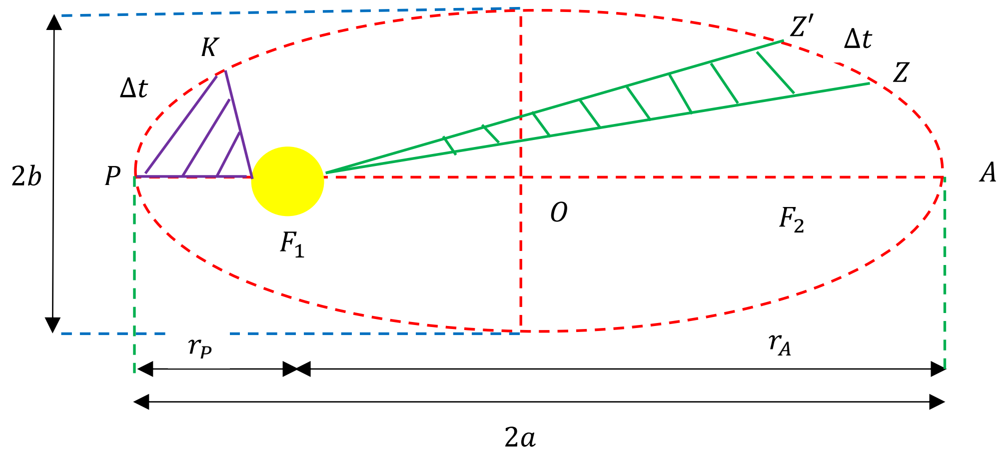
تمرين شامل : (حول حركة كوكب و قمر اصطناعي)

يهدف هذا التمرين إلى دراسة :

- ✓ حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار اهليلجي
- ✓ حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار دائري
- ✓ حركة قمر اصطناعي حول الأرض ضمن مسار دائري

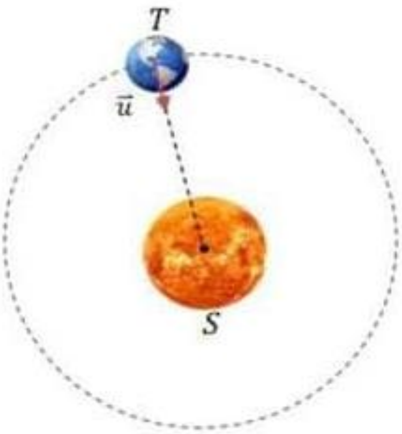
$I-$ تدور الأرض حول الشمس بحيث تأخذ المسافة بين مركز عطالتها وبين مركز الشمس القيمتين الموافقتين لأدنى بعد وأقصاه كما يلي

$r_P = 147.1 \times 10^6\ km$ و $r_A = 152.1 \times 10^6\ km$ (الشكل 01)



(الشكل **01**)

1) ماهو المرجع المناسب الذي تنسب إليه حركة الأرض ؟ عرفه ؟ وماهي الفرضية الواجب اعتمادها أثناء دراسته ؟
2) أذكر نص القانون الأول لكبلر ؟
3) ما طبيعة مسار كوكب الأرض ؟ ماهو موقع الشمس في هذا المسار ؟
4) ماذا يمثل الطول $2a$ والطول $2b$ ؟ أحسب طول نصف المحور الكبير لهذا المسار
5) في أي نقطة تكون سرعة الأرض أصغرية وفي أي نقطة تكون سرعته أعظمية ؟
6) مثل شعاعي سرعتيهما بشكل كيفي على الرسم .



(الشكل **02**)

ينتقل كوكب الأرض أثناء حركته على مداره من النقطة Z إلى Z' ثم من النقطة K إلى النقطة P خلال نفس المدة الزمنية Δt .

7) حسب قانون كيبلر الثاني ماهي العلاقة بين المساحتين الممسوحتين ؟
8) بين أن متوسط السرعة بين الموضعين Z و Z' أقل من متوسط السرعة بين الموضعين K و P ؟

$II-$ بغية تسهيل الدراسة نفرض أن مسار الأرض حول الشمس هو مسار دائري :

1- مثل كلا من شعاع السرعة والقوة التي تطبقها الشمس على الأرض في الشكل 02 ؟
2- أكتب العبارة الشعاعية للقوة $\overrightarrow{F_{S/T}}$ بدلالة $\vec{u}, G, M_S, M_T, h, R_S, R_T$
3- بين انطلاقا من القانون الثاني لنيوتن أن حركة كوكب الأرض حول الشمس دائرية منتظمة .
4- أوجد وحدة المقدار G باستعمال التحليل البعدي .
5- أوجد عبارة السرعة المدارية v بدلالة G, M_S, h, R_S, R_T .
6- عرف الدور ثم أكتب عبارته بدلالة G, M_S, h, R_S, R_T . هل يتعلق الدور بكتلة الأرض ؟
7- أذكر نص قانون كيبلر الثالث ثم أوجد عبارة ثابت كيبلر K وأحسب قيمته .
8- استنتج من القانون الثالث لكيبلر البعد بين سطح الشمس وسطح الأرض .

$III-$ يسعى رجل الأعمال الأمريكي (ايلون ماسك) صاحب شركة $Space\ X$ إلى توصيل العالم بأكمله بالانترنت الفضائي عن طريق ارسال 12 ألف قمر اصطناعي خلال عدة أعوام ، في 23 مايو 2019 قامت الشركة باطلاق 60 قمر اصطناعي تدور في مدارات دائرية حول مركز الأرض .

نهتم في هذا الجزء بدراسة 6 أقمار اصطناعية خصائصها المدارية مسجلة في الجدول التالي :

اسم القمر	$Starlink\ 1$	$Starlink\ 2$	$Starlink\ 3$	$Starlink\ 4$	$Starlink\ 5$	$Starlink\ 6$
$T_s(s)$	5706.7	6340	10575.4	86400	17244	20963.8
${T_s}^2(s^2)$						
$r(10^3 m)$	6880	7380	10380	42105	14380	16380
$r^3(10^{20} m^3)$						

حيث T_s يمثل دور كل قمر و r البعد المتوسط بين مركزي القمر الصناعي والأرض .

1- ماهو المرجع المناسب لدراسة هذه الحركة ؟

2- بين أن التسارع لمركز عطالة أحد الأقمار يعطى بالعلاقة التالية : $a_n = A \times \frac{1}{r^2}$

3- بين أن تسارع الجاذبية على ارتفاع h يعطى بالعلاقة التالية : $g = g_0 \left(\frac{R_T}{r}\right)^2$

4- عرف القمر الجيومستقر ؟ من بين الأقمار 6 السابقة حدد القمر الجيو مستقر ؟

5- إملئ الجدول ثم أرسم المنحنى البياني $ {T_{sat}}^2 = f(r^3)$.

6- أثبت العلاقة التالية : $\frac{{T_{sat}}^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ ثم أحسب كتلة الأرض M_T معتمدا على البيان

7- أحسب ارتفاع هذا القمر الجيومستقر عن سطح الأرض ، وسرعته ثم تسارعه ؟

8- أذكر استعمالات الأقمار الاصطناعية ؟

المعطيات :

$$T = 365\ jours\ ;\ R_T = 6380\ km\ ; G = 6.67 \times 10^{-11}\ (SI)\ ;\ R_S = 7 \times 10^5\ Km$$
$$m_{sat} = 2300\ Kg\ ;\ g_0 = 9.81\ m/s^2\ ;\ \pi^2 = 10\ ;\ M_S = 2 \times 10^{30}\ Kg$$

I – حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار اهليليجي :

1) المرجع المناسب الذي تنسب إليه حركة الأرض هو المرجع الهيليومركزي

تعريف المرجع الهيلومركزي :

هو مرجع مزود بمعلم مبدؤه مركز الشمس ومحاوره الثلاثة متعامدة فيما بينها وموجهة نحو 3 نجوم ثابتة ، يستعمل لدراسة حركة الكواكب والمذنبات وبعض المركبات الفضائية .

الفرضية الواجب اعتمادها أثناء الدراسة : أن يكون المرجع عطالي (غاليلي) .

