أولمبياد السابع عشر

تمرين 1

x و y عددان صحيحان طبيعيان متتابعان ($y > x$)

بين أن : $x^2 + y^2 + (xy)^2 = (x^2 + y)^2$

تمرين 2

x و y عددان حقيقيان بحيث : $1 < x$ و $y > 1$

بين أن : $y \quad x-1+x \quad y-1 \le xy$

تمرين 3

نعتبر النقطتين A و O من المستوى

A •   • O

أنشئ النقطة H مماثلة A بالنسبة للنقطة O و النقطة F مماثلة O بالنسبة للنقطة A بواسطة البركار فقط (تبرير الإنشاء)

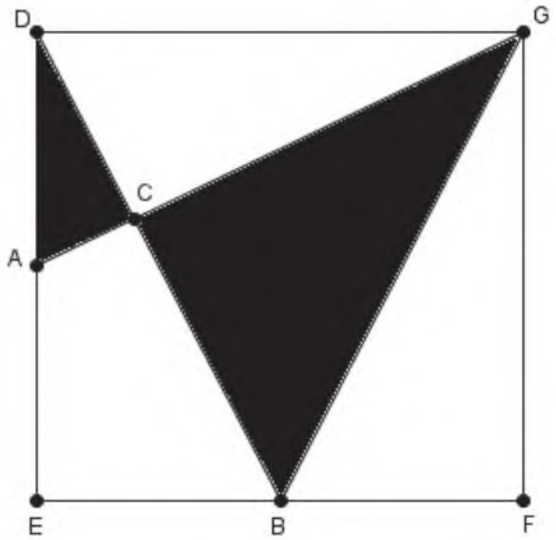
تمرين 4

$DGFE$ مربع بحيث : $DG = 8cm$

النقطتان A و B هما على التوالي

منتصفا $[DE]$ و $[EF]$

احسب مساحة المنطقة المظللة



حل أولمبياد السابع عشر

تمرين 1

بما أن x و y عددان صحيحان طبيعيان متتابعان و $y > x$

فإن $y = x+1$

لدينا :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+(xy)^2 &= x^2+y^2+(x(x+1))^2 = x^2+y^2+x^2(x+1)^2 \\ &= x^2+y^2+x^2(x^2+2x+1) \\ &= x^2+y^2+x^4+2x^3+x^2 \\ &= x^4+y^2+2x^2+2x^3 \\ &= x^4+y^2+2x^2(1+x) \\ &= (x^2)^2+y^2+2x^2y \end{aligned}$$

نعلم أن : $(x^2+y)^2 = (x^2)^2+y^2+2x^2y$

وبالتالي : $x^2+y^2+(xy)^2 = (x^2+y)^2$

تمرين 2

بما أن $x>1$ فإن $x-1>0$

لدينا : $(\sqrt{x-1}-1)^2 \geq 0$

يعني : $(\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1}+1 \geq 0$ يعني : $x-\cancel{1}-2\sqrt{x-1}+\cancel{1} \geq 0$

يعني : $-2\sqrt{x-1} \geq -x$ يعني : $\frac{-1}{\cancel{2}}\times(-\cancel{2}\sqrt{x-1}) \leq \frac{-1}{2}\times(-x)$ يعني : $\sqrt{x-1} \leq \frac{x}{2}$

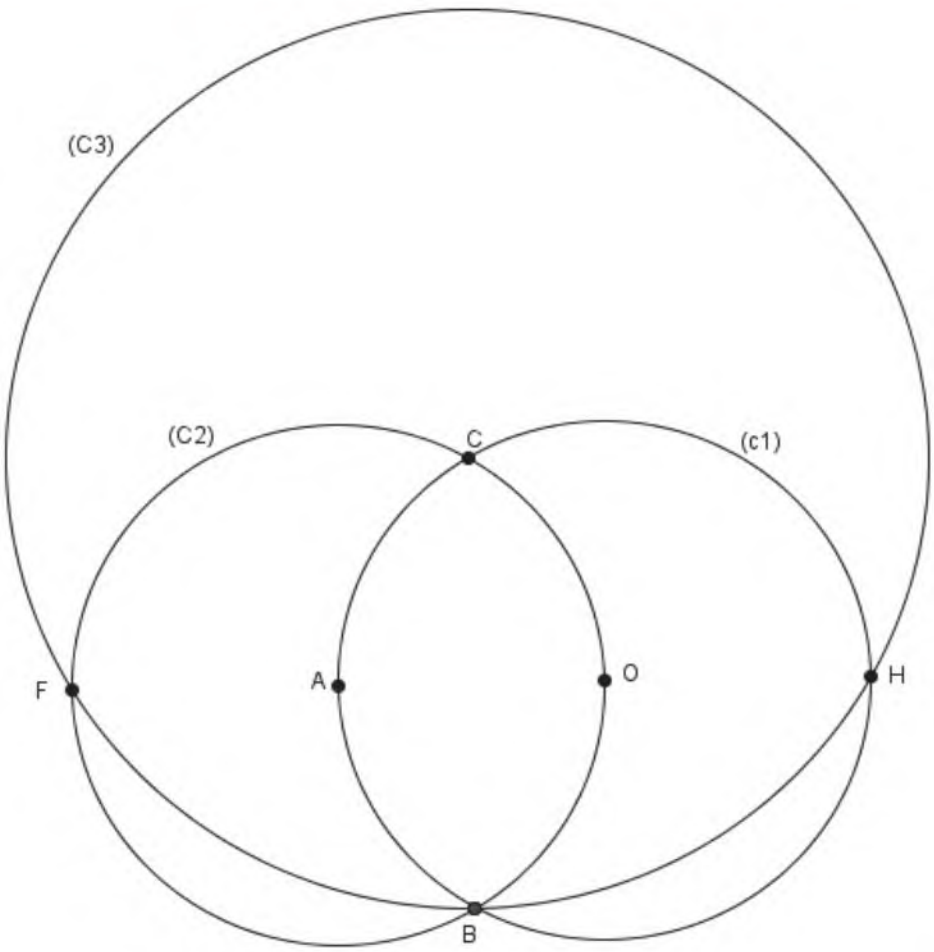
إذن : $y\sqrt{x-1} \leq \frac{xy}{2}$ (1) ($y>1$)

