نص التمرين

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 حيث: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}$.

1) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=2\sqrt{u_n+1}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$.

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1<u_n<3$.

جـ. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

د. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $9-u_{n+1}^2<4(3-u_n)$.

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3-u_{n+1}<\frac{4}{5}(3-u_n)$.

جـ. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

د. أحسب نهاية المتتالية (u_n).

3) لتكن المتتالية العددية (S_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$S_n=\frac{u_0-4}{3-u_0}+\frac{u_1-4}{3-u_1}+\frac{u_2-4}{3-u_2}+\dots+\frac{u_n-4}{3-u_n}$$

أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n<-n-1+4\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]$.

ب. استنتج نهاية المتتالية (S_n).

حل مقترح

المتتالية العددية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}} \end{cases}$$

1) أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=2\sqrt{u_n+1}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$:

من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}=\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}} \Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{2u_n+2-2}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{2(u_n+1)-2}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{2(u_n+1)}{\sqrt{u_n+1}}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{2(u_n+1)\times\sqrt{u_n+1}}{\sqrt{u_n+1}\times\sqrt{u_n+1}}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{2(u_n+1)\times\sqrt{u_n+1}}{(u_n+1)}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}=2\sqrt{u_n+1}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$$

ومنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=2\sqrt{u_n+1}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$.

1) ب. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1<u_n<3$:

لتكن الخاصية $p(n)$ التالية:

$$p(n): 1<u_n<3$$

تحقق من صحة الخاصية $p(0)$:

لدينا: $u_0=2$ و $1<2<3$ وعليه: $1<u_0<3$ ومنه: $p(0)$ صحيحة.

نفرض صحة $p(n)$ من أجل n كيفي أي: $1<u_n<3$.

ونبرهن صحة $p(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n أي: $1<u_{n+1}<3$.

لدينا من فرضية التراجع: $1<u_n<3$.

فينتج:

$$1<u_n<3 \Leftrightarrow 2<u_n+1<4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}<\sqrt{u_n+1}<2 \dots (*)$$

من $(*)$ ينتج:

$$2\sqrt{2}<2\sqrt{u_n+1}<4 \dots (1)$$

ومن $(*)$ لدينا:

$$\sqrt{2}<\sqrt{u_n+1}<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{u_n+1}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{2}}<\frac{-2}{\sqrt{u_n+1}}<-1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}<\frac{-2}{\sqrt{u_n+1}}<-1 \dots (2)$$

بجمع المتراجحتين (1) و (2) طرف لطرف ينتج:

$$1<\sqrt{2}<2\sqrt{u_n+1}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}<3$$

نجد: $1<u_{n+1}<3$ ومنه: $p(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1<u_n<3$.

1) جـ. نبين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ حيث:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}-u_n$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n-u_n\sqrt{u_n+1}}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n\left(2-\sqrt{u_n+1}\right)}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n\left(2-\sqrt{u_n+1}\right)\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)}{\sqrt{u_n+1}\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(4-u_n-1)}{\sqrt{u_n+1}\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(3-u_n)}{\sqrt{u_n+1}\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)}$$

لدينا من **1)** ب: $1<u_n<3$.

أي: $0<1<u_n<3$.

ومنه: $u_n>0$ و $3-u_n>0$ و $\sqrt{u_n+1}>0$ و $2+\sqrt{u_n+1}>0$.

فينتج: $\frac{u_n(3-u_n)}{\sqrt{u_n+1}\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)}>0$ أي: $u_{n+1}-u_n>0$.

ومنه: المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

1) د. استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن:

- المتتالية (u_n) متزايدة تماما $(u_{n+1}-u_n>0)$.
- المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3 $(u_n<3)$.

فنستنتج أن:

المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية ℓ.

2) أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $9-u_{n+1}^2<4(3-u_n)$:

من أجل كل عدد طبيعي n:

$$9-u_{n+1}^2=9-\left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}\right)^2$$

$$9-u_{n+1}^2=9-\frac{4u_n^2}{u_n+1}$$

$$9-u_{n+1}^2=\frac{9(u_n+1)-4u_n^2}{u_n+1}$$

$$9-u_{n+1}^2=\frac{-4u_n^2+9u_n+9}{u_n+1}$$

$$9-u_{n+1}^2=\frac{-4\left(u_n+\frac{3}{4}\right)(u_n-3)}{u_n+1}$$

$$9-u_{n+1}^2=\frac{(4u_n+3)(-u_n+3)}{u_n+1}$$

$$9-u_{n+1}^2=\frac{(4u_n+3)(3-u_n)}{u_n+1}$$

$$9-u_{n+1}^2=\frac{4u_n+3}{u_n+1}(3-u_n)$$

$$9-u_{n+1}^2=\frac{4(u_n+1)-1}{u_n+1}(3-u_n)$$

$$9-u_{n+1}^2=\left(\frac{4(u_n+1)}{u_n+1}-\frac{1}{u_n+1}\right)(3-u_n)$$

$$9-u_{n+1}^2=\left(4-\frac{1}{u_n+1}\right)(3-u_n)$$

لاحظ أن: $4-\frac{1}{u_n+1}<4$ لأن: $\frac{1}{u_n+1}>0$.

فينتج: $\left(4-\frac{1}{u_n+1}\right)(3-u_n)<4(3-u_n)$ لأن: $3-u_n>0$.

ومنه:

$$9-u_{n+1}^2<4(3-u_n)$$

2) ب. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3-u_{n+1}<\frac{4}{5}(3-u_n)$:

لدينا من **2)** أ. : $9-u_{n+1}^2<4(3-u_n)$.

فينتج: $(3-u_{n+1})(3+u_{n+1})<4(3-u_n)$.

ومنه: $3-u_{n+1}<\frac{4}{3+u_{n+1}}(3-u_n)\ ...\ (3)$ لأن: $3+u_{n+1}>0$.

ولدينا: المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

أي: $u_{n+1}>u_n>u_0$ و $u_0=2$.

ومنه: $u_{n+1}>2$.

فينتج:

$$\begin{aligned}u_{n+1}>2 &\Leftrightarrow 3+u_{n+1}>5\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3+u_{n+1}}<\frac{1}{5}\\ &\Leftrightarrow \frac{4}{3+u_{n+1}}<\frac{4}{5}\\ &\Leftrightarrow \frac{4}{3+u_{n+1}}(3-u_n)<\frac{4}{5}(3-u_n)\ ...\ (4)\end{aligned}$$

من (3) و (4) ينتج (بالتعدي):

$$3-u_{n+1}<\frac{4}{5}(3-u_n)$$

2) جـ. استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$:

لدينا من **2)** بـ : $3-u_{n+1}<\frac{4}{5}(3-u_n)$.

فينتج:

$$\begin{cases}n=0\Leftrightarrow \cancel{3-u_1}<\frac{4}{5}(3-u_0)\\ n=1\Leftrightarrow \cancel{3-u_2}<\frac{4}{5}\cancel{(3-u_1)}\\ n=2\Leftrightarrow \cancel{3-u_3}<\frac{4}{5}\cancel{(3-u_2)}\\ .\\ .\\ .\\ n-2\Leftrightarrow \cancel{3-u_{n-1}}<\frac{4}{5}\cancel{(3-u_{n-2})}\\ n-1\Leftrightarrow 3-u_n<\frac{4}{5}\cancel{(3-u_{n-1})}\end{cases}$$

بضرب كل المتراجحات طرف في طرف (عموديا) وبعد الاختزال ينتج:

$$3-u_n<(3-u_0)\left(\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times...\times\frac{4}{5}\right)$$

$$3-u_n<(3-u_0)\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$3-u_n<(3-2)\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

2) د. نحسب نهاية المتتالية (u_n):

لدينا من **2)** جـ : $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ولدينا: $3-u_n>0$.