2) نص القانون الأول لكيبلر : في المرجع المركزي الشمسي تتحرك الكواكب حول الشمس في مسارات اهليليجية وتمثل الشمس أحد محرقيه (بؤرتيه) ويعرف بقانون المسارات .

3) طبيعة مسار كوكب الأرض : مسار اهليليجي . موقع الشمس بالنسبة لهذا المسار : أحد المحرقين في حالتنا الموضع F_1

4) يمثل الطول $2a$ طول المحور الكبير ، يمثل الطول $2b$ طول المحور الصغير .

حساب طول نصف المحور الكبير a :

$$a = \frac{r_p + r_A}{2} = \frac{147.1 \times 10^6\ km + 152.1 \times 10^6}{2} \Rightarrow \boxed{a = 149.6 \times 10^6\ km}$$

5) السرعة الأصغرية والسرعة الأعظمية :

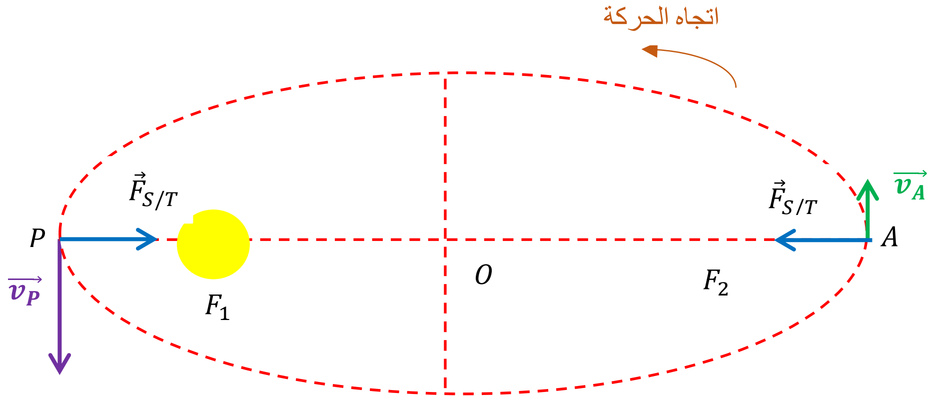
تكون السرعة أصغرية في نقطة الأوج A .

تكون السرعة أعظمية في نقطة الحضيض P .

6) تمثيل شعاعي سرعتيهما :

- نشعاع السرعة يكون عمودي على شعاع القوة ، وشعاع القوة يكون موجه نحو مركز عطالة الشمس .
- السرعة تكون أصغرية في نقطة الأوج A وتكون أعظمية في نقطة الحضيض P ومنه فشعاع السرعة عند نقطة الحضيض يكون أطول من شعاع السرعة في عند نقطة الأوج .
- جهة حركة كوكب الأرض تكون عكس اتجاه عقارب الساعة .

وبالتالي يصبح التمثيل على الشكل التالي :



7) نسمي المساحة الممسوحة بين النقطتين Z و Z' بـ S_1 والمساحة بين النقطتين K و P بـ S_2

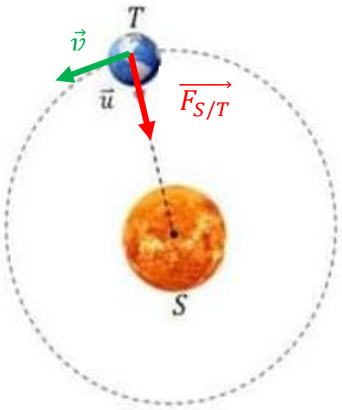
حسب قانون كيبلر الثاني فإن $\boxed{S_1 = S_2}$

8) البرهان أن متوسط السرعة بين الموضعين Z و Z' أقل من متوسط السرعة بين الموضعين K و P :

لدينا : $\widehat{KP} > \widehat{ZZ'}$ (نقصد بها طول القوس KP أكبر من طول القوس ZZ')

ونحن نعلم أن : السرعة $= \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$ (مع العلم أن الزمن Δt يبقى نفسه)

ومنه $\frac{\widehat{KP}}{\Delta t} > \frac{\widehat{ZZ'}}{\Delta t}$ أي $\boxed{v_{KP} > v_{ZZ'}}$



II– حركة كوكب الأرض حول الشمس ضمن مسار دائري :

