أولمبياد التاسع عشر

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x+2y+3z\geq 20$

بين أن : $x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}\geq 13$

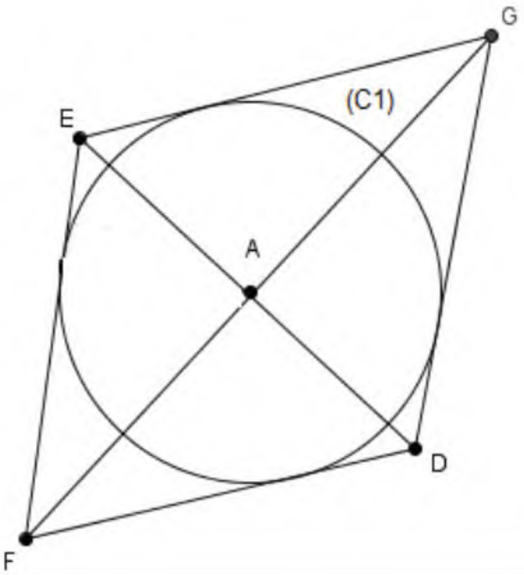
تمرين 2

$EGDF$ معين مركزه A محيطه $P=2\;41cm$

ومساحته $S=10cm^2$ كما هو مبين في الشكل جانبه.

الدائرة (C_1) هي مماسة لأضلاع المعين

احسب مساحة الدائرة (C_1)



تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية منعدمة بحيث : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

بين أن : $(y+x+z)^2=y^2+x^2+z^2$

تمرين 4

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x\neq y$ و $x^2=2016+y$ و $y^2=2016+x$

احسب xy

حل أولمبياد التاسع عشر

تمرين 1

لدينا :

$$x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}=\frac{4x}{4}+\frac{2y}{2}+\frac{4z}{4}+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}$$

$$=\frac{3x+x}{4}+\frac{y+y}{2}+\frac{3z+z}{4}+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}$$

$$=\frac{3x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{3z}{4}+\frac{z}{4}+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}$$

إذن : $x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}=\left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right)+\left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right)+\frac{x+2y+3z}{4}$ (1)

لدينا : $\left(\sqrt{\frac{3x}{4}}+\sqrt{\frac{3}{x}}\right)^2\geq 0$

يعني : $\left(\sqrt{\frac{3x}{4}}\right)^2+2\sqrt{\frac{3x}{4}}\times\sqrt{\frac{3}{x}}+\left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right)^2\geq 0$

يعني : $\frac{3x}{4}+2\sqrt{\frac{3x}{4}}\times\sqrt{\frac{3}{x}}+\frac{3}{x}\geq 0$

إذن : $\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\geq 2\sqrt{\frac{3x}{4}}\times\sqrt{\frac{3}{x}}$ (2)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\geq 2\sqrt{\frac{y}{2}}\times\sqrt{\frac{9}{2y}}$ (3)

و $\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\geq 2\sqrt{\frac{z}{4}}\times\sqrt{\frac{4}{z}}$ (4)

نجمع المتفاوتات 2 و 3 و 4 طرف بطرف :

$$\left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right)+\left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right)\geq 2\sqrt{\frac{3x}{4}}\times\sqrt{\frac{3}{x}}+2\sqrt{\frac{y}{2}}\times\sqrt{\frac{9}{2y}}+2\sqrt{\frac{3z}{4}}\times\sqrt{\frac{4}{z}}$$

$$=2\sqrt{\frac{3\cancel{x}}{4}\times\frac{3}{\cancel{x}}}+2\sqrt{\frac{\cancel{y}}{2}\times\frac{9}{2\cancel{y}}}+2\sqrt{\frac{\cancel{z}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{z}}}$$

$$=2\times\frac{3}{2}+2\times\frac{3}{2}+2$$

ومنه : $\left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right)+\left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right)\geq 8$ (5)

