الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير واقتصاد

تمرين شامل مع الحل في المتتاليات العددية

10

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 04 / 14

التمريـــــن

نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0، ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}=\frac{\alpha u_n}{u_n+1}$$

مع $\alpha\in\mathbb{R}^*$

I) نفرض أن: $u_0=1$ و $\alpha=1$.

1. أحسب u_1، u_2 و u_3.
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$.
3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.
4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n=\frac{1}{u_n}$$

① بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0.

② اكتب بدلالة n عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n).

5. اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n=v_{n+2021}+v_{n+2022}+\cdots+v_{2n}$$

II) نضع $u_0=6$ و $\alpha=4$:

1. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>3$.
2. (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$w_n=\frac{u_n-3}{u_n}$$

① بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$، يطلب تعيين حدها الأول.

② اكتب عبارة (w_n) بدلالة n، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n.

③ احسب نهاية المتتالية (u_n).

3. اكتب بدلالة n ما يلي:

$$\begin{aligned}
A_n&=w_0+w_1+w_2+\cdots+w_n\\
B_n&=w_0^2+w_1^2+w_2^2+\cdots+w_n^2\\
C_n&=\sqrt{w_0}+\sqrt{w_1}+\sqrt{w_2}+\cdots+\sqrt{w_n}\\
D_n&=\frac{1}{w_0}+\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\cdots+\frac{1}{w_n}\\
E_n&=w_0+2w_1+4w_2+\cdots+2^nw_n
\end{aligned}$$

$$F_n = w_1 + w_3 + w_5 + \cdots + w_{2n-1}$$
$$G_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}$$
$$H_n = w_0 \times w_1 \times w_2 \times \ldots \times w_n$$
$$I_n = \ln(w_0) + \ln(w_1) + \ln(w_2) + \cdots + \ln(w_n)$$

III) نفرض أنّ: $u_0 = \alpha$:

نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$t_n = \frac{u_n - (\alpha - 1)}{u_n}$$

❶ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$t_{n+1} = \frac{1}{\alpha} t_n$$

❷ اكتب عبارة u_n بدلالة n و α

حل التمريـــن

ا)

❶ حساب u_1، u_2 و u_3:

$$u_{0+1}=\frac{\alpha u_0}{u_0+1}\Rightarrow u_1=\frac{1}{1+1}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_1=\frac{1}{2}}$$
$$u_{1+1}=\frac{\alpha u_1}{u_1+1}\Rightarrow u_2=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_2=\frac{1}{3}}$$
$$u_{2+1}=\frac{\alpha u_2}{u_2+1}\Rightarrow u_3=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_3=\frac{1}{4}}$$

❷ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$:

- من أجل $n=0$ لدينا:

$$u_0=1>0\ ...(*)$$

- نفرض أن $[u_n>0]$ ونثبت أن $[u_{n+1}>0]$:

لدينا:

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=\frac{u_n}{u_n+1}\\&=\frac{u_n+1-1}{u_n+1}\\&=1-\frac{1}{u_n+1}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}&u_n>0\Rightarrow u_n+1>1\\&\Rightarrow \frac{1}{u_n+1}<1\\&\Rightarrow -\frac{1}{u_n+1}>-1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{u_n+1}>0$$
$$\Rightarrow u_{n+1}>0 \ldots (**)$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع: من $(*)$ و $(**)$ نجد أن: $(u_n>0)$

❸ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{u_n+1}-u_n$$
$$=\frac{u_n-(u_n)^2-u_n}{u_n+1}$$
$$=\frac{-(u_n)^2}{u_n+1}$$

بما أن $u_n>0$ فإن $u_n+1>0$ ومنه الإشارة من $-(u_n)^2$

وعليه $u_{n+1}-u_n<0$

إذن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

- استنتاج أن (u_n) متقاربة:

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل بـ 0 فهي متقاربة

❹

① تبيين أن المتتالية (v_n) حسابية :

لدينا:

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}$$
$$=\frac{u_n+1}{u_n}$$
$$=1+\frac{1}{u_n}$$

ولدينا:

$$v_0=\frac{1}{u_0}=1$$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1 وحدها الأول 1.

② كتابة بدلالة n عبارة الحد العام للمتتالية (v_n):

$$v_n=v_0+rn\Rightarrow \boxed{v_n=1+n}$$

- استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n :

$$v_n=\frac{1}{u_n}\Rightarrow u_n=\frac{1}{v_n}$$

الخليل للرياضيات

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{1+n}}$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n):

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = \boxed{0}$$

❺ كتابة بدلالة n المجموع S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_{n+2021} + v_{n+2022} + \cdots + v_{2n} \\ &= \frac{2n-n-2021+1}{2}\left(\underbrace{1+2n}_{v_{2n}} + \underbrace{1+n+2021}_{v_{n+2021}}\right) \\ &= \frac{(n-2020)(2n+2023)}{2} \end{aligned}$$

II) من أجل $u_0 = 6$ و $\alpha = 4$ لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n+1}$$

❶ برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 3$:

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 6 > 3 \ldots (*)$$

- نفرض أن $[u_n > 3]$ ونثبت أن $[u_{n+1} > 3]$:

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{4u_n}{u_n+1} \\ &= \frac{4u_n+4-4}{u_n+1} \\ &= \frac{4(u_n+1)-4}{u_n+1} \\ &= 4 - \frac{4}{u_n+1} \end{aligned}$$

ولدينا حسب فرض التراجع:

$$\begin{aligned} u_n > 3 &\Rightarrow u_n + 1 > 4 \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_n+1} < \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{u_n+1} > -\frac{1}{4} \\ &\Rightarrow 4 - \frac{1}{u_n+1} > \frac{15}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > \frac{15}{4}$$
$$\Rightarrow u_{n+1} > 3 \ldots (**)$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع: من $(*)$ و $(**)$ نجد أن: $(u_n > 3)$

❷

① تبيين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{4u_n}{u_n + 1} - 3}{\frac{4u_n}{u_n + 1}} \\ &= \frac{4u_n - 3u_n - 3}{4u_n} \\ &= \frac{u_n - 3}{4u_n} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{u_n - 3}{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{4} w_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$w_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0} = \frac{6 - 3}{6} = \frac{1}{2}$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$.