-1 تمثيل كلا من شعاع السرعة والقوة التي تطبقها الشمس على الأرض (الشكل المقابل)

-2 العبارة الشعاعية للقوة $\overrightarrow{F_{S/T}}$ بدلالة $\vec{u}, G, M_T\ , M_s\ , h\ , R_s\ , R_T$

$$\overrightarrow{F_{S/T}} = G\frac{M_s\, M_T}{r^2}\vec{u} = G\frac{M_s\, M_T}{(R_s + R_T + h)^2}\vec{u}$$

ملاحظة : $r = R_s + R_T + h$ حيث :

r يمثل البعد بين مركز الأرض ومركز الشمس

R_s يمثل نصف قطر الشمس

R_T تمثل نصف قطر الأرض

h البعد بين سطح الأرض وسطح الشمس

-3 تبيين أن حركة الأرض دائرية منتظمة انطلاقا من القانون الثاني لنيوتن :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة (أرض) في المرجع الهيلومركزي الذي نعتبره غاليليا لدينا

$$\Sigma\, \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$$

$$\overrightarrow{F_{S/T}} = M_T\vec{a}$$

نعلم أن : $\vec{a} = a_n\vec{u} + a_T\vec{T}$

ومنه بالاسقاط على الشعاع الناظمي لدينا :

$$G\frac{M_s\, \cancel{M_T}}{r^2} = \cancel{M_T}a_n$$

$$a_n = \frac{GM_s}{r^2}$$

بالاسقاط على الشعاع المماسي لدينا : $0 = M_T.a_T$ ومنه $a_T = 0$ أي $\frac{dv}{dt} = 0$ أي $v = cte$ (السرعة ثابتة)

بما أن مسار الحركة دائري و السرعة ثابتة فإن حركة كوكب الأرض حول الشمس دائرية منتظمة

-4 وحدة المقدار G باستعمال التحليل البعدي :

لدينا $F = G.\frac{m_1 m_2}{r^2}$ ومنه $G = \frac{F \times r^2}{M^2}$

$$[G] = \frac{[F] \times [r]^2}{[M]^2} = \frac{kg.m.s^{-2}m^2}{kg^2} = kg^{-1}.m^3.s^{-2}$$

ومنه وحدة G في جملة الوحدات الدولية هي : $kg^{-1}.m^3.s^{-2}$

-5 عبارة السرعة المدارية v :

نعلم أن $a_n = \frac{v^2}{r}$ و منه $\frac{v^2}{r} = \frac{GM_s}{r^2}$ أي $v^2 = \frac{GM_s}{r}$ ومنه $v = \sqrt{\frac{GM_s}{r}}$ وأخيرا $v = \sqrt{\frac{GM_s}{(R_s+R_T+h)}}$

-6 الدور : هو الزمن اللازم للأرض للقيام بدورة كاملة حول الشمس (أي $365\ jours$) .

عبارة الدور T :

نعلم أن $T = \frac{2\pi r}{v}$ ومنه $T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_s}{r}}}$ ومنه $T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{GM_s}{r}}$ أي $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_s}$ ومنه : $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_s}}$ وأخيرا : $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_s+R_T+h)^3}{GM_s}}$

-7 نص قانون كيبلر الثالث : يتناسب مربع الدور طردا مع مكعب البعد المتوسط بين مركز الكوكب ومركز الشمس .

$\frac{T^2}{r^3} = K$ حيث K ثابت

ايجاد عبارة الثابت K وحساب قيمته :

$$K = \frac{T^2}{r^3} = \frac{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_s}}{r^3} \Rightarrow K = \frac{4\pi^2}{GM_s}$$

$$K = \frac{4 \times 10}{6.67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}} \Rightarrow K = 3 \times 10^{-19}\ SI$$

من عبارة K نجد أن الثابت K لا يتعلق بكتلة كوكب الأرض بل يتعلق بكتلة كوكب الشمس .

