أولمبياد الثالث والعشرون

تمرين 1

x عدد حقيقي غير منعدم ($x \neq 0$) بحيث : $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$

بين أن : $\frac{x^3}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{29}$

تمرين 2

a و b و c أطوال أضلاع مثلث

1- بين أن $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

2- بين أن : $\sqrt{a+b-c} + \ b+c-a \leq \sqrt{2}\sqrt{b}$

3- استنتج أن : $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{a+c-b} \leq \ a + \ b + \sqrt{c}$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $xy + yz + zx = \frac{xyz}{2}$

بين أن : $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} < \frac{1}{2}$

تمرين 4

x و y عددان حقيقيان غير منعدمان بحيث : $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{1}{3}$

احسب $\frac{x}{y}$

حل أولمبياد الثالث والعشرون

تمرين 1

لدينا :

$$\frac{x^3}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}\left(x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$=\frac{1}{1+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$$

لنحدد قيمة $x+\frac{1}{x}$:

لدينا : $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{3}$ يعني : $\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{3}$ يعني : $\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=\frac{1}{3}$

إذن : $x+\frac{1}{x}=3$

لنحدد قيمة $x^2+\frac{1}{x^2}$:

لدينا : $x+\frac{1}{x}=3$ يعني : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3^2$ يعني : $x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$

إذن : $x^2+\frac{1}{x^2}=7$

لنحدد قيمة $x^3+\frac{1}{x^3}$:

لدينا : $x+\frac{1}{x}=3$ $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=3\times 7$ يعني : $x^3+\left(\frac{1}{x}+x\right)+\frac{1}{x^3}=21$

يعني : $x^3+3+\frac{1}{x^3}=21$ إذن : $x^3+\frac{1}{x^3}=18$

لدينا :

$$\frac{x^3}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{1}{1+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$$
$$=\frac{1}{1+3+7+18}$$

وبالتالي : $\frac{x^3}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{1}{29}$

تمرين 2

1- لدينا :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{2a}{2(b+c)}+\frac{2b}{2(c+a)}+\frac{2c}{2(a+b)}$$
$$=\frac{2a}{(b+c)+(b+c)}+\frac{2b}{(c+a)+(c+a)}+\frac{2c}{(a+b)+(a+b)}$$

لدينا : a و b و c أطوال أضلاع مثلث

يعني : $a+b>c$ و $c+a>b$ و $b+c>a$

يعني : $a+b+(a+b)>c+a+b$ و $c+a+(c+a)>b+c+a$ و $b+c+(b+c)>a+b+c$

يعني : $\frac{1}{a+b+(a+b)}<\frac{1}{c+a+b}$ و $\frac{1}{c+a+(c+a)}<\frac{1}{b+c+a}$ و $\frac{1}{b+c+(b+c)}<\frac{1}{a+b+c}$

يعني : $\frac{2c}{a+b+(a+b)}<\frac{2c}{c+a+b}$ و $\frac{2b}{c+a+(c+a)}<\frac{2b}{b+c+a}$ و $\frac{2a}{b+c+(b+c)}<\frac{2a}{a+b+c}$

إذن :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{2a}{(b+c)+(b+c)}+\frac{2b}{(c+a)+(c+a)}+\frac{2c}{(a+b)+(a+b)}$$
$$<\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{b+c+a}+\frac{2c}{c+a+b}=\frac{2\left(\cancel{a+b+c}\right)}{\cancel{a+b+c}}=2$$

2- لدينا : $a+b>c$ و $c+a>b$ و $b+c>a$ يعني : $a+b-c>0$ و $c+a-b>0$ و $b+c-a>0$

نضع : $x=a+b-c>0$ و $y=c+a-b>0$ و $z=b+c-a>0$

يعني : $x+y=2a$ و $x+z=2b$ و $y+z=2c$

إذن : $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}=\sqrt{x}+\sqrt{z}$ و $\sqrt{x+z}=\sqrt{2}\sqrt{b}$

لنبين أن : $\sqrt{x}+\sqrt{z}\le\sqrt{2}\sqrt{x+z}$

لدينا : $2(x+z)-\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)^2=2x+2z-x-2\sqrt{x}\sqrt{z}-z=x-2\sqrt{x}\sqrt{z}+z=\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2\ge0$

يعني : $2(x+z) \geq \left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)^2$

يعني : $\sqrt{2(x+z)} \geq \sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)^2}$

إذن : $\sqrt{x}+\sqrt{z} \leq \sqrt{2}\sqrt{x+z}$

وبالتالي : $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{2}\sqrt{b}$

3- حسب السؤال السابق لدينا : $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{2}\sqrt{b}$ (1)

وبنفس الطريقة نبين أن : $\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{2}\sqrt{c}$ (2)

و $\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c} \leq \sqrt{2}\sqrt{a}$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$2\sqrt{a+b-c}+2\sqrt{b+c-a}+2\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{2}\sqrt{b}+\sqrt{2}\sqrt{c}+\sqrt{2}\sqrt{a}$$

أي : $2\left(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\right) \leq 2\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)$

وبالتالي : $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{a+c-b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

تمرين 3

لدينا : $xy+yz+zx=\frac{xyz}{2}$

يعني : $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{2}$

يعني : $\frac{xy}{xyz}+\frac{yz}{xyz}+\frac{zx}{xyz}=\frac{1}{2}$

إذن : $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ (1)

لدينا : $2>0$

يعني : $2>x-x$

يعني : $2+x>x$

إذن : $\frac{1}{2+x}<\frac{1}{x}$ (2)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{1}{2+y}<\frac{1}{y}$ (3) و $\frac{1}{2+z}<\frac{1}{z}$ (4)

نجمع المتفاوتات 2 و 3 و 4 نستنتج أن : $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

من 1 و 5 نستنتج أن : $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}<\frac{1}{2}$

تمرين 4

لدينا : $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{1}{3}$

يعني : $\frac{\cancel{xy}\times\left(\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}\right)}{\cancel{xy}\times\left(\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}\right)}=\frac{1}{3}$

يعني : $\frac{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}}=\frac{1}{3}$

نضع : $k=\frac{x}{y}$

يعني : $\frac{k-1+\frac{1}{k}}{k+1+\frac{1}{k}}=\frac{1}{3}$

يعني : $\frac{\frac{k^2-k+1}{k}}{\frac{k^2+k+1}{k}}=\frac{1}{3}$

يعني : $\frac{k^2-k+1}{\cancel{k}}\times\frac{\cancel{k}}{k^2+k+1}=\frac{1}{3}$

يعني : $\frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}=\frac{1}{3}$

يعني : $k^2+k+1=3k^2-3k+3$

يعني : $3k^2-3k+3-k^2-k-1=0$ يعني : $2k^2-4k+2=0$

يعني : $2\left(k^2-2k+1\right)=0$ يعني : $k^2-2k+1=0$

يعني : $(k-1)^2=0$ يعني : $k-1=0$

إذن : $k=1$

وبالتالي : $\boxed{\frac{x}{y}=1}$