طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

تمرين مع الحل في المتتاليات العددية

5

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

15 / 01 / 2021

التمريـــــن

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \end{cases}$$

وَ (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = u_n - 4$$

1. بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_n \leq 4$
2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.
3. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
4. اكتب كل من (v_n) و (u_n) بدلالة n .
5. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + 2 + \cdots + u_n$
6. لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$$

① بين أن المتتالية (w_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

② احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} [u_n - w_n]$

◀ حل التمريـــن

❶ تبيين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_n \leq 4$:

نستعمل البرهان بالتراجع:

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 1 \leq 4 \dots (*)$$

الخاصية محققة من أجل $n = 0$

- نفرض أن $u_n \leq 4$ محققة ونثبت أنّ $u_{n+1} \leq 4$:

$$u_n \leq 4 \Rightarrow \frac{2}{3}u_n \leq \frac{8}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq 4$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \leq 4 \dots (**)$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع : من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\boxed{u_n \leq 4}$$

❷ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} - u_n$$
$$= -\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3}$$

لدينا:

$$-\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} = 0$$
$$\Rightarrow u_n = 4$$

u_n	$-\infty$	4	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	$+$	0	$-$

ومنه لما $u_n \leq 4$ لدينا (u_n) **متزايدة تماما**.

❸ تبيين أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4$$
$$= \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} - 4$$
$$= \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{3}$$
$$= \frac{2}{3}(u_n - 4)$$

$$= \frac{2}{3} v_n$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 - 4 = -3$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = -3$.

❹ كتابة كلا من (v_n) و (u_n) بدلالة n :

$$\boxed{v_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

ولدينا:

$$v_n = u_n - 4 \Rightarrow u_n = v_n + 4$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = 4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

❺ حساب بدلالة n المجموع S_n:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + 2 + \cdots + u_n \\ &= v_1 + 4 + v_2 + 4 + \cdots + v_n + 4 \\ &= 4n + (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\ &= 4n - 3\left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}\right) \\ &= 4n - 2\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}\right) \\ &= \boxed{4n - 6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} \end{aligned}$$

❻

① تبيين أن المتتالية (w_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$:

لدينا:

$$w_{n+1} - w_n = 5\left(\frac{1}{v_{n+1} + 5} - 1\right) - 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$$

$$= 5\left(\frac{1}{5 \underbrace{-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}_{v_{n+1}}} - 1 - \frac{1}{5 \underbrace{-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}_{v_n}} + 1\right)$$

$$= 5\left(\frac{1}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} - \frac{1}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}\right)$$

ولدينا:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \Rightarrow -3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} > -3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

$$\Rightarrow 5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} > 5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} < \frac{1}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} - \frac{1}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}} < 0$$

$$\Rightarrow 5\left(\frac{1}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} - \frac{1}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}\right) < 0$$

$$\Rightarrow w_{n+1} - w_n < 0$$

ومنه (w_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

② حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}[u_n - w_n]$:

$$\lim_{n\to+\infty}[u_n - w_n] = \lim_{n\to+\infty}\left[4\underbrace{-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}_{0} - 5\left(\frac{1}{\underbrace{-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}_{0}+5} - 1\right)\right]$$

$$= 4 - 5\left(\frac{1}{5} - 1\right)$$

$$= \boxed{8}$$

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►