② كتابة عبارة (w_n) بدلالة n:

$$\boxed{w_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

- استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n:

$$\begin{aligned} w_n = \frac{u_n - 3}{u_n} &\Rightarrow u_n w_n - u_n = -3 \\ &\Rightarrow u_n(w_n - 1) = -3 \\ &\Rightarrow u_n = -\frac{3}{w_n - 1} \\ &\Rightarrow u_n = -\frac{3}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n=\frac{3}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n}}$$

③ احسب نهاية المتتالية (u_n):

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n}\right)=\boxed{3}$$

لأن:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)=0$$

❸

$$\begin{aligned}A_n&=w_0+w_1+w_2+\cdots+w_n\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}\right)\\&=\boxed{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_n&=w_0^2+w_1^2+w_2^2+\cdots+w_n^2\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{2(n+1)}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{2(n+1)}}{\frac{15}{16}}\right)\\&=\boxed{\frac{4}{15}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{2(n+1)}\right)}\end{aligned}$$

$$C_n=\sqrt{w_0}+\sqrt{w_1}+\sqrt{w_2}+\cdots+\sqrt{w_n}$$

$$=\boxed{\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^{n+1}}{1-\sqrt{\frac{1}{4}}}\right)}$$

$$D_n=\frac{1}{w_0}+\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\cdots+\frac{1}{w_n}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\frac{1}{4}}}\right)$$

$$=2\left(\frac{1-(4)^{n+1}}{1-4}\right)$$

$$=\boxed{\frac{2}{3}\left((4)^{n+1}-1\right)}$$

$$E_n=w_0+2w_1+4w_2+\cdots+2^n w_n$$

لدينا:

$$2^n w_n=2^n\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)\left(2\times\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ومنه $(2^n w_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $2^0 w_0=\frac{1}{2}$

$$E_n=w_0+2w_1+4w_2+\cdots+2^n w_n$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\boxed{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

$$F_n=w_1+w_3+w_5+\cdots+w_{2n-1}$$

$$=w_1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1-1+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}}{\frac{3}{4}}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}\right)}$$

$$G_n = \frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}$$
$$= \frac{1-w_0}{3}+\frac{1-w_1}{3}+\frac{1-w_2}{3}+\cdots+\frac{1-w_n}{3}$$
$$= \frac{1}{3}(1-w_0+1-w_1+1-w_2+\cdots+1-w_n)$$
$$= \frac{1}{3}\left(1\times(n+1)-\underbrace{(w_0+w_1+w_2+\cdots+w_n)}_{A_n}\right)$$
$$= \boxed{\frac{1}{3}\left(n+1-\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right)}$$

$$H_n = w_0\times w_1\times w_2\times\ldots\times w_n$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\times\ldots\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{0+1+2+\cdots n}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}n\right)}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2\left(\frac{n+1}{2}n\right)}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)+(n+1)n}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)^2}$$

$$I_n = \ln(w_0)+\ln(w_1)+\ln(w_2)+\cdots+\ln(w_n)$$
$$= \ln(w_0\times w_1\times w_2\times\ldots\times w_n)$$
$$= \ln(H_n)$$

$$= \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)^2}\right)$$
$$= (n+1)^2 \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= -(n+1)^2 \ln(2)$$

(III

❶ تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n $t_{n+1} = \frac{1}{\alpha} t_n$:

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} - (\alpha - 1)}{u_{n+1}}$$
$$= \frac{\frac{\alpha u_n}{u_n + 1} - (\alpha - 1)}{\frac{\alpha u_n}{u_n + 1}}$$
$$= \frac{\alpha u_n - (\alpha - 1)(u_n + 1)}{\alpha u_n}$$
$$= \frac{\alpha u_n - \alpha u_n - \alpha + u_n + 1}{\alpha u_n}$$
$$= \frac{u_n - (\alpha - 1)}{\alpha u_n}$$
$$= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{u_n - (\alpha - 1)}{u_n}\right)$$
$$= \frac{1}{\alpha} t_n$$

❷ كتابة عبارة u_n بدلالة n و α:

لدينا:

$$t_{n+1} = \frac{1}{\alpha} t_n$$

ولدينا:

$$t_0 = \frac{u_0 - (\alpha - 1)}{u_0}$$
$$= \frac{\alpha - (\alpha - 1)}{\alpha}$$
$$= \frac{1}{\alpha}$$

ومنه t_n متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ و حدها الأول $\frac{1}{\alpha}$.

أي:

$$t_n = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \Rightarrow \boxed{t_n = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}}$$

ولدينا:

$$t_n = \frac{u_n - (\alpha - 1)}{u_n} \Rightarrow t_n u_n - u_n = -(\alpha - 1)$$
$$\Rightarrow u_n(t_n - 1) = -(\alpha - 1)$$
$$\Rightarrow u_n = -\frac{\alpha - 1}{t_n - 1}$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{\alpha - 1}{1 - t_n}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{\alpha - 1}{1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}}}$$

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►