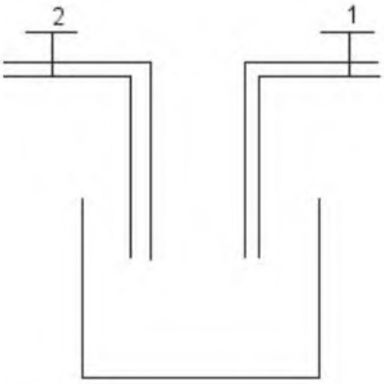
أولمبياد السابع والعشرون

تمرين 1



الشكل جانبه يمثل صهريج يحتوي على حنفيتين لمئه بالماء

الحنفية الأولى تملأ الصهريج في ساعتان

والحنفية الثانية تملأ الصهريج في 3 ساعات

إذا فتحنا الحنفيتين في نفس الوقت فكم سيستغرق

من الوقت حتى يمتلأ الصهريج

تمرين 2

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

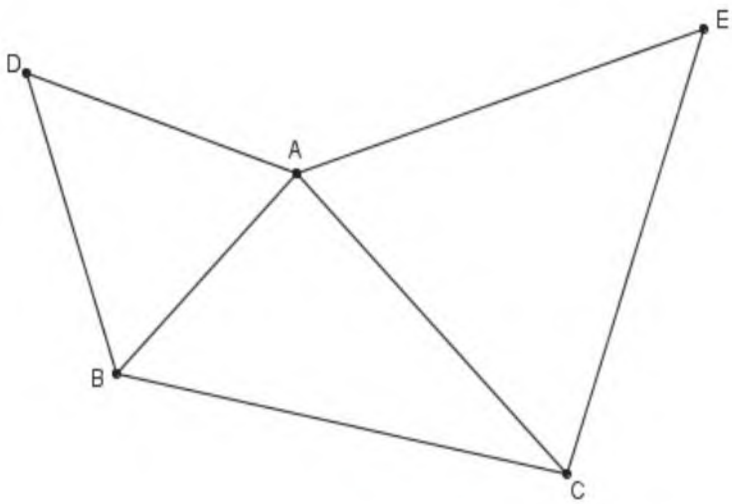
بين أن : $\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}\right)$

تمرين 3

$ABCD$ مستطيل مساحته $S = 30cm^2$ و طول قطره $BD = 65$

حدد محيط المستطيل P

تمرين 4



في الشكل جانبه : ABC مثلث

والمثلثان BAD و ACE متساويا

الأضلاع على التوالي في D و E

بين أن : $DC = BE$

أولمبياد السابع والعشرون

تمرين 1

نضع : V : حجم الصهريج

S_1 : صبيب الحنفية الأولى

S_2 : صبيب الحنفية الثانية

t : المدة الزمنية حتى يمتلأ الصهريج بواسطة الحنفيتين معا

– عند ملأ الصهريج بالحنفية الأولى فإن حجم الصهريج هو : $V = S_1 \times 2$

يعني : $S_1 = \dfrac{V}{2}$

– عند ملأ الصهريج بالحنفية الثانية فإن حجم الصهريج هو : $V = S_2 \times 3$

يعني : $S_2 = \dfrac{V}{3}$

– عند ملأ الصهريج بالحنفيتين معا فإن حجم الصهريج هو : $V = (S_1 + S_2) \times t$

يعني : $t = \dfrac{V}{S_1 + S_2}$ يعني : $t = \dfrac{V}{\dfrac{V}{2} + \dfrac{V}{3}} = \dfrac{V}{\dfrac{5V}{6}} = V \times \dfrac{6}{5V}$

إذن : $\boxed{t = \dfrac{6}{5}h}$

المدة الزمنية لملأ الصهريج بواسطة الحنفيتين معا هي : $1h12\min$

تمرين 2

لدينا : $\left(x - \sqrt{yz}\right)^2 \geq 0$

يعني : $x^2 - 2x\sqrt{yz} + yz \geq 0$ يعني : $x^2 + yz \geq 2x\sqrt{yz}$ يعني : $\dfrac{1}{x^2 + yz} \leq \dfrac{1}{2x\sqrt{yz}}$

يعني : $\dfrac{1}{x^2 + yz} \leq \dfrac{1}{2x\sqrt{yz}} \times \dfrac{\sqrt{yz}}{\sqrt{yz}}$

إذن : $\dfrac{1}{x^2 + yz} \leq \dfrac{\sqrt{yz}}{2xyz}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\dfrac{1}{y^2 + xz} \leq \dfrac{\sqrt{xz}}{2xyz}$ (2)

و $\dfrac{1}{z^2+xy} \le \dfrac{\sqrt{xy}}{2xyz}$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\dfrac{1}{x^2+yz}+\dfrac{1}{y^2+xz}+\dfrac{1}{z^2+xy} \le \dfrac{\sqrt{yz}}{2xyz}+\dfrac{\sqrt{xz}}{2xyz}+\dfrac{\sqrt{xy}}{2xyz}$

