# تمرين جيد في الحساب للمراجعة و التدرب

## نــص التمرين :

نعتبر المتتالية $(a_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $a_n = 2\times 5^n + 7$ .

1) أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون : $a_n$ فردي .

ب - عين حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $5^n$ على 8 .

ج - إستنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $a_n \equiv 1[8]$ .

2) أ - برهن أنه إذا كان : $\begin{cases} x\equiv 1[8] \\ x\equiv 7[125] \end{cases}$ فإن : $x\equiv 257[1000]$ .

ب - بين أنه من أجل كل $n\geq 3$ يكون : $a_n \equiv 257[1000]$ .

ج - ما هي الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $\left(2\times 5^{2021}+7\right)\left(2\times 5^{2020}+7\right)$ ؟ .

3) أ - تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$ .

ب - نعتبر $PGCD\left(a_{2n};a_{2n+1}\right) = d$ ، بين أن $d$ يختلف عن 7 .

ج - جــــد عندئذ $d$ .

## حل مقترح للتمرين :

لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ : $a_n = 2\times 5^n + 7$ .

1) أ - نلاحظ أن $a_n$ هو عبارة عن مجموع عددين أحدهما زوجي $(2\times 5^n)$ و الآخر فردي $(7)$ إذن : هو فردي .

**<u>أو كطريقة أخرى</u>** لدينا : $a_n = 2\times 5^n + 7$ أي : $a_n = 2\times 5^n + 2\times 3 + 1$ و منه : $a_n = 2\left(5^n + 3\right) + 1$ و هذا ما يدل على أن $a_n$ فردي .

ب - نجد : $5^0 \equiv 1[8]$ ، $5^1 \equiv 5[8]$ ، $5^2 \equiv 1[8]$ .

إذن : من أجل $n = 2k$ يكون : $\boxed{5^n \equiv 1[8]}$ و من أجل $n = 2k+1$ يكون : $\boxed{5^n \equiv 5[8]}$ .

ج - نميز حالتين :

حالة : $n = 2k$ (زوجي) فإن : $5^n \equiv 1[8]$ أي : $2\times 5^n \equiv 2[8]$ أي : $2\times 5^n + 7 \equiv 9[8]$ و منه : $\boxed{a_n \equiv 1[8]}$ .

حالة : $n = 2k+1$ (فردي) فإن : $5^n \equiv 5[8]$ أي : $2\times 5^n \equiv 10[8]$ أي : $2\times 5^n + 7 \equiv 17[8]$ و منه : $\boxed{a_n \equiv 1[8]}$ .

من الحالتين السابقتين نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن : $\boxed{a_n \equiv 1[8]}$ .

2) أ- لنبرهن أنه إذا كان : $\begin{cases} x\equiv 1[8] \\ x\equiv 7[125] \end{cases}$ فإن : $x\equiv 257[1000]$ .

لدينا : $\begin{cases} x\equiv 1[8] & \times 125 \\ x\equiv 7[125] & \times 8 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 125x\equiv 125[1000] \\ 8x\equiv 56[1000] & \times 16 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} 125x\equiv 125[1000] \\ 128x\equiv 896[1000] \end{cases}$ بالطرح نجد : $3x\equiv 771[1000]$

بضرب هذه الأخيرة في 3 نجد : $9x\equiv 2313[1000]$ و نعلم أن : $2313\equiv 313[1000]$ أي : $9x\equiv 313[1000]$

و منه تصبح : $\begin{cases} 9x\equiv 313[1000] \\ 8x\equiv 56[1000] \end{cases}$ بالطرح نتحصل على : $\boxed{x\equiv 257[1000]}$ هو المطلوب .

**<u>أو كطريقة أخرى :</u>**

لدينا : $\begin{cases} x\equiv 1[8] \\ x\equiv 7[125] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=8\alpha+1 \\ x=125\beta+1 \end{cases}$ و منه : $8\alpha+1=125\beta+7$ أي : $8\alpha=125\beta+6$ أي : $8\alpha\equiv 6[125]$

و منه : $4\alpha\equiv 3[125]$ أي : $124\alpha\equiv 93[125]$ و نعلم أن : $125\alpha\equiv 0[125]$ بالطرح نجد : $\alpha\equiv -93[125]$ و منه :

$\alpha\equiv 32[125]$ أي : $\boxed{\alpha=125k+32}$ نعوض قيمة $\alpha$ في : $x=8\alpha+1$ نجد : $x=8(125k+32)+1$ أي :

$x=1000k+257$ و هذا ما يدل على أن : $\boxed{x\equiv 257[1000]}$ .

ب – لدينا من أجل $n\geq 3$ يكون : $5^n$ مضاعفا لـــ 125 مثلا $(5^3=125)$ .

إذن : من أجل $n\geq 3$ فإن : $5^n\equiv 0[125]$ أي : $2\times 5^n+7\equiv 7[125]$ و بالتالي يكون : $\boxed{a_n\equiv 7[125]}$ .

لدينا مما سبق أن : $a_n\equiv 1[8]$ و $a_n\equiv 7[125]$ إذن حسب السؤال (أ) فإن : $\boxed{a_n\equiv 257[1000]}$ هو المطلوب .

ج – لدينا : $a_{2020}\times a_{2021}=(2\times 5^{2020}+7)(2\times 5^{2021}+7)$ .

حسب ما سبق لدينا : $\begin{cases} a_{2020}\equiv 257[1000] \\ a_{2021}\equiv 257[1000] \end{cases}$ أي : $a_{2020}\times a_{2021}\equiv 257^2[1000]$ و منه : $a_{2020}\times a_{2021}\equiv 66049[1000]$

إذن : $\boxed{a_{2020}\times a_{2021}\equiv 49[1000]}$ و هذا ما يدل على أن آخر ثلاث أرقام للعدد $(2\times 5^{2021}+7)(2\times 5^{2020}+7)$ هي : $\boxed{049}$

3) أ – لدينا : $5a_{2n}-a_{2n+1}=5(2\times 5^{2n}+7)-(2\times 5^{2n+1}+7)$ أي : $5a_{2n}-a_{2n+1}=2\times 5^{2n+1}+35-2\times 5^{2n+1}-7$

إذن : $\boxed{5a_{2n}-a_{2n+1}=28}$ .

ب – لدينا : $PGCD(a_{2n},a_{2n+1})=d$ أي أن : $d/a_{2n}$ و $d/a_{2n+1}$ ، لكن : $a_{2n}=2\times 5^{2n}+7$ و نعلم أن : $(2\times 5^{2n})$

ليس مضاعفا لـــ 7 إذن : $a_{2n}$ فردي و لا يقبل القسمة على 7 إذن : $\boxed{d\neq 7}$ .

ج – إيجاد قيم $d$ :

لدينا : $PGCD(a_{2n},a_{2n+1})=d$ أي أن : $d/a_{2n}$ و $d/a_{2n+1}$ إذن : $d/5a_{2n}-a_{2n+1}$ و منه : $\boxed{d/28}$ .

و بالتالي قيم $d$ الممكنة هي : 28,14,7,4,2,1 لكن $d\neq 7$ و أيضا حسب السؤال (1) (أ) فإن : $a_n$ فردي

بالتالي فحسب الشروط السابقة نستنتج أن : $\boxed{d=1}$ .

**<u>كتابة الأستاذ</u> : بلقاسم عبدالرزاق**