

أولمبياد الخامس عشر

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعاً
بين أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{x+z}$

تمرين 2

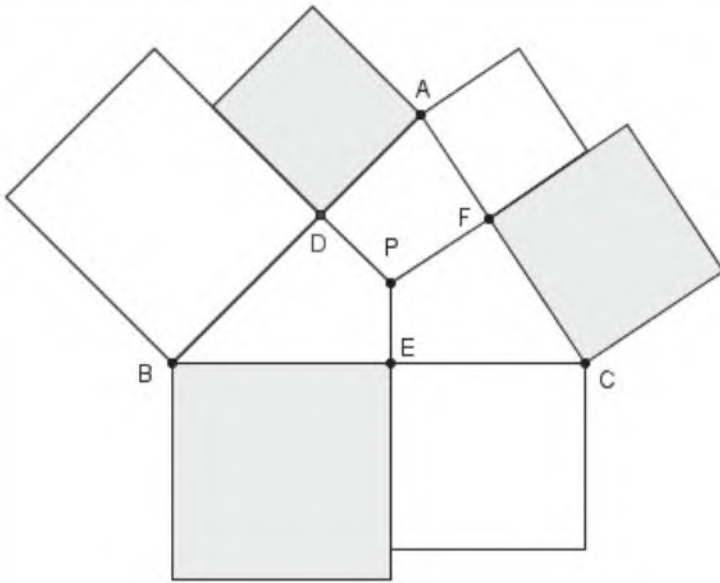
ABC مثلث

بين أن $S_{ABC} = \frac{r}{2} p$ (حيث S_{ABC} هي مساحة المثلث ABC و r هو شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث
 ABC و p هو محيط المثلث ABC)

تمرين 3

x و y و z أعداداً حقيقية موجبة بحيث : $2(z^2 - y^2) = 3x^2$
حدد أكبر هذه الأعداد

تمرين 4



ABC مثلث جميع زواياه حادة و النقطة P داخله .

النقط D و E و F هي المساط

العمودية للنقطة P على $[AB]$ و $[BC]$

و $[CA]$ على التوالي.

ننشئ 6 مربعات خارج المثلث ABC كما

هو مبين في الشكل جانبه

بين أن مجموع مساحات المربعات الرمادية يساوي مجموع مساحات المربعات البيضاء

حل أولمبياد الخامس عشر

تمرين 1

لدينا : $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \geq 0$

يعني : $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$

إذن : $(1) \quad x + y \geq 2\sqrt{xy}$

لدينا : $\left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y}}\right)^2 \geq 0$

يعني : $\frac{1}{x} - 2\sqrt{\frac{1}{xy}} + \frac{1}{y} \geq 0$

إذن : $(2) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$

نضرب المتفاوتتين 1 و 2 طرف بطرف : $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 2\sqrt{xy} \times 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$

يعني : $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 2 \times 2 \sqrt{xy} \times \frac{1}{\sqrt{xy}}$

يعني : $\frac{1}{x+y} \times (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4 \times \frac{1}{x+y}$

إذن : $(3) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

بنفس الطريقة نبين أن : $(4) \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{y+z}$

و $(5) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+z}$

نجمع المتفاوتات 3 و 4 و 5 طرف بطرف : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+y} + \frac{4}{y+z} + \frac{4}{x+z}$

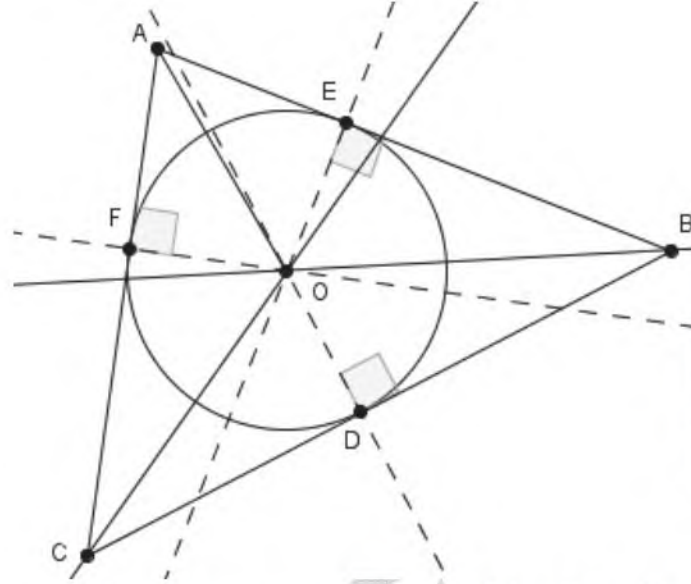
يعني : $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \geq \frac{2 \times 2}{x+y} + \frac{2 \times 2}{y+z} + \frac{2 \times 2}{x+z}$