فينتج:

$$0<3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

حيث: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$ لأن: $-1<\frac{4}{5}<1$ وعليه: $0<\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-u_n\right)<0$.

وحسب مبدأ النهايات بالحصر فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-u_n\right)=0$.

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=3$$

3) لتكن المتتالية العددية (S_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$S_n=\frac{u_0-4}{3-u_0}+\frac{u_1-4}{3-u_1}+...+\frac{u_n-4}{3-u_n}$$

3) أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n<-n-1+4\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]$:

من أجل كل عدد طبيعي n:

$$S_n=\frac{u_0-4}{3-u_0}+\frac{u_1-4}{3-u_1}+...+\frac{u_n-4}{3-u_n}$$

$$S_n=\frac{u_0-3-1}{3-u_0}+\frac{u_1-3-1}{3-u_1}+...+\frac{u_n-3-1}{3-u_n}$$

$$S_n=\frac{-\left(3-u_0\right)-1}{3-u_0}+\frac{-\left(3-u_1\right)-1}{3-u_1}+...+\frac{-\left(3-u_n\right)-1}{3-u_n}$$

$$S_n=\left(-1+\frac{-1}{3-u_0}\right)+\left(-1+\frac{-1}{3-u_1}\right)+...+\left(-1+\frac{-1}{3-u_n}\right)$$

$$S_n=-\left(1+1+...+1\right)+\left(\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+...+\frac{-1}{3-u_n}\right)$$

$$S_n=-\left(n+1\right)+\left(\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+...+\frac{-1}{3-u_n}\right)$$

$$S_n=-n-1+\left(\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+...+\frac{-1}{3-u_n}\right)$$

لدينا من 2) جـ : $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

ومنه:

$$3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n\Leftrightarrow\frac{1}{3-u_n}>\left(\frac{5}{4}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow\frac{-1}{3-u_n}<-\left(\frac{5}{4}\right)^n$$

فينتج:

$$\begin{cases} n=0:\ \dfrac{-1}{3-u_0}<-\left(\dfrac{5}{4}\right)^0 \\ n=1:\ \dfrac{-1}{3-u_1}<-\left(\dfrac{5}{4}\right)^1 \\ . \\ . \\ . \\ n\ :\ \dfrac{-1}{3-u_n}<-\left(\dfrac{5}{4}\right)^n \end{cases}$$

بجمع المتراجحات طرف إلى طرف (عموديا) ينتج:

$$\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+...+\frac{-1}{3-u_n}<-\left[\left(\frac{5}{4}\right)^0+\left(\frac{5}{4}\right)^1+...+\left(\frac{5}{4}\right)^n\right]$$

$$\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+...+\frac{-1}{3-u_n}<-\left[\left(\frac{5}{4}\right)^0\times\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{5}{4}-1}\right]$$

$$\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+...+\frac{-1}{3-u_n}<-\left[1\times\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{4}}\right]$$

$$\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+...+\frac{-1}{3-u_n}<-4\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}-1\right]$$

$$\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+...+\frac{-1}{3-u_n}<4\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$-n-1+\left(\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+...+\frac{-1}{3-u_n}\right)<-n-1+4\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$S_n<-n-1+4\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]$$

3) ب. استنتاج نهاية المتتالية (S_n):

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=+\infty$ لأن: $\frac{5}{4}>1$.

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-n-1+4\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]\right)=-\infty$$

فينتج:

$$\begin{cases} S_n<-n-1+4\left[1-\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n+1}\right] \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-n-1+4\left[1-\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n+1}\right]\right)=-\infty \end{cases}$$

وحسب مبدأ النهايات بالمقارنة فإن:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=-\infty$$

راجيا منكم صالح الدعاء

الأستاذ عبد الحميد