الخليل للرياضيات

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير واقتصاد

تمرين شامل في المتتاليات العددية

①

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 03

التمريـــــن

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 3$ ، ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$$

1) احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2) أ/ برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $\quad u_n > 0$

ب/ استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n > \frac{4}{3}n$

3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = u_n - 2n + 1$$

أ/ بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$$

ج/ احسب بدلالة n المجموع S_n ، حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

4) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بـ: $w_0 = -1$ ، ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 3$$

أ/ احسب w_1 ، w_2، w_3 و w_4 ، ما تخمينك لنوعية المتتالية (w_n).

ب/ برهن صحة تخمينك على نوعية المتتالية (w_n) .

ج/ احسب w_{1011} .

حل التمريـــن

1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

$$\bullet\ 3u_{0+1} = u_0 + 4(0) + 4$$
$$\Rightarrow 3u_1 = \underbrace{3}_{u_0} + 4(0) + 4$$
$$\Rightarrow 3u_1 = 7$$
$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{7}{3}}$$
$$\bullet\ 3u_{1+1} = u_1 + 4(1) + 4$$
$$\Rightarrow 3u_2 = \frac{7}{3} + 4(1) + 4$$
$$\Rightarrow 3u_2 = \frac{31}{3}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{31}{9}}$$
$$\bullet\ 3u_{2+1} = u_2 + 4(2) + 4$$
$$\Rightarrow 3u_3 = \frac{31}{9} + 4(2) + 4$$
$$\Rightarrow 3u_3 = \frac{139}{3}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{139}{27}}$$

2) أ/ برهان أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$:

نبرهن القضية بالتراجع:

① لدينا: $u_0 = 3 > 0$ ومنه القضية صحيحة من أجل $n = 0$

② نفرض أن $u_n > 0$ مُحققة ونبرهن أن $u_{n+1} > 0$:

لدينا: $u_n > 0$ ومنه: $u_n + 4n + 4 > 4n + 4$

ولدينا: $4n + 4 > 0$ إذن: $\boxed{u_{n+1} > 0}$.

ب/ استنتاج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > \frac{4}{3}n$:

لدينا: $3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$

ومنه: $3u_n = u_{n-1} + 4(n-1) + 4 = u_{n-1} + 4n$

ولدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n-1} > 0$

ومنه: $u_{n-1} + 4n > 4n$

ومنه: $3u_n > 4n$

اذن: $\boxed{u_n > \frac{4}{3}n}$

3) أ/ تبيين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 1 = u_{n+1} - 2n - 1$

ومنه:

$$\begin{aligned} 3v_{n+1} &= 3u_{n+1} - 6n - 3 \\ &= \underbrace{u_n + 4n + 4}_{3u_{n+1}} - 6n - 3 \\ &= u_n - 2n + 1 \\ &= v_n \end{aligned}$$

ومنه:

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

ولدينا:

$$v_0 = \underbrace{u_0}_{3} - 2(0) + 1 \Rightarrow \boxed{v_0 = 4}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_0 حيث:

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

ومنه:

$$\boxed{v_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

ب/ استنتاج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$:

لدينا: $v_n = u_n - 2n + 1$

ومنه: $u_n = v_n + 2n - 1$

إذن:

$$\boxed{u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1}$$

ملاحظة: يمكن استعمال البرهان بالتراجع

ج/ حساب بدلالة n المجموع S_n :

لدينا: $u_n = v_n + 2n - 1$

ومنه:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= v_1 + 2(1) - 1 + v_2 + 2(2) - 1 + \cdots + v_n + 2n - 1 \end{aligned}$$

$$= v_1 + v_2 + \cdots + v_n + 2(1 + 2 + \cdots + n) - 1(n + 1)$$

$$= \underbrace{v_1 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)}}_{v_1+v_2+\cdots+v_n} + 2\left(\underbrace{\frac{n}{2}(n+1)}_{1+2+\cdots+n}\right) - (n+1)$$

$$= 4\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} + n(n+1) - (n+1)$$

$$= 6\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + (n+1)(n-1)$$

$$\boxed{S_n = 6\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + n^2 - 1}$$

4) أ/ حساب w_1 ، w_2، w_3 و w_4 :

$$1w_1 = (1+1)w_{1-1} + 3$$
$$\Rightarrow w_1 = 2w_0 + 3$$
$$\Rightarrow \boxed{w_1 = 1}$$
$$2w_2 = (2+1)w_{2-1} + 3$$
$$\Rightarrow w_2 = 2w_1 + 3$$
$$\Rightarrow \boxed{w_2 = 6}$$
$$3w_3 = (3+1)w_{3-1} + 3$$
$$\Rightarrow w_3 = 2w_2 + 3$$
$$\Rightarrow \boxed{w_3 = 15}$$
$$4w_4 = (1+1)w_{4-1} + 3$$
$$\Rightarrow w_4 = 2w_3 + 3$$
$$\Rightarrow \boxed{w_4 = 28}$$

من الحدود الأولى يمكن التخمين أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها 2 وحدها الأول $w_0 = -1$

أي:

$$\boxed{w_n = -1 + 2n}$$

ب/ برهان صحة التخمين على طبيعة المتتالية (w_n) :

لتكن القضية (P_n) حيث:

$$w_n = -1 + 2n \ldots (P_n)$$

لدينا: $w_0 = -2 + 2(0) = -1$ ومنه (P_0) محققة.

نفرض أن (P_n) محققة ونبرهن أن (P_{n+1}) محققة. أي نبرهن أن $(w_{n+1} = 1 + 2n)$ محققة

لدينا: $nw_n = (n+1)w_{n-1} + 3$

ومنه: $(n+1)w_{n+1} = (n+2)w_n + 3$

ومنه: $(n+1)w_{n+1} = (n+2)(-1+2n) + 3$

ومنه: $(n+1)w_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1$

ومنه: $(n+1)w_{n+1} = (n+1)(2n+1)$

ومنه: $w_{n+1} = 2n + 1$

اذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$\boxed{w_n = -1 + 2n}$$

ج/ حساب w_{1011} :

لدينا: $w_n = -1 + 2n$

ومنه:

$$w_{1011} = -1 + 2(1001)$$
$$\boxed{w_{1011} = 2021}$$

الخليل للرياضيات

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►