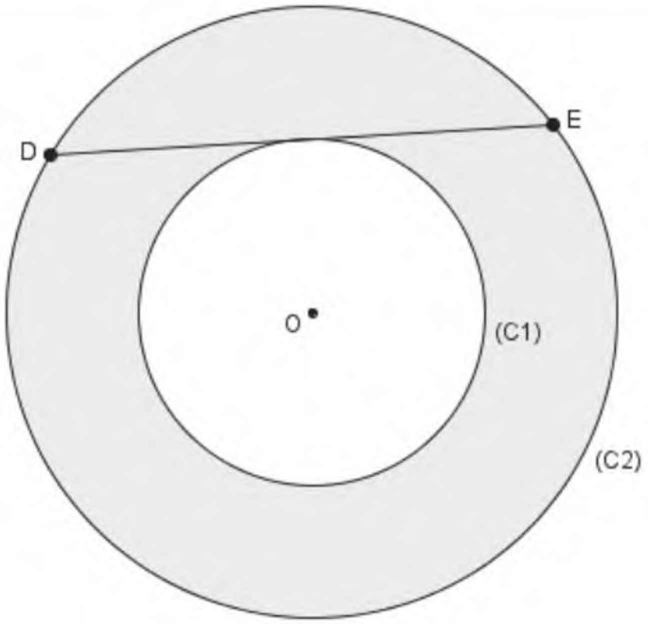
أولمبياد الثامن والعشرون



تمرين 1

نعتبرالشكل جانبه بحيث :

النقطة O هي مركز مشترك للدائرة (C_1) التي شعاعها r والدائرة (C_2) التي شعاعها R . (DE) هو مماس للدائرة (C_1) و $DE = 7cm$

احسب S مساحة المنطقة المضللة

تمرين 2

x و y عددين حقيقيين بحيث : $x + y = 1$

بين أن : $xy \leq \frac{1}{4}$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

1- بين أن : $\sqrt{(x^2-1)} + \sqrt{(y^2-1)} \leq xy$

2- استنتج أن : $\sqrt{(x^2-1)} + \sqrt{(y^2-1)} + \sqrt{(z^2-1)} \leq \frac{xy+yz+xz}{2}$

تمرين 4

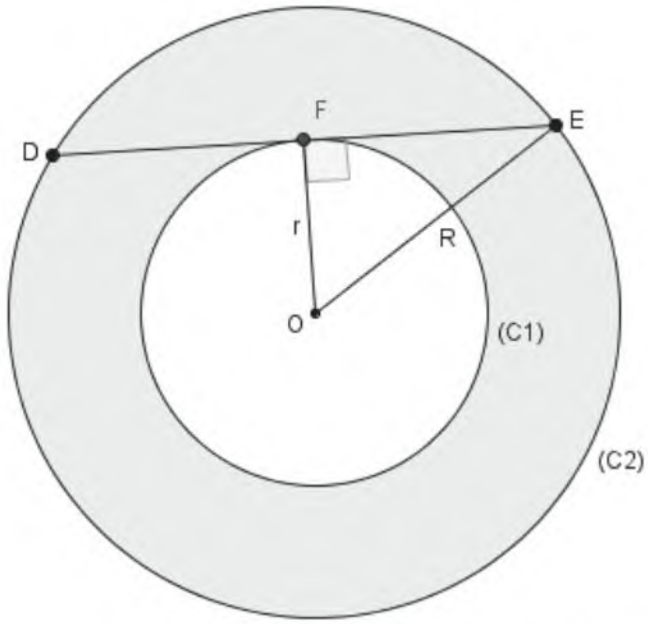
1- a عدد حقيقي موجب قطعا بحيث : $a + \frac{1}{a} = 2$

احسب $a^2 + \frac{1}{a^2}$ و $a^3 + \frac{1}{a^3}$ و $a^6 + \frac{1}{a^6}$ و $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

2- بين أن : $555555^2 - 333333^2 = 444444$

حل أولمبياد الثامن والعشرون

تمرين 1



لدينا (DE) هو مماس للدائرة (C_1) في النقطة F

إذن $(OF)\perp(DE)$

بما أن $(OF)\perp(DE)$ و $OE=OD=R$ فإن (OF) واسط القطعة $[DE]$

ومنه : $FD=FE=\dfrac{DE}{2}=\dfrac{7}{2}=3cm$

لدينا المثلث OFE قائم الزاوية في F

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $OE^2=OF^2+FE^2$

أي : $R^2=r^2+3,5^2$

أي : $R^2-r^2=12.25cm$ (1)

