

أولمبياد الرابع عشر

تمرين 1

x و y عددين حقيقيين موجبين

$$\text{بين أن } \left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \leq \frac{x^3+y^3}{2}$$

تمرين 2

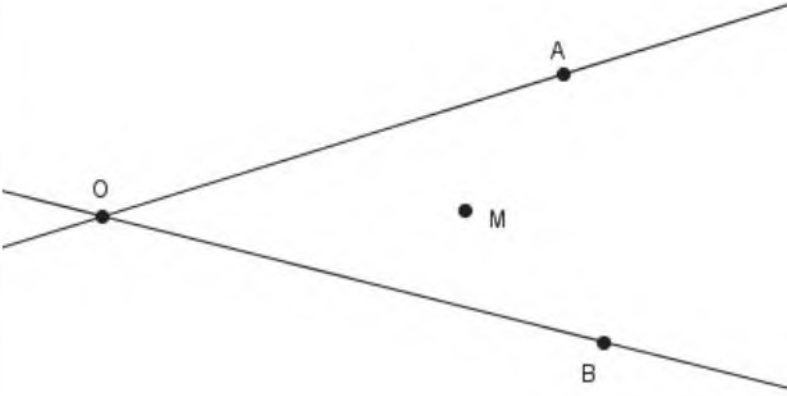
نعتبر الشكل جانبه :

حدد نقطتين O' و N من

المستقيمين (OA) و (OB) على

التوالي بحيث تكون النقطة M

منتصف $[NO']$



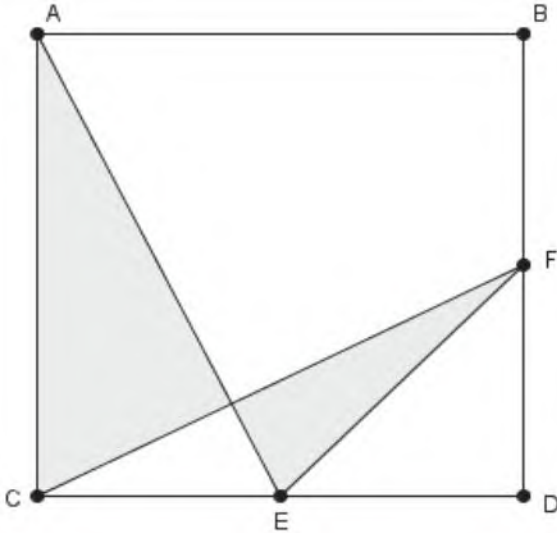
تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $xy + yz + zx = 0$

$$\text{بين أن : } \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} = -3$$