8- استنتاج البعد بين سطح الشمس وسطح الأرض (h) من القانون الثالث لكبلر :

$$K = \frac{T^2}{r^3} \Longrightarrow r^3 = \frac{T^2}{K} \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K}}$$

نعلم أن $r = (R_s + R_T + h)$ ومنه : $R_s + R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K}}$ وأخيرا : $h = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K}} - R_s - R_T$

$$h = \sqrt[3]{\frac{(365 \times 24 \times 3600)^2}{3 \times 10^{-19}}} - (7 \times 10^5 - 6380) \times 10^3$$

$$h = 1.48 \times 10^{11}\ m$$

III– حركة قمر اصطناعي حول الأرض ضمن مسار دائري :

1- المرجع المناسب : المرجع الجيو مركزي (المركزي الأرضي) .

2- إثبات أن التسارع لمركز عطالة أحد الأقمار يعطى بالعلاقة التالية : $a_n = A \times \frac{1}{r^2}$:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة (أرض) في المرجع الهيلومركزي الذي نعتبره غاليليا لدينا : $\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$

$$\overrightarrow{F_{T/sa}} = m_{sa}\vec{a}$$

بالاسقاط على الشعاع الناظمي لدينا :

$$G\frac{M_T \cancel{m_{sa}}}{r^2} = \cancel{m_{sa}} a_n$$

$$a_n = \frac{GM_T}{r^2} = G.M_T \times \frac{1}{r^2}$$

وهي من الشكل $a_n = A \times \frac{1}{r^2}$ حيث $A = G.M_T$

ملاحظة : $r = R_T + h$ حيث :

r تمثل البعد بين مركز الأرض والقمر الاصطناعي

R_T تمثل نصف قطر الأرض

h البعد بين سطح الأرض والقمر الاصطناعي

3- تبيين أن تسارع الجاذبية على ارتفاع h يعطى بالعلاقة التالية : $g = g_0\left(\frac{R_T}{r}\right)^2$

نعلم أن $a = a_n = g$

ومنه $g = GM_T \frac{1}{r^2} = GM_T \frac{1}{(R_T+h)^2}$ .... (1)

في الطرف الثاني لدينا :

(2) .... $g_0 = GM_T \frac{1}{R_T^2}$ (عند g_0 يكون $h = 0$) لأن g_0 تعني الجاذبية على سطح الأرض .

بقسمة (2) على (1) لدينا : $\frac{g}{g_0} = \frac{\cancel{GM_T}\frac{1}{(R_T+h)^2}}{\cancel{GM_T}\frac{1}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$ ومنه نجد : $g = g_0\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)^2$ وأخيرا $g = g_0\left(\frac{R_T}{r}\right)^2$

4- تعريف القمر الجيو مستقر :

هو عبارة عن قمر اصطناعي يظهر لمراقب على سطح الأرض ساكنا ويمتاز بالشروط التالية :

- ✓ يدور في نفس جهة دوران الأرض
- ✓ لديه نفس دور الأرض $T = 24\ h = 24 \times 3600\ s = 86400\ s$
- ✓ يدور على مستوى خط الاستواء .

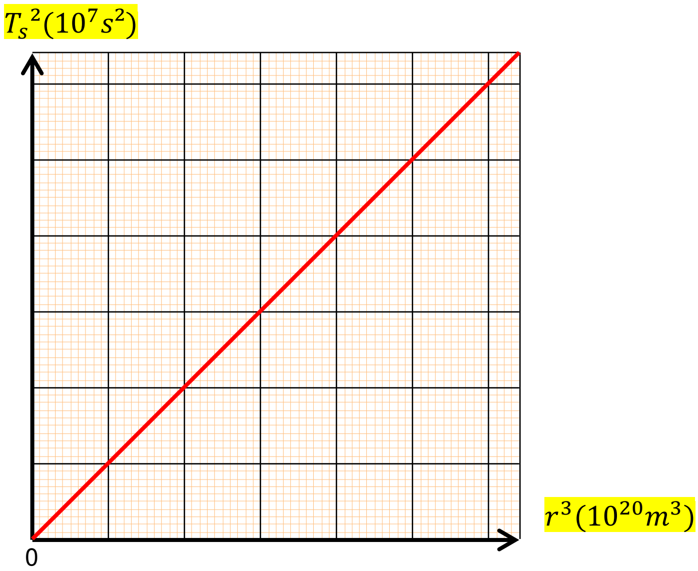
تحديد القمر الجيومستقر من بين 6 أقمار السابقة :

