4u_n}\right) - 3} \\
&= \frac{2}{\frac{24u_n - 18 - 12u_n}{4u_n}} \\
&= \frac{8u_n}{12u_n - 18} \\
&= \frac{4u_n}{6u_n - 9} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{2u_n}{2u_n - 3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{2u_n - 3 + 3}{2u_n - 3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{2u_n - 3}{2u_n - 3} + \frac{3}{2u_n - 3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{3}{2u_n - 3}\right) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{2}{2u_n - 3} \\
&= \frac{2}{3} + v_n
\end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = \frac{2}{2u_0 - 3} = \frac{2}{3}$$

ومنه (v_n) متتالية $\boxed{\text{حسابية}}$ أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $\frac{2}{3}$

② كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n :

$$v_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}n \Rightarrow \boxed{v_n = \frac{2}{3}(n+1)}$$

ولدينا:

$$v_n = \frac{2}{2u_n - 3} \Rightarrow 2v_n u_n - 3v_n = 2$$
$$\Rightarrow 2v_n u_n = 2 + 3v_n$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{2 + 3v_n}{2v_n}$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{2 + 3\frac{2}{3}(n+1)}{2\frac{2}{3}(n+1)}$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{3 \times 2(n+2)}{4(n+1)}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{3(n+2)}{2(n+1)}}$$

③ تعيين $\lim_{n\to+\infty} (u_n)$:

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3(n+2)}{2(n+1)}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n}{2n}\right)$$
$$= \boxed{\frac{3}{2}}$$

❹ تعيين بدلالة n المجموع S_n:

لدينا:

$$v_n = \frac{2}{2u_n - 3} \Rightarrow 2u_n v_n - 3v_n = 2$$
$$\Rightarrow u_n v_n = \frac{2 + 3v_n}{2}$$
$$\Rightarrow 1 + \frac{3}{2}v_n$$

ومنه

$$S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

$$= 1 + \frac{3}{2}v_0 + 1 + \frac{3}{2}v_1 + \cdots + 1 + \frac{3}{2}v_n$$
$$= 1(n+1) + \frac{3}{2}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$$
$$= n + 1 + \frac{3}{2}\left(\left(\underbrace{\frac{2}{3}(n+1)}_{v_n} + \underbrace{\frac{2}{3}}_{v_0}\right)\frac{\overbrace{n+1}^{n-0+1}}{2}\right)$$
$$= (n+1) + \frac{3}{2}\left(\left(\frac{2}{3}(n+2)\right)\frac{n+1}{2}\right)$$
$$= (n+1) + \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$
$$= (n+1)\left(1 + \frac{n+2}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{n+4}{2}\right)$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}(n+1)(n+4)}$$

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►