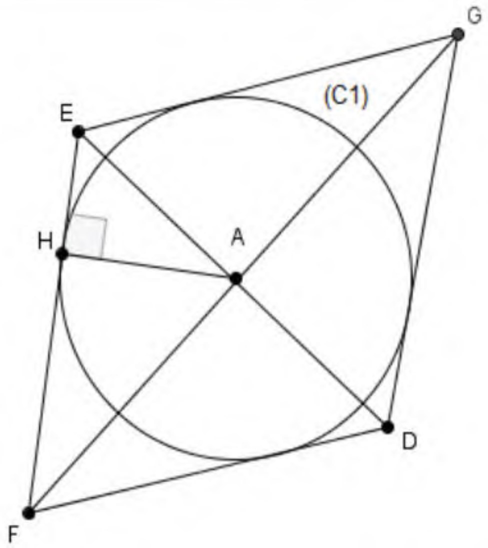
ونعلم أن : $x+2y+3z\geq 20$ (6)

من 1 و 5 و 6 نستنتج أن :

$$x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}=\left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right)+\left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right)+\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{3z}{4}\geq 8+\frac{20}{4}$$

وبالتالي : $x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}\geq 13$

تمرين 2



لدينا : $P=4\times EG=2\sqrt{41}$

إذن : $EG=\frac{2\sqrt{41}}{4}=\frac{\sqrt{41}}{2}$

ولدينا : $S_{EGDF}=\frac{1}{2}\times ED\times FG=10$

(S_{EGDF} : مساحة المعين $EGDF$)

إذن : $ED\times FG=10\times 2=20$ (1)

نعتبر H نقطة التماس بين الدائرة (C_1)

والمستقيم (EF)

إذن : $(EF)\perp(AH)$

أي : $[AH]$ ارتفاع في المثلث EAF القائم الزاوية في A

أي : $AH\times EF=AE\times AF$ (علاقة مترية)

أي : $AH=\frac{AE\times AF}{EF}$ أي : $AH=\frac{\frac{ED}{2}\times\frac{FG}{2}}{EF}$ أي : $AH=\frac{ED\times FG}{4\times\frac{\sqrt{41}}{2}}$

إذن : $AH=\frac{ED\times FG}{2\sqrt{41}}$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $AH=\frac{20}{2\sqrt{41}}$ ومنه : $AH=\frac{10}{\sqrt{41}}\times\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}}=\frac{10\sqrt{41}}{41}$

مساحة الدائرة (C_1) : $S_{(C_1)}=\pi\times AH^2$

وبالتالي : $S_{(C_1)}=3.14\times\left(\frac{10\sqrt{41}}{41}\right)^2=7.65cm^2$

تمرين 3

لدينا : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

يعني : $xyz\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=xyz\times 0$ يعني : $\frac{xyz}{x}+\frac{xyz}{y}+\frac{xyz}{z}=0$

يعني : $yz+xz+xy=0$ يعني : $yz+xz=-xy$

يعني : $z(y+x)=-xy$

يعني : $y+x=\frac{-xy}{z}$ يعني : $y+x+z=\frac{-xy}{z}+z$

يعني : $(y+x+z)^2=\left(\frac{-xy}{z}+z\right)^2$

يعني : $(y+x+z)^2=\left(\frac{xy}{z}\right)^2-2xy+z^2$

يعني : $(y+x+z)^2=(y+x)^2-2xy+z^2$ $\left(\left(\frac{-xy}{z}\right)^2=\left(\frac{xy}{z}\right)^2=(y+x)^2 \right)$

يعي : $(y+x+z)^2=y^2+\cancel{2xy}+x^2-\cancel{2xy}+z^2$

إذن : $(y+x+z)^2=y^2+x^2+z^2$

تمرين 4

لدينا : $x^2=2016+y$ و $y^2=2016+x$

يعني : $x^2-y^2=\cancel{2016}+y-\cancel{2016}-x$

يعني : $(x-y)(x+y)=-(x-y)$

يعني : $x+y=\frac{-(x-y)}{x-y}=-1$ $(x\neq y)$

يعني : $(x+y)^2=(-1)^2$

يعني : $x^2+2xy+y^2=1$

يعني : $y+2016+2xy+x+2016=1$

يعني : $(x+y)+2032+2xy=1$

يعني : $-1+2032+2xy=1$ $(\quad x+y=-1 \quad)$

يعني : $2xy=-2030$

وبالتالي : $xy=-2015$