الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

# تمرين مع الحل في المتتاليات العددية

④


إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل


آخر تحديث:

2021 / 01 / 15

## التمريـــــن

❶ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $(u_n)$:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

① احسب $u_1$ و $u_2$.

② برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $0 < u_n < 3$

❷ لتكن $(v_n)$ المتتالية المُعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$$

① بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

② اكتب $(v_n)$ بدلالة $n$ ، ثم استنتج $(u_n)$ بدلالة $n$ .

③ احسب نهاية المتتالية $(u_n)$ .

❸ $(w_n)$ المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ:

$$w_n = \frac{3}{u_n}$$

نضع: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

① اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $w_n = 1 - v_n$

② بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$$S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

③ احسب $\lim_{n\to+\infty} \left[{}^{S_n}/_{n}\right]$ .

الخليل للرياضيات

## حل التمريـــن

❶

① حساب $u_1$ و $u_2$:

$$u_{0+1}=\frac{4u_0}{1+u_0}\Rightarrow u_1=\frac{4}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_1=2}$$
$$u_{1+1}=\frac{4u_1}{1+u_1}\Rightarrow u_1=\frac{4\times 2}{1+2}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_1=\frac{8}{3}}$$

② البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $0<u_n<3$:

- من أجل $n=0$ لدينا:

$$0<1<3$$
$$\Rightarrow 0<u_0<3\ldots(*)$$

الخاصية محققة من أجل $n=0$

- نفرض أن $0<u_n<3$ صحيحة ونثبت أن $0<u_{n+1}<3$:

لدينا:

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=\frac{4u_n}{1+u_n}\\&=\frac{4u_n+4-4}{1+u_n}\\&=\frac{4(u_n+1)}{1+u_n}-\frac{4}{1+u_n}\\&=4-\frac{4}{1+u_n}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}0<u_n<3&\Rightarrow 1<1+u_n<4\\&\Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{1+u_n}<1\\&\Rightarrow 1<\frac{4}{1+u_n}<4\\&\Rightarrow -4<-\frac{4}{1+u_n}<-1\\&\Rightarrow 0<4-\frac{4}{1+u_n}<3\end{aligned}$$

الخليل للرياضيات

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 3 \ldots (**)$$

حسب البرهان بالتراجع من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\boxed{0 < u_n < 3}$$

❷

① تبيين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{4u_n}{1+u_n} - 3}{\frac{4u_n}{1+u_n}} \\ &= \frac{4u_n - 3 - 3u_n}{4u_n} \\ &= \frac{u_n - 3}{4u_n} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{u_n - 3}{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{4} v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{u_0 - 3}{u_0} \\ &= \frac{1-3}{1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

ومنه $(v_n)$ متتالية $\boxed{\text{هندسية}}$ أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $-2$

② كتابة $(v_n)$ بدلالة $n$ ثم استنتج $(u_n)$ بدلالة $n$ :

$$\boxed{v_n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 3}{u_n} &\Rightarrow v_n u_n - u_n = -3 \\ &\Rightarrow u_n(v_n - 1) = -3 \\ &\Rightarrow u_n = \frac{-3}{v_n - 1} \\ &\Rightarrow u_n = \frac{3}{1 - v_n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{3}{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n}}$$

③ حساب نهاية المتتالية $(u_n)$ :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(u_n = \frac{3}{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n}\right)$$
$$= \frac{3}{1+2(0)}$$
$$= \boxed{3}$$

**3**

① اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $w_n = 1 - v_n$ :

$$w_n = \frac{3}{u_n}$$
$$= \frac{3}{\frac{3}{1-v_n}}$$
$$= 3 \times \frac{1-v_n}{3}$$
$$= \boxed{1-v_n}$$

② تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $S_n = n+1+\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$ :

$$S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$$
$$= 1 - v_0 + 1 - v_1 + \cdots + 1 - v_n$$
$$= 1(n+1) - (v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$$
$$= n+1+2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)$$
$$= n+1+2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}\right)$$
$$= \boxed{n+1+\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}$$

③ حساب $\lim_{n\to+\infty}\left[{S_n}/{n}\right]$ :

الخليل للرياضيات

$$\lim_{n\to+\infty}\left[{}^{S_n}/_{n}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left\lfloor\frac{n+1+\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}{n}\right\rfloor$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{n}+\frac{8}{3n}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right]$$

$$=\boxed{1}$$

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶

الخليل للرياضيات