ومنه : $\dfrac{1}{x^2+yz}+\dfrac{1}{y^2+xz}+\dfrac{1}{z^2+xy} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}}{xyz}\right)$ (4)

لدينا : $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \ge 0$

يعني : $x-2\sqrt{xy}+y \ge 0$

يعني : $x+y \ge 2\sqrt{xy}$

إذن : $\dfrac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$ (5)

بنفس الطريقة نبين أن : $\dfrac{x+z}{2} \ge \sqrt{xz}$ (6)

و $\dfrac{y+z}{2} \ge \sqrt{yz}$ (7)

نجمع المتفاوتات 5 و 6 و 7 طرف بطرف : $\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz} \le \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x+z}{2}+\dfrac{y+z}{2}$

اي : $\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz} \le \dfrac{2x+2y+2z}{2}$

اي : $\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz} \le \dfrac{\cancel{2}\left(x+y+z\right)}{\cancel{2}}$

ومنه : $\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz} \le x+y+z$ (8)

من 4 و 8 نستنتج أن : $\dfrac{1}{x^2+yz}+\dfrac{1}{y^2+xz}+\dfrac{1}{z^2+xy} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}}{xyz}\right) \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+y+z}{xyz}\right)$

أي : $\dfrac{1}{x^2+yz}+\dfrac{1}{y^2+xz}+\dfrac{1}{z^2+xy} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}yz}+\dfrac{\cancel{y}}{x\cancel{y}z}+\dfrac{\cancel{z}}{xy\cancel{z}}\right)$

وبالتالي : $\dfrac{1}{x^2+yz}+\dfrac{1}{y^2+xz}+\dfrac{1}{z^2+xy} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{xy}\right)$

<u>تمرين 3</u>

لدينا ABD مثلث قائم الزاوية في B

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AB^2+AD^2=BD^2$

ومنه : $AB^2+AD^2=\left(\sqrt{65}\right)^2=65$ (1)

لدينا : $S=30cm^2$

يعني : $AB \times AD = 30$

يعني : $2 \times AB \times AD = 2 \times 30$

إذن : $2 \times AB \times AD = 60$ (2)

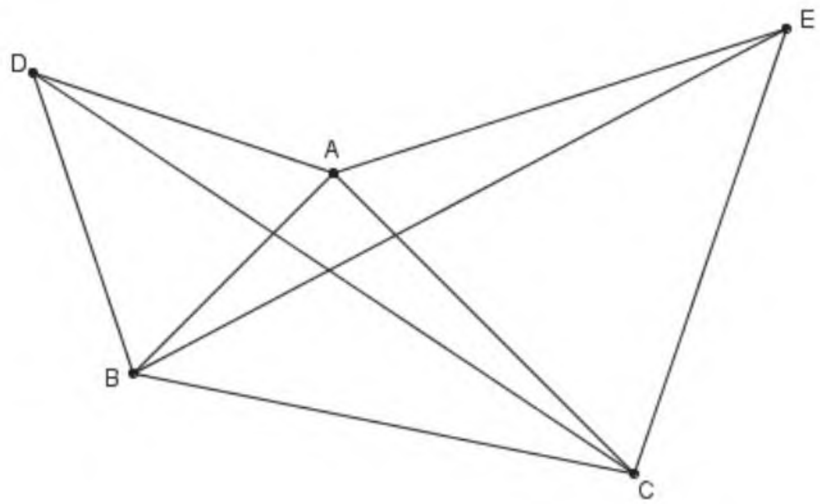
نجمع المتفاوتتين 1 و 2 طرف بطرف : $AB^2 + AD^2 + 2 \times AB \times AD = 65 + 60 = 125$

ومنه : $(AB + AD)^2 = 125$

أي : $AB + AD = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

وبالتالي : $P = 2 \times (AB + AD) = 2 \times 5\sqrt{5} = 10\sqrt{5}cm$

تمرين 4



لدينا : $B\hat{A}E = B\hat{A}C + C\hat{A}E = B\hat{A}C + 60^\circ$ ($C\hat{A}E = 60^\circ$ لأن المثلث ACE متساوي الأضلاع)

و $C\hat{A}D = C\hat{A}B + B\hat{A}D = C\hat{A}B + 60^\circ$ ($B\hat{A}D = 60^\circ$ لأن المثلث BAD متساوي الأضلاع)

إذن : $B\hat{A}E = C\hat{A}D$

بما أن : $\begin{cases} B\hat{A}E = C\hat{A}D \\ AE = AC \\ AB = AD \end{cases}$ فإن : المثلثان BAE و CAD متقايسان

وبالتالي : $DC = BE$