القمر الجيو مستقر من لديه دور يساوي $86400\ s$ ومنه القمر الذي لديه نفس دور الأرض من بين 6 أقمار السابقة هو القمر $Starlink\ 4$

5- ملأ الجدول :

اسم القمر	Starlink 1	Starlink 2	Starlink 3	Starlink 4	Starlink 5	Starlink 6
$T_s(s)$	5706.7	6340	10575.4	86400	17244	20963.8
$T_s^2(10^7 s^2)$	3.25	4.019	11.18	7.465	29.73	43.94
$r(10^3 m)$	6880	7380	10380	42105	14380	16380
$r^3(10^{20} m^3)$	3.25	4.019	11.18	7.465	29.73	43.94

رسم المنحنى $T^2 = f(r^3)$:



6- اثبات العلاقة التالية : $\frac{T_s^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$:

لدينا : $a_n = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$ ونعلم أن $a_n = \frac{v^2}{(R_T+h)}$ أي $\frac{GM_T}{(R_T+h)^2} = \frac{v^2}{(R_T+h)}$ ومنه $v^2 = \frac{GM_T}{(R_T+h)}$ وأخيرا : $v = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}$

نعلم أن $T_s = \frac{2\pi r}{v}$ ومنه $T_s = \frac{2\pi(R_T+h)}{\sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}}$ ومنه $T_s^2 = \frac{4\pi^2(R_T+h)^2}{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}$ أي $T_s^2 = \frac{4\pi^2(R_T+h)^3}{GM_T}$ ومنه : $T_s = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$

وأخيرا : $T_s = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$ وبالتالي :

$$\frac{T_s^2}{r^3} = \frac{4\pi^2 \frac{\cancel{r^3}}{GM_T}}{\cancel{r^3}} \Longrightarrow \frac{T_s^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

ايجاد كتلة الأرض M_T :

البيان عبارة عن خط مستقيم يمر بالمبدأ عبارته من الشكل : $T^2 = \beta r^3$ حيث β هو معامل توجيه البيان .

$$\beta = \frac{T_s^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Longrightarrow M_T = \frac{4\pi^2}{G\beta}$$

$$\beta = \frac{(4.019 - 3.25) \times 10^7}{(4.019 - 3.25) \times 10^{20}} = 1 \times 10^{-13}$$

$$M_T = \frac{4\pi^2}{G\beta} = \frac{4 \times 10}{6.67 \times 10^{-11} \times 1 \times 10^{-13}}$$

$$M_T = 5.99 \times 10^{24}\ kg$$

7- حساب ارتفاع القمر الجيو مستقر عن سطح الأرض (حساب h) :

لايجاد الارتفاع h نستخدم عبارة الدور T_s^2 :

$$T_s^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{GM_T} \Rightarrow r^3 = \frac{T_s^2 \times GM_T}{4\pi^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \times GM_T}{4\pi^2}}$$

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \times GM_T}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \times GM_T}{4\pi^2}} - R_T$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{(24 \times 3600)^2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.99 \times 10^{24}}{4 \times 10}} - (6380 \times 10^3)$$

$$h = 35709000\, m \ = 35709\, km$$

حساب السرعة المدارية للقمر الجيومستقر :

لدينا مما سبق : $v = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}$

$$v = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.99 \times 10^{24}}{(6380 + 35709) \times 10^3}}$$

$$v = 3081\, m/s$$

حساب تسارع القمر الجيومستقر :

$$a = g = g_0 \left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)^2$$

$$a = 9.81 \left(\frac{6380 \ \times 10^3}{(6380 + 35709) \times 10^3}\right)^2$$

$$a = 0.22\, m/s^2$$

8- استعمالات الأقمار الاصطناعية :

- الاتصالات
- الأحوال الجوية
- البث التلفزيوني
- تحديد المواقع GPS
- استعمالات عسكرية مختلفة

ملاحظتين في الحسابات :

يجب تحويل الأطوال إلى وحدة المتر (m)

يجب تحويل الدور إلى وحدة الثانية (s)