تمرين جيد في الحساب للمراجعة و التدرب

نــص التمرين :

ليكن P عددا أوليا أكبر من أو يساوي 7 .

نريد في هذا التمرين البرهنة على أن العدد $n=P^4-1$ يقبل القسمة على 240 .

1) أ) بين أن : $P\equiv 1[3]$ أو $P\equiv -1[3]$.

ب) إستنتج أن العدد n يقبل القسمة على 3 .

2) أ) بملاحظة أن P عدد فردي بين أنه يوجد عدد طبيعي k حيث : $P^2-1=4k(k+1)$.

ب) إستنتج أن العدد n يقبل القسمة على 16 .

3) بين أن 5 قاسم للعدد n .

4) نعتبر a ، b و c أعداد طبيعية .

أ) برهن أنه إذا كان c قابلا للقسمة على a و b مع هذين الأخيرين أوليان فيما بينهما فإن c يقبل القسمة على $a\times b$

ب) إستنتج مما سبق أن العدد n يقبل القسمة على 240 .

5) هل توجد أعداد أولية : P_1 ، P_2 ..... ، P_{15} كلها أكبر من أو تساوي 7 بحيث يكون العدد :

$A=P_1^4+P_2^4+......+P_{15}^4$ أولياً ؟ .

حل مقترح للتمرين :

1) أ) بما أن P عدد أولي أكبر من أو يساوي 7 إذن P لا يقبل القسمة على 3 أي أن باقي قسمة P على 3 هو :

1 أو 2 أي يكون : $\boxed{P\equiv 1[3]}$ أو $P\equiv 2[3]$ و منه : $\boxed{P\equiv -1[3]}$ هو المطلوب .

ب) بما أن : $P\equiv 1[3]$ أو $P\equiv -1[3]$ فإن : $P^4\equiv 1[3]$ و منه : $P^4-1\equiv 0[3]$ أي : $\boxed{n\equiv 0[3]}$.

إذن : n يقبل القسمة على 3 .

2) أ) بما أن P عدد فردي فإن : $P=2k+1$ مع $(k\in\mathbb{N})$ أي : $P^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$ و منه يكون :

$P^2-1=4k^2+4k$ إذن نجد : $\boxed{P^2-1=4k(k+1)}$ هو المطلوب .

ب) نعلم أن الجداء $k(k+1)$ زوجي إذن : $k(k+1)=2\alpha$ أي : $P^2-1=4\times 2\alpha$ و منه : $\boxed{P^2=8\alpha+1}$.

– لنحسب P^4 : $P^4=(8\alpha+1)^2=64\alpha^2+16\alpha+1$ أي : $P^4-1=64\alpha^2+16\alpha$ و منه : $\boxed{n=16(4\alpha^2+\alpha)}$.

إذن : n يقبل القسمة على 16 .

3) نعلم أن العدد P لا يقبل القسمة على 5 إذن : $P\equiv \pm 1[5]$ أو $P\equiv \pm 2[5]$ أي : $P^4\equiv 1[5]$ أو $P^4\equiv 16[5]$

أي : $P^4\equiv 1[5]$ و منه : $P^4-1\equiv 0[5]$ أي : $\boxed{n\equiv 0[5]}$ و بالتالي فإن 5 قاسم للعدد n .

4) أ) نفرض c يقبل القسمة على كل من a و b أي يكون : $c=k.a$ و $c=k'.b$ و منه : $k.a=k'.b$.

لكن : a و b أوليان فيما بينهما ، إذن : نستخدم مبرهنة **غــوص** .

لدينا : b يقسم $k.a$ و b أولي مع a ، إذن : b يقسم k و بالتالي : $\boxed{k=\alpha\times b}$.

لدينا : $c=k.a$ أي : $c=\alpha\times b\times a$ و منه : c يقبل القسمة على الجداء $a\times b$.

ب) لدينا : n يقبل القسمة على 3 و على 5 و هما أوليان فيما بينهما ، إذن : n يقبل القسمة على 3×5 أي على 15

و من جهة أخرى لدينا : n يقبل القسمة على 16 الذي هو أولي مع 15 و بالتالي فإن : n يقبل القسمة على 15×16 ، إذن : n يقبل القسمة على 240 .

5) بما أن الأعداد : P_1 ، P_2 ، ..... P_{15} أولية و أكبر من أو تساوي 7 إذن يكون :

$$\begin{cases} P_1^4-1\equiv0[240] \\ P_2^4-1\equiv0[240] \\ \vdots \\ P_{15}^4-1\equiv0[240] \end{cases}$$

بالجمع نجد : $P_1^4+P_2^4+....+P_{15}^4-15\equiv0[240]$.

أي : $A-15\equiv0[240]$ أي : $A-15=240\beta$ و منه : $A=240\beta+15$ أي : $\boxed{A=15(16\beta+1)}$.

إذن : العدد A ليس أوليا و بالتالي لا توجد الأعداد P_1 ، P_2 ، ..... P_{15} .

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق