أولمبياد الرابع والعشرون

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^3+y^3+z^3=5 \end{cases}$ بين أن : $xyz=\frac{1}{3}$

تمرين 2

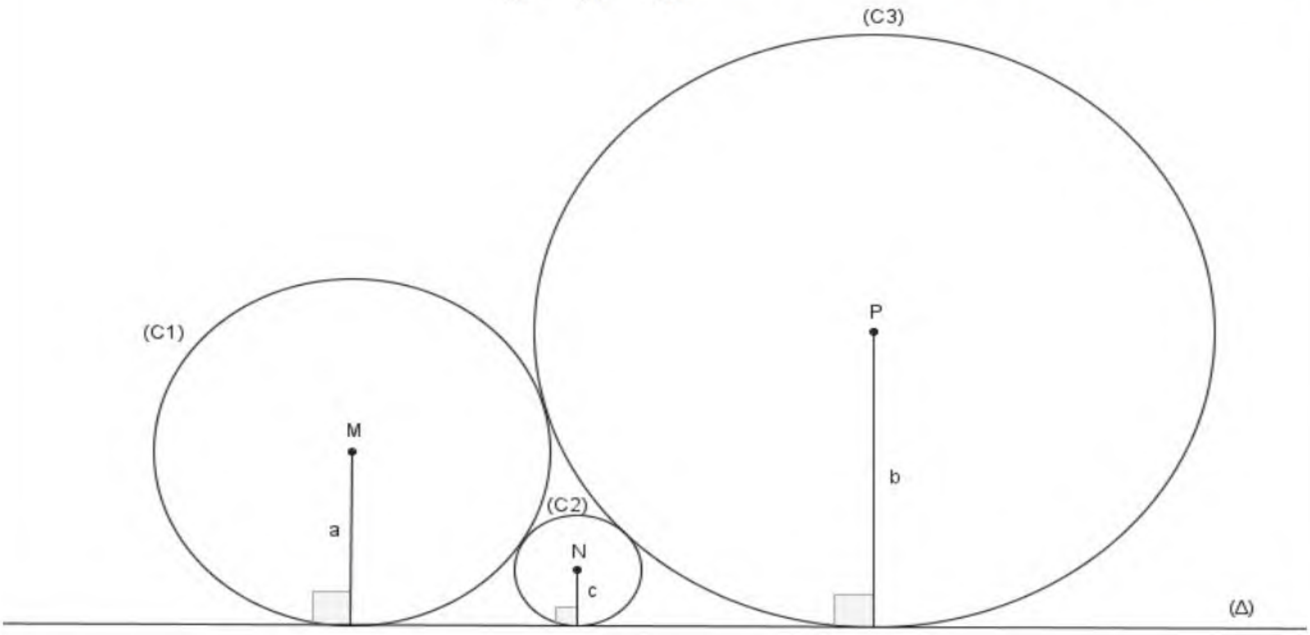
$$X=1^2-2^2+3^2-4^2+.....+99^2-100^2$$

$$Y=1+2+3+4+......+99+100$$

بين أن : $X+Y=0$

تمرين 3

نعتبر الشكل أسفله بحيث : الدوائر $C_1(M,a)$ و $C_2(N,c)$ و $C_3(P,b)$ متماسة فيما بينها والمستقيم (Δ) مماس للدوائر الثلاثة بين أن : $\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}$



تمرين 4

a و b و c أطوال أضلاع مثلث

بين أن $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\le abc$

حل أولمبياد الرابع والعشرون

تمرين 1

لدينا : $x+y+z=1$

يعني : $(x+y+z)^3=1^3$

يعني : $(x+y+z)^2\times(x+y+z)=1$

يعني : $(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)\times(x+y+z)=1$

يعني : $x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz=1$

يعني : $x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3y^2(x+z)+3z^2(x+y)+6xyz=1$

بما أن : $x+y+z=1$ فإن : $x+y=1-z$ و $y+z=1-x$ و $x+z=1-y$

يعني : $x^3+y^3+z^3+3x^2(1-x)+3y^2(1-y)+3z^2(1-z)+6xyz=1$

يعني : $x^3+y^3+z^3+3x^2+3y^2+3z^2-3x^3-3y^3-3z^3+6xyz=1$

يعني : $x^3+y^3+z^3+3(x^2+y^2+z^2)-3(x^3+y^3+z^3)+6xyz=1$

يعني : $5+3\times3-3\times5+6xyz=1$ ($x^2+y^2+z^2=3$ و $x^3+y^3+z^3=5$)

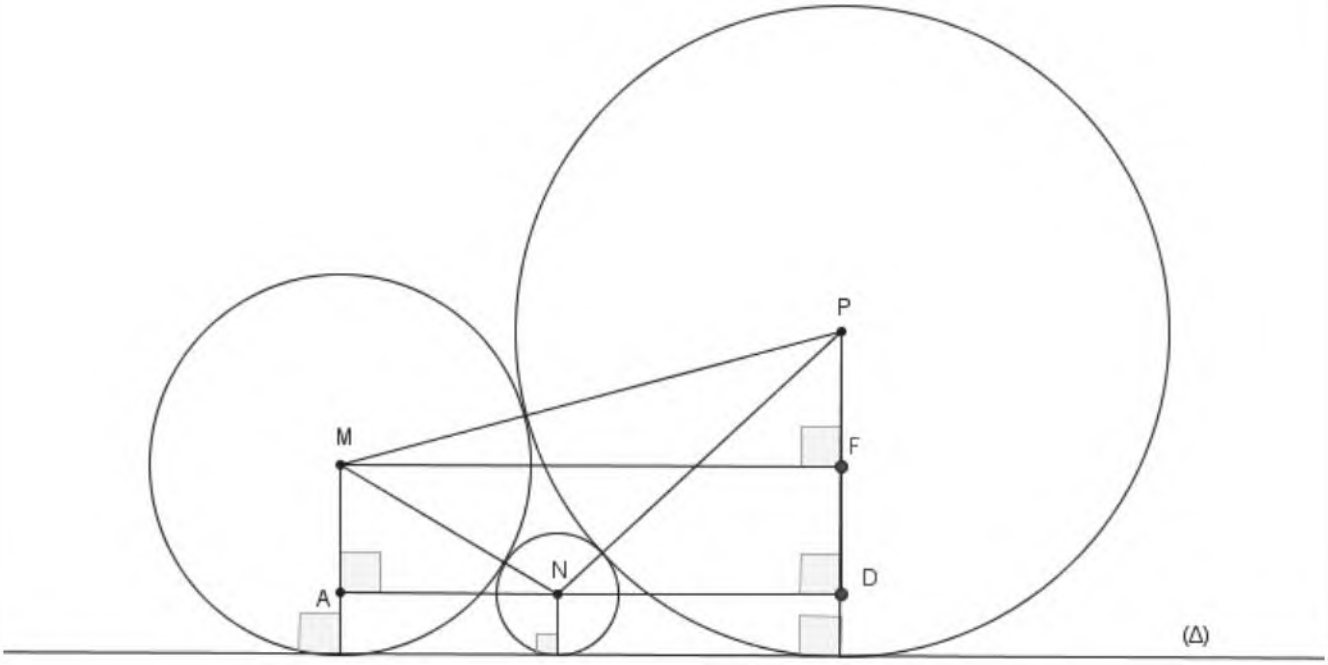
يعني : $-1+6xyz=1$

وبالتالي : $xyz=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

تمرين 2

$$\begin{aligned}
X+Y&=(1^2-2^2+3^2-4^2+.....+99^2-100^2)+(1+2+3+4+......+99+100)\\
&=(1+1)+(2-2^2)+(3+3^2)+(4-4^2)+...+(99+99^2)+(100-100^2)\\
&=2+(2\times(1-2))+(3\times(1+3))+(4\times(1-4))+...+(99\times(1+99))+(100\times(1-100))\\
&=2+(2\times(-1))+(3\times(4))+(4\times(-3))+...+(99\times(100))+(100\times(-99))\\
&=\cancel{2}-\cancel{2}+\cancel{12}-\cancel{12}+...+\cancel{9900}-\cancel{9900}\\
&=0
\end{aligned}$$

تمرين 3



لدينا MAN قائم الزاوية في A

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $MN^2 = MA^2 + AN^2$

أي : $AN^2 = MN^2 - MA^2$ أي : $AN^2 = (a+c)^2 - (a-c)^2$

أي : $AN = \sqrt{(a+c)^2 - (a-c)^2}$ أي : $AN = \sqrt{\cancel{a^2} + 2ac + \cancel{c^2} - \cancel{a^2} + 2ac - \cancel{c^2}}$

ومنه : $AN = \sqrt{4ac} = 2\sqrt{ac}$ (1)

و لدينا NDP قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $NP^2 = ND^2 + DP^2$

أي : $ND^2 = NP^2 - DP^2$ أي : $ND^2 = (c+b)^2 - (b-c)^2$

أي : $ND = \sqrt{(c+b)^2 - (b-c)^2}$ أي : $ND = \sqrt{\cancel{c^2} + 2cb + \cancel{b^2} - \cancel{c^2} + 2cb - \cancel{b^2}}$

ومنه : $ND = \sqrt{4cb} = 2\sqrt{cb}$ (2)

و لدينا MFP قائم الزاوية في F

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $MP^2 = MF^2 + PF^2$

أي : $MF^2 = MP^2 - PF^2$ أي : $MF^2 = (a+b)^2 - (b-a)^2$

أي : $MF = \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2}$ أي : $MF = \sqrt{\cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 2ab - \cancel{a^2}}$

ومنه : $MF = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$ (3)

لدينا : $MF = AD = AN + ND$ (4)

من 1 و 2 و 3 و 4 نستنتج أن : $2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{cb}$

أي : $\frac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2\sqrt{ab} = \frac{1}{2\sqrt{abc}} \times \left(2\sqrt{ac} + 2\sqrt{cb}\right)$

وبالتالي : $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

<u>تمرين 4</u>

لدينا a و b و c أطوال أضلاع مثلث

يعني : $a+b>c$ و $c+a>b$ و $b+c>a$

يعني : $a+b-c>0$ و $c+a-b>0$ و $b+c-a>0$

نضع : $x=a+b-c>0$ و $y=b+c-a>0$ و $z=c+a-b>0$

لدينا : $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$ يعني : $x-2\sqrt{xy}+y \geq 0$ يعني : $2\sqrt{xy} \leq x+y$

إذن : $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\sqrt{xz} \leq \frac{x+z}{2}$ (2)

و $\sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$ (3)

نضرب المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\sqrt{xy} \times \sqrt{xz} \times \sqrt{yz} \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2}$

أي : $\sqrt{(xyz)^2} \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2}$ أي : $xyz \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2}$

أي :

$$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq \frac{\cancel{a}+b-\cancel{c}+b+\cancel{c}-\cancel{a}}{2} \times \frac{a+\cancel{b}-\cancel{c}+a+\cancel{c}-\cancel{b}}{2} \times \frac{\cancel{b}+c-\cancel{a}+\cancel{a}+c-\cancel{b}}{2}$$

أي : $(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq \frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}c}{\cancel{2}}$

وبالتالي : $(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq abc$