طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

تمرين مع الحل في المتتاليات العددية

③

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 12

التمريـــــن

❶ (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

وَ (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

ولنعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

① مثل بيانيا (C_f) و (D) ، ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها مبررا خطوط الانشاء.

② ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

③ برهن بالتراجع أن: $u_n \leq 6$ مهما كان $n \in \mathbb{N}$.

④ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل هي متقاربة ؟ برر اجابتك.

❷ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

① اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

② اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

④ عبر بدلالة n عن المجموعين S_n و S'_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

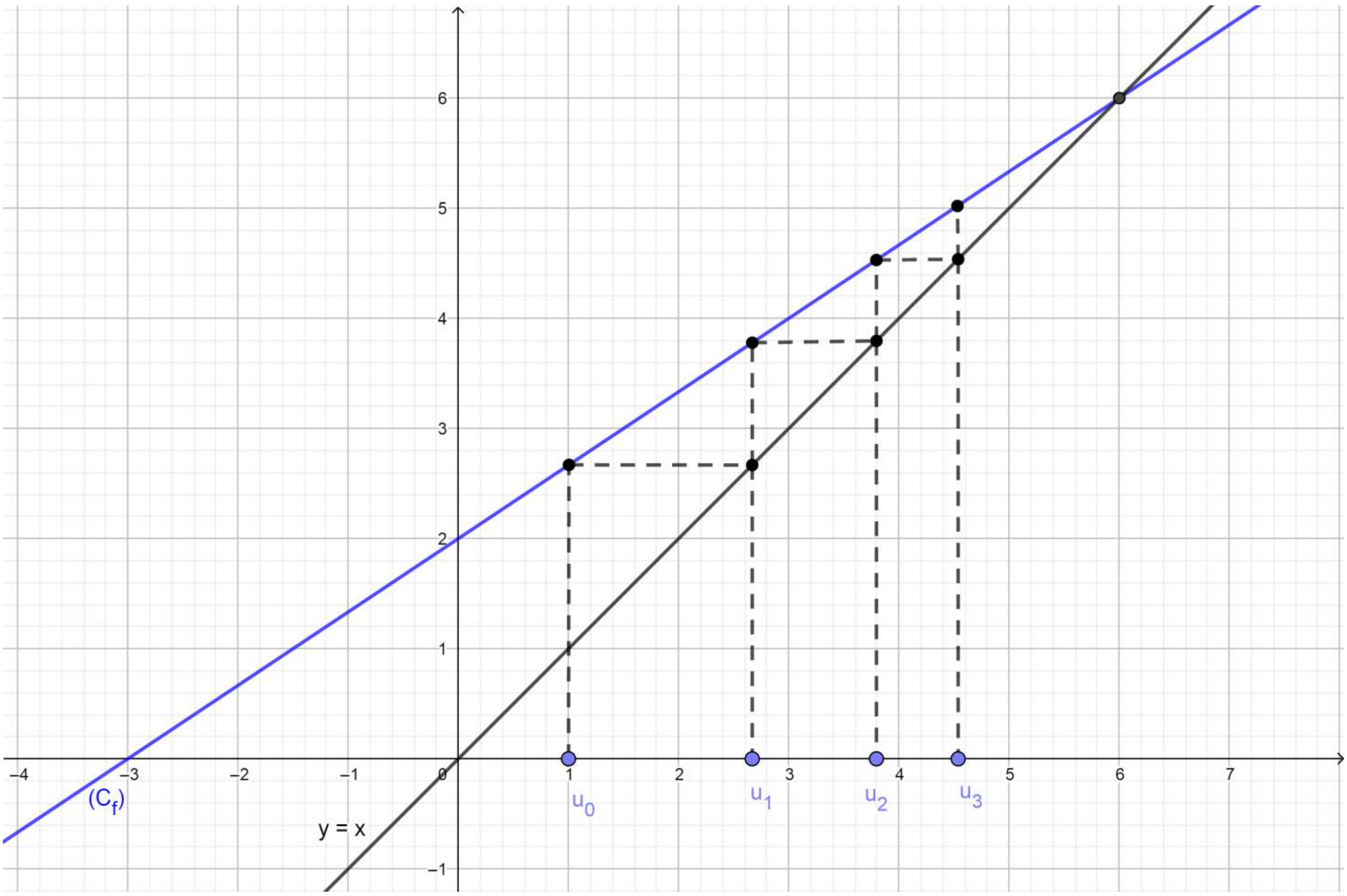
⑤ عبر بدلالة n عن المجموع Q_n حيث: $Q_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$

⑥ عبر بدلالة n عن الجداء P_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

◀ حل التمريــن

❶

① التمثيل البياني للدالة f وتمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها:



② التخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها:

من التمثيل البياني لدينا $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ، ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة، وتتقارب نحو نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ) أي في النقطة ذات الفاصلة 6

③ البرهان بالتراجع أنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 6$:

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 1 \leq 6 \ldots (*)$$

- نفرض أن $u_n \leq 6$ ونثبت صحية $u_{n+1} \leq 6$:

$$u_n \leq 6 \Rightarrow \frac{2}{3}u_n \leq 4$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \leq 6 \ldots (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أن: $\boxed{u_n \leq 6}$

④ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n):

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+2-u_n$$
$$=-\frac{1}{3}u_n+2$$

لدينا:

$$-\frac{1}{3}u_n+2=0\Rightarrow u_n=6$$

ومنه:

u_n	$-\infty$ 6 $+\infty$
$u_{n+1}-u_n$	$+$ 0 $-$

لدينا من الجدول لما $u_n\leq 6$ تكون (u_n) متزايدة.

وبما أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 6 فهي متقاربة.

❷

① اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا:

$$v_{n+1}=u_{n+1}-6$$
$$=\frac{2}{3}u_n+2-6$$
$$=\frac{2}{3}u_n-4$$
$$=\frac{2}{3}(u_n-6)$$
$$=\frac{2}{3}v_n$$

ولدينا:

$$v_0=u_0-6=-5$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول -5 .

② كتابة عبارة v_n بدلالة n و استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

$$\boxed{v_n=-5\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

لدينا:

$$v_n=u_n-6\Rightarrow u_n=v_n+6$$
$$\Rightarrow\boxed{u_n=6-5\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty}[u_n] = \lim_{n\to+\infty}\left[6-5\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 6$$

④ التعبير بدلالة n عن المجموعين S_n و S'_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$= -5\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right)$$
$$= -5\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}\right)$$
$$\boxed{S_n = 15\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right)}$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$= v_0 + 6 + v_1 + 6 + \cdots + v_n + 6$$
$$= 6(n+1) + \underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{S_n}$$
$$\boxed{S'_n = 6(n+1) + 15\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right)}$$

⑤ التعبير بدلالة n عن المجموع Q_n:

$$Q_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$$
$$= (-5)^2\left(\frac{1-\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right)$$
$$= 25\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2(n+1)}}{\frac{5}{9}}\right)$$
$$Q_n = 45\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2(n+1)}\right)$$

⑥ التعبير بدلالة n عن الجداء P_n:

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$$
$$= (-5)\left(\frac{2}{3}\right)^0 \times (-5)\left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \ldots \times (-5)\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= (-5)^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{1} \times \ldots \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)$$

$$= (-5)^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{0+1+\cdots+n}\right)$$

$$\boxed{P_n = (-5)^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}(n+1)}\right)}$$

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►