تمرين 4

احسب S مساحة المنطقة المظللة



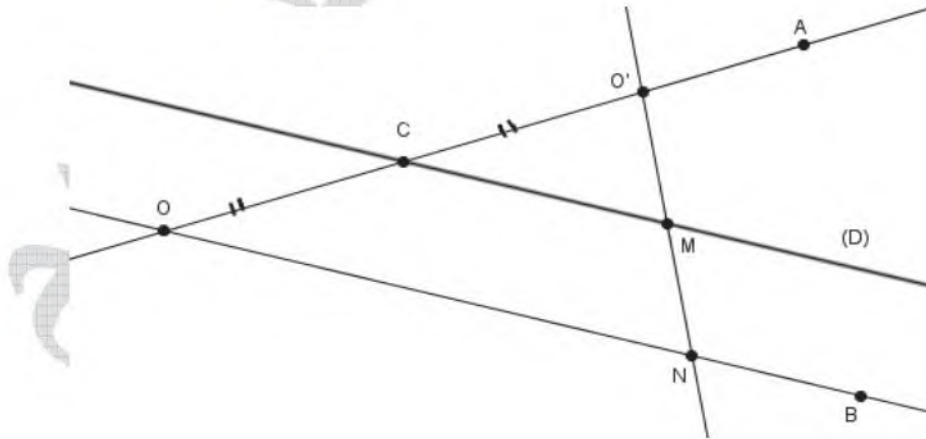
حل أولمبياد الرابع عشر

تمرين 1

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x+y}{2}\right)^3 - \frac{x^3+y^3}{2} &= \frac{(x+y)^3}{2^3} - \frac{x^3+y^3}{2} = \frac{(x+y)^2(x+y)}{2^3} - \frac{4(x^3+y^3)}{4 \times 2} \\
 &= \frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{8} - \frac{4x^3+4y^3}{8} \\
 &= \frac{-3x^3+3x^2y+3xy^2-3y^3}{8} \\
 &= \frac{-3(x^3-x^2y-xy^2+y^3)}{8} \\
 &= \frac{-3(x^2(x-y)-y^2(x-y))}{8} \\
 &= \frac{-3(x-y)(x^2-y^2)}{8} \\
 &= \frac{-3(x-y)(x-y)(x+y)}{8} \\
 &= \frac{-3(x-y)^2(x+y)}{8} \leq 0
 \end{aligned}$$

(لأن $x+y \geq 0$ و $(x-y)^2 \geq 0$)

تمرين 2



المرحلة الأولى :

ننشئ المستقيم (D) الموازي للمستقيم (OB) ويقطع المستقيم (OA) في النقطة C

المرحلة الثانية :

ننشئ النقطة O' مائلة النقطة O بالنسبة للنقطة C
المرحلة الثالثة :

ننشئ النقطة N تقاطع المستقيمين $(O'M)$ و (OB)
لدينا في المثلث $O'ON$ المستقيم المستقيم (D) يمر من C منتصف القطعة $[OO']$ و يوازي (ON)
ويقطع $[NO']$ في النقطة M
إذن النقطة M هي منتصف القطعة $[NO']$

تمرين 3

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} &= \frac{xy(x+y) + yz(y+z) + xz(z+x)}{xyz} \\ &= \frac{xy(x+y) + xyz - xyz + yz(y+z) + xyz - xyz + xz(z+x) + xyz - xyz}{xyz} \\ &= \frac{xy(x+y+z) - xyz + yz(y+z+x) - xyz + xz(z+x+y) - xyz}{xyz} \\ &= \frac{xy \times 0 - xyz + yz \times 0 - xyz + xz \times 0 - xyz}{xyz} \\ &= \frac{-xyz - xyz - xyz}{xyz} \\ &= \frac{-3xyz}{xyz} \\ &= -3 \end{aligned}$$

تمرين 4

لدينا المثلث ACE قائم الزاوية في C
حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AE^2 = AC^2 + CE^2$

$$\text{ومنه : } AE^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

$$\text{أي : } AE = \sqrt{5}$$

$$\begin{cases} AC = DC \\ CE = DF \\ \hat{ACE} = \hat{FDC} \end{cases} \text{ و لدينا :}$$

إذن المثلثان ACE و FDC متقايسان

ومنه : $AE = CF = \sqrt{5}$ و $C\hat{A}E = F\hat{C}D$

لدينا : $H\hat{C}E + H\hat{E}C = C\hat{A}E + H\hat{E}C = 180^\circ - A\hat{C}E = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

إذن : $C\hat{H}E = 180^\circ - (H\hat{C}E + H\hat{E}C) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

ومنه المثلثان AHC و FHE قائما الزاوية في H

أي : $S = \frac{AH \times CH}{2} + \frac{EH \times FH}{2}$ (مساحة المنطقة المضللة)

حساب AH و CH و EH و FH :

لدينا : $\sin C\hat{A}E = \frac{CE}{AE} = \frac{CH}{AC}$

و $\cos C\hat{A}E = \frac{CA}{AE} = \frac{AH}{AC}$

و $\sin F\hat{C}D = \frac{FD}{FC} = \frac{EH}{EC}$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{CH}{2}$

و $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{AH}{2}$

و $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{EH}{1}$

إذن : $CH = \frac{2}{\sqrt{5}}$

و $AH = \frac{4}{\sqrt{5}}$

و $EH = \frac{1}{\sqrt{5}}$

لدينا : $FH = FC - CH = \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} S &= \frac{\frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} + \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{5}}}{2} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{3}{10} \\ &= \frac{11}{10} \end{aligned}$$