يعني : $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 2\left(\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{x+z}\right)$

$$\frac{1}{z} \times z \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{1}{z} \times z \left(\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{x+z} \right) \text{ : يعني}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{x+z} \text{ : وبالتالي}$$

تمرين 2



لدينا النقطة O هي مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC و شعاعها r والنقط D و E و F هي المساقط العمودية للنقطة O على $[BC]$ و $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي
إذن : $OF = OE = OD = r$
لدينا :

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AOC} + S_{ABO} + S_{OBC} \\ &= \frac{AC \times OF}{2} + \frac{AB \times OE}{2} + \frac{BC \times OD}{2} \\ &= \frac{AC \times r}{2} + \frac{AB \times r}{2} + \frac{BC \times r}{2} \\ &= \frac{r}{2} (AC + AB + BC) \end{aligned}$$

نعلم أن محيط المثلث ABC هو : $p = AC + AB + BC$

$$\text{إذن : } S_{ABC} = \frac{r}{2} (AC + AB + BC) = \frac{r}{2} p$$

تمرين 3

$$\text{لدينا : } 2(z^2 - y^2) = 3x^2 \geq 0$$

$$\text{يعني : } z^2 - y^2 \geq 0 \text{ : يعني } z^2 \geq y^2$$

إذن : $z \geq y$ (1) (لأن $y \geq 0$ و $z \geq 0$)

$$\text{لدينا : } 2z^2 - 2y^2 = 2x^2 + x^2$$

$$\text{يعني : } 2z^2 - 2x^2 = 2(z^2 - x^2) = 2y^2 + x^2 \geq 0$$

$$\text{يعني : } z^2 - x^2 \geq 0 \text{ يعني : } z^2 \geq x^2$$

إذن : $z \geq x$ (2) (لأن $x \geq 0$ و $z \geq 0$)

من 1 و 2 نستنتج أن z هو أكبر هذه الأعداد

تمرين 4

- مساحات المربعات الرمادية هي : $AF^2 + CE^2 + BD^2$

- مساحات المربعات المخدشة هي : $FC^2 + BE^2 + DA^2$

$$\text{لنبين أن : } AF^2 + CE^2 + BD^2 = FC^2 + BE^2 + DA^2$$

نطبق مبرهنة فيثاغورس على المثلثات APD و PCF و PBE و PCE و PBD و PAF :

$$\begin{cases} PA^2 = AD^2 + PD^2 \\ PC^2 = CF^2 + PF^2 \\ PB^2 = BE^2 + PE^2 \\ PC^2 = EC^2 + PE^2 \\ PB^2 = DB^2 + PD^2 \\ PA^2 = FA^2 + PF^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} AD^2 = PA^2 - PD^2 \\ CF^2 = PC^2 - PF^2 \\ BE^2 = PB^2 - PE^2 \\ EC^2 = PC^2 - PE^2 \\ DB^2 = PB^2 - PD^2 \\ FA^2 = PA^2 - PF^2 \end{cases}$$

يعني :

إذن :

$$\begin{aligned} FA^2 + EC^2 + DB^2 &= PA^2 - PF^2 + PC^2 - PE^2 + PB^2 - PD^2 \\ &= PA^2 - PD^2 + PC^2 - PF^2 + PB^2 - PE^2 \\ &= AD^2 + CF^2 + BE^2 \end{aligned}$$