أولمبياد العشرون

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x+y+z=3$

بين أن : $\frac{\sqrt{x}}{y+z}+\frac{\sqrt{y}}{x+z}+\frac{\sqrt{z}}{x+y}\geq\frac{3}{2}$

تمرين 2

احسب $A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

تمرين 3

1 – u و v و w أعداد حقيقية

بين أن : $(u+v+w)^2\leq 3(u^2+v^2+w^2)$

2– x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x+y+z=1$

بين أن : $\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\leq 3\sqrt{3}$ (استعمل السؤال 1)

تمرين 4

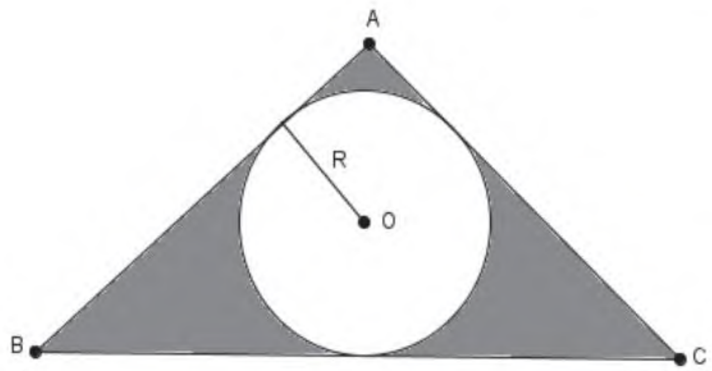
ABC مثلث بحيث : $AB=13cm$

و $BC=15cm$ و $AC=14cm$

النقطة O هي مركز الدائرة المحاطة

بالمثلث ABC التي شعاعها R

احسب مساحة المنطقة المظللة



حل أولمبياد العشرون

تمرين 1

لدينا : $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0$

يعني : $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \times \left(-\sqrt{x}-2\right) \leq 0 \times \left(-\sqrt{x}-2\right)$ $\quad (-\sqrt{x}-2 \leq 0)$

يعني : $\left(x-2\sqrt{x}+1\right) \times \left(-\sqrt{x}-2\right) \leq 0$ يعني : $-x\sqrt{x}-\cancel{2x}+\cancel{2x}+4\sqrt{x}-\sqrt{x}-2 \leq 0$

يعني : $-x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2 \leq 0$ يعني : $\sqrt{x}(3-x) \leq 2$ يعني : $\dfrac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq \dfrac{1}{2}$

يعني : $\left(\sqrt{x}\right)^2 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq \left(\sqrt{x}\right)^2 \times \dfrac{1}{2}$ إذن : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z} \geq \dfrac{x}{2}$ $\quad (1)$

بنفس الطريقة نبين أن : $\dfrac{\sqrt{y}}{x+z} \geq \dfrac{y}{2}$ $\quad (2)$

و $\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{z}{2}$ $\quad (3)$

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z}+\dfrac{\sqrt{y}}{x+z}+\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}$

أي : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z}+\dfrac{\sqrt{y}}{x+z}+\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{x+y+z}{2}$

وبالتالي : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z}+\dfrac{\sqrt{y}}{x+z}+\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{3}{2}$

تمرين 2

نضرب في المرافق

$$A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{2}}\times\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-\sqrt{34}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}\times\frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{\sqrt{98}-\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\times\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$$

$$=\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4}+\cdots+\frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{98-99}+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100}$$

$$=-\frac{1-\sqrt{2}}{1}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{1}-\cdots-\frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{1}-\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{1}$$

$$=-1+\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{4}}-\cdots-\cancel{\sqrt{98}}+\cancel{\sqrt{99}}-\cancel{\sqrt{99}}+\sqrt{100}$$

$$=-1+\sqrt{100}=-1+10=9$$

تمرين 3

1- لنحدد إشارة الفرق : $3\left(u^2+v^2+w^2\right)-(u+v+w)^2$

لنحدد إشارة الفرق

لدينا :

$$\begin{aligned}3\left(u^2+v^2+w^2\right)-(u+v+w)^2 &= 3u^2+3v^2+3w^2-\left((u+v)+w\right)^2\\ &= 3u^2+3v^2+3w^2-(u+v)^2-2\times(u+v)\times w-w^2\\ &= 3u^2+3v^2+3w^2-u^2-2uv-v^2-2uw-2vw-w^2\\ &= 2u^2+2v^2+2w^2-2uv-2uw-2vw\\ &= u^2-2uv+v^2+u^2-2uw+w^2+v^2-2vw+w^2\\ &= (u-v)^2+(u-w)^2+(v-w)^2\geq 0\end{aligned}$$

إذن : $(u+v+w)^2\leq 3\left(u^2+v^2+w^2\right)$

2- نضع : $u=\sqrt{6x+1}$ و $v=\sqrt{6y+1}$ و $w=\sqrt{6z+1}$

حسب السؤال 1 : $\left(\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\right)^2\leq 3(6x+1+6y+1+6z+1)$

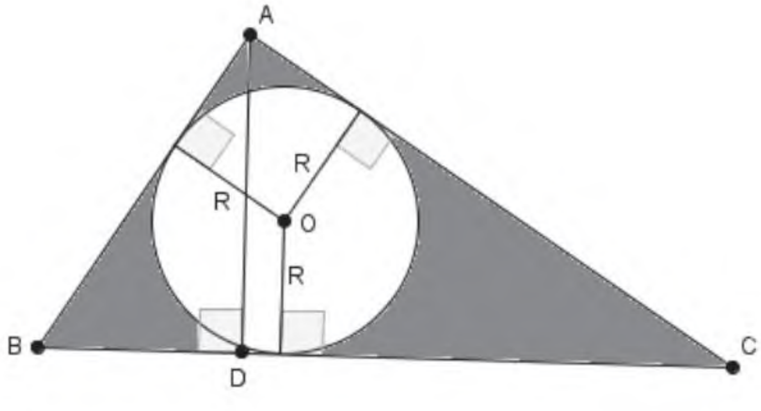
يعني : $\left(\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\right)^2\leq 3\left(6(x+y+z)+3\right)$

يعني : $\left(\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\right)^2\leq 3(6\times1+3)=27$ ($x+y+z=1$)

يعني : $\sqrt{\left(\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\right)^2}\leq\sqrt{27}$

وبالتالي : $\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\leq 3\sqrt{3}$

تمرين 4



لدينا المثلث ADB قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $AB^2 = AD^2 + DB^2$

ومنه : $AD^2 = AB^2 - DB^2$ (1)

لدينا المثلث ADC قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $AC^2 = AD^2 + DC^2$

ومنه : $AD^2 = AC^2 - DC^2$ (2)

من 1 و 2 نستنتج ان : $AD^2 = AB^2 - DB^2 = AC^2 - DC^2$

أي : $DB^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$ أي : $(DB-DC)(DB+DC) = AB^2 - AC^2$

أي : $(DB-DC)AC = AB^2 - AC^2$ أي : $(DB-DC)\times 15 = 13^2 - 14^2$

اي : $DB - DC = \frac{169-196}{15}$ أي : $DB - DC = -1,8$ إذن : $DC = DB + 1,8$

لدينا : $BD + DC = 15$

يعني : $BD + (DB+1,8) = 15$ يعني : $2BD = 15 - 1,8$ إذن : $BD = 6,6$

لدينا : $AD^2 = AB^2 - DB^2$ أي : $AD^2 = 13^2 - 6.6^2$ أي : $AD = \sqrt{169 - 43,56}$

إذن : $AD = 11,2$

لدينا : $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{OBC} + S_{AOC}$

يعني : $84 = \frac{13\times R}{2} + \frac{15\times R}{2} + \frac{14\times R}{2}$ يعني : $84 = R\left(\frac{13}{2} + \frac{15}{2} + \frac{14}{2}\right)$ يعني : $84 = R\times 21$

إذن : $R = 4cm$

لدينا : مساحة المنطقة المظللة = مساحة المثلث ABC – مساحة الدائرة

يعني :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times AD\times BC - \pi R^2 &= \frac{1}{2}\times 11,2\times 15 - 3,14\times 4^2\\ &= 84 - 50,24\\ &= 33,76cm^2\end{aligned}$$

وبالتالي مساحة المنطقة المظللة هي : $33,76cm^2$