الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

تمرين مع الحل في المتتاليات العددية

②

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 05

◄ التمريــــن

المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: (u_n)

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 2}{u_n + 3} \end{cases}$$

وَ (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

❶ بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

❷

① اكتب عبارة v_n بدلالة n .

② اكتب عبارة u_n بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n)

❸

① عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

② تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$$

③ استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث:

$$S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \cdots + \frac{1}{u_n + 2}$$

◀ حل التمريـــن

❶ تبيين أن (v_n) متتالية هندسية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} \\
&= \frac{\left(\frac{2u_n+2}{u_n+3}-1\right)}{\left(\frac{2u_n+2}{u_n+3}+2\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{2u_n+2-u_n-3}{u_n+3}\right)}{\left(\frac{2u_n+2+2u_n+6}{u_n+3}\right)} \\
&= \frac{u_n-1}{4u_n+8} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{u_n-1}{u_n+2}\right) \\
&= \frac{1}{4}v_n
\end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول v_0 حيث:

$$v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = -\frac{1}{2}$$

❷

① **كتابة عبارة v_n بدلالة n :**

لدينا (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $-\frac{1}{2}$ فهي تكتب على الشكل:

$$\boxed{v_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

② **كتابة عبارة u_n بدلالة n :**

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} &\Rightarrow v_n(u_n+2)-(u_n-1)=0 \\
&\Rightarrow v_nu_n+2v_n-u_n+1=0 \\
&\Rightarrow u_n(v_n-1)+2v_n+1=0 \\
&\Rightarrow u_n(v_n-1)=-1-2v_n \\
&\Rightarrow u_n = \frac{-1-2v_n}{v_n-1} \\
&\Rightarrow u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n}}$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n):

$$\lim_{n\to+\infty}[u_n] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n}\right]$$
$$= \frac{1}{1}$$
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}[u_n] = 1}$$

❸

① التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$= v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)}$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}$$
$$\boxed{S_n = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1\right)}$$

② التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3}(1-v_n)$:

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \Rightarrow v_n = \frac{u_n-1+2-2}{u_n+2}$$
$$\Rightarrow v_n = \frac{u_n+2}{u_n+2} + \frac{-3}{u_n+2}$$
$$\Rightarrow v_n = 1 - \frac{3}{u_n+2}$$
$$\Rightarrow v_n - 1 = -\frac{3}{u_n+2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{3}(1-v_n)=\frac{1}{u_n+2}}$$

③ استنتاج بدلالة n المجموع S'_n :

$$S'_n=\frac{1}{u_0+2}+\frac{1}{u_1+2}+\cdots+\frac{1}{u_n+2}$$

$$=\frac{1}{3}(1-v_0)+\frac{1}{3}(1-v_1)+\cdots+\frac{1}{3}(1-v_n)$$

$$=\frac{1}{3}(1-v_0+1-v_1+\cdots+1-v_n)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1\times(n+1)-\underbrace{(v_0+v_1+\cdots+v_n)}_{S_n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left((n+1)-\frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1\right)\right)$$

$$\boxed{S'_n=\frac{1}{3}\left(n+1+\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right)}$$

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