مساحة المنطقة المضللة (S) = مساحة الدائرة (C_2) − مساحة الدائرة (C_1)

$$\boxed{S=\pi R^2-\pi r^2=\pi\left(R^2-r^2\right)}$$

من 1 و 2 نستنتج أن : $S=\pi\left(R^2-r^2\right)=3,14\times12,25=38,465cm^2$

تمرين 2

لدينا : $x+y=1$ يعني : $(x+y)^2=1^2$ يعني : $x^2+2xy+y^2=1$

يعني : $x^2+2xy+y^2-4xy=1-4xy$ يعني : $x^2-2xy+y^2=1-4xy$ يعني : $(x-y)^2=1-4xy$

(نعلم أن : $(x-y)^2\geq 0$)

يعني : $1-4xy\geq 0$ يعني : $1\geq 4xy$ إذن : $xy\leq\frac{1}{4}$

تمرين 3

لدينا : $\left(\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}+1\right)^2\geq 0$

يعني : $(x^2-1)(y^2-1)+2\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}+1\geq 0$

يعني : $x^2y^2-x^2-y^2+1+2\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}+1\geq 0$

يعني : $x^2-1+y^2-1+2\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\leq x^2y^2$

يعني : $\left(\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}\right)^2\leq x^2y^2$ يعني : $\sqrt{\left(\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}\right)^2}\leq\sqrt{x^2y^2}$

إذن : $\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}\leq xy$

2- حسب السؤال 1 لدينا : $\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}\leq xy$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\sqrt{(y^2-1)}+\sqrt{(z^2-1)}\leq yz$ (2)

و $\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(z^2-1)}\leq xz$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}+\sqrt{(z^2-1)}+\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(z^2-1)}\leq xy+yz+xz$$

أي : $2\sqrt{(x^2-1)}+2\sqrt{(y^2-1)}+2\sqrt{(z^2-1)}\leq xy+yz+xz$

أي : $\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\left(\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}+\sqrt{(z^2-1)}\right)\leq\frac{1}{2}\times(xy+yz+xz)$

وبالتالي : $\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(y^2-1)}+\sqrt{(z^2-1)}\leq\frac{xy+yz+xz}{2}$

تمرين 4

-1

حساب $a^2+\frac{1}{a^2}$

لدينا : $a+\frac{1}{a}=2$

يعني : $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=2^2$

يعني : $a^2+2\times a\times\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}\right)^2=4$

يعني : $a^2+2+\frac{1}{a^2}=4$

إذن : $a^2+\frac{1}{a^2}=2$

- حساب $a^3+\frac{1}{a^3}$

لدينا : $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=2\times2$

يعني : $a\times a^2+a\times\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\times a^2+\frac{1}{a}\times\frac{1}{a^2}=4$

يعني : $a^3+\frac{1}{a}+a+\frac{1}{a^3}=4$

يعني : $a^3+2+\frac{1}{a^3}=4$

إذن : $a^3+\frac{1}{a^3}=2$

- حساب $a^6+\frac{1}{a^6}$

لدينا : $a^2+\frac{1}{a^2}=2$

يعني : $\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2=2^2$

يعني : $\left(a^2\right)^2+2\times a^2\times\frac{1}{a^2}+\left(\frac{1}{a^2}\right)^2=4$

يعني : $a^4+2+\frac{1}{a^4}=4$

إذن : $a^4+\frac{1}{a^4}=2$

لدينا : $\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=2\times2$

يعني : $a^4\times a^2+a^4\times\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}\times a^2+\frac{1}{a^4}\times\frac{1}{a^2}=4$

يعني : $a^6+\frac{1}{a^2}+a^2+\frac{1}{a^6}=4$

يعني : $a^6+2+\frac{1}{a^6}=4$

إذن : $a^6+\frac{1}{a^6}=2$

– حساب $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$

لدينا :

$$\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2+2\times\sqrt{a}\times\frac{1}{\sqrt{a}}+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$$
$$=a+2+\frac{1}{a}$$
$$=2+2$$
$$=4$$

إذن : $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=2$

-2

$$555555^2-333333^2=(111111\times5)^2-(111111\times3)^2=111111^2\times5^2-111111^2\times3^2$$
$$=111111^2\times\left(5^2-3^2\right)$$
$$=111111^2\times(25-9)$$
$$=111111^2\times16$$
$$=111111^2\times4^2$$
$$=(111111\times4)^2=444444^2$$