وبنفس الطريقة نبين أن : $x\sqrt{y-1} \leq \frac{xy}{2}$ (2)

نجمع طرفي المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف : $y\sqrt{x-1}+x\sqrt{y-1} \leq \frac{\cancel{2}xy}{\cancel{2}}$

وبالتالي : $y\sqrt{x-1}+x\sqrt{y-1} \leq xy$

تمرين 3



- نرسم الدائرة (C_1) التي مركزها O وشعاعها OA
- نرسم الدائرة (C_2) التي مركزها A وشعاعها OA
- الدائرتان (C_1) و (C_2) تتقاطعان في النقطتين C و B
- نرسم الدائرة (C_3) التي مركزها C وشعاعها CB
- الدائرة (C_3) تتقاطع مع (C_1) و (C_2) على التوالي في النقطيتين H و F

وبالتالي النقطة H هي مماثلة A بالنسبة للنقطة O

و النقطة F هي مماثلة O بالنسبة للنقطة A

تمرين 4

حساب S_{ADC} مساحة المثلث ADC :

لدينا : $\begin{cases} DG = DE \\ AD = EB \\ A\hat{D}G = D\hat{E}B \end{cases}$ إذن المثلثان DGA و DEB متقايسان

أي $D\hat{A}G = D\hat{B}E$

بما أن $\begin{cases} D\hat{A}G = D\hat{A}C = D\hat{B}E \\ A\hat{D}C = E\hat{D}B \end{cases}$ فإن المثلثان DAC و DEB متشابهان

ومنه $D\hat{C}A = D\hat{E}B = 90^\circ$ المثلث DAC قائم الزاوية في C إذن $(DC)\perp(AG)$

باستعمال العلاقات المترية في المثلث DGA القائم الزاوية :

$DA^2 = AC \times AG$ و $DC \times AG = DA \times DG$

أي : $DC = \dfrac{DA \times DG}{AG}$ و $AC = \dfrac{DA^2}{AG}$

لدينا $S_{ADC} = \dfrac{DC \times AC}{2}$ يعني : $S_{ADC} = \dfrac{\dfrac{DA \times DG}{AG} \times \dfrac{DA^2}{AG}}{2}$ يعني : $S_{ADC} = \dfrac{DA^3 \times DG}{2AG^2}$

بما أن المثلث ADG قائم الزاوية في D فإن $AG^2 = AD^2 + DG^2$

أي : $S_{ADC} = \dfrac{DA^3 \times DG}{2\left(AD^2 + DG^2\right)}$ أي : $S_{ADC} = \dfrac{4^3 \times 8}{2\left(4^2 + 8^2\right)}$ أي : $S_{ADC} = \dfrac{64 \times 4}{2(16+64)}$

يعني : $S_{ADC} = \dfrac{512}{160} = 3.2$

حساب S_{BCG} مساحة المثلث BCG :

لدينا : $S_{DAG} = S_{DAC} + S_{DCG}$ و $S_{DBG} = S_{BCG} + S_{DCG}$

نطرح المتساويتان طرف بطرف : $S_{DAG} - S_{DBG} = S_{DAC} + \cancel{S_{DCG}} - S_{BCG} - \cancel{S_{DCG}}$

أي : $S_{DAG} - S_{DBG} = S_{DAC} - S_{BCG}$ أي : $S_{BCG} = S_{DAC} + S_{DBG} - S_{DAG}$

أي : $S_{BCG} = 5 + \dfrac{DE \times DG}{2} - \dfrac{DA \times DG}{2}$ أي : $S_{BCG} = 5 + \dfrac{8 \times 8}{2} - \dfrac{4 \times 8}{2}$

أي : $S_{BCG} = 5 + 32 - 16$ إذن : $S_{BCG} = 21$

<u>حساب مساحة المنطقة المظللة :</u>

مساحة المنطقة المظللة = مساحة المثلث ADC + مساحة المثلث BCG

$S_{ADC} + S_{BCG} = 3.2 + 21 = 24.2$