

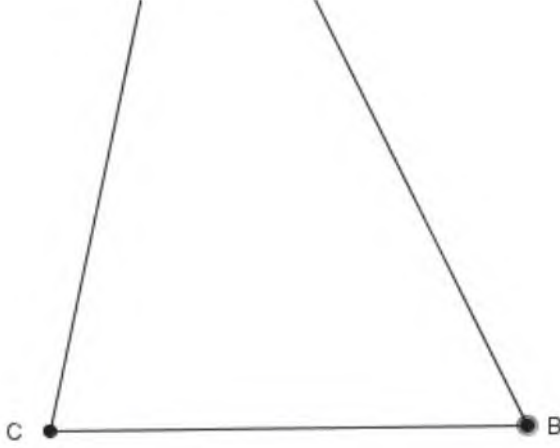
أولمبياد الثالث عشر

تمرين 1

x و y عدنان حقيقيان مختلفان ($x \neq y$) و موجبان قطعاً بحيث : $x+2y=3\sqrt{xy}$

احسب $\frac{x}{y}$

تمرين 2



أراد محمد أن يرسم مثلثاً ABC لكن لاحظ أن الرأس A يوجد خارج الورقة كما هو مبين في الشكل جانبه ساعد محمد على رسم المتوسط الموافق للضلع $[BC]$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعاً

$$1 - \text{بين أن } \frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$$

$$2 - \text{أستنتج أن } \frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{zy}{z+y} \leq \frac{x+y+z}{2}$$

تمرين 4

EFG مثلث قائم الزاوية في F

بين أن : $EF + FG \leq \sqrt{2}EG$

حل أولمبياد الثالث عشر

تمرين 1

لدينا : $x + 2y = 3\sqrt{xy}$

يعني : $\frac{x+2y}{y} = \frac{3\sqrt{xy}}{y}$

يعني : $\frac{x}{y} + 2 = 3\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y^2}}$

يعني : $\frac{x}{y} + 2 = 3\sqrt{\frac{xy}{y^2}}$

يعني : $\frac{x}{y} + 2 = 3\sqrt{\frac{x}{y}}$

يعني : $\frac{x}{y} - 3\sqrt{\frac{x}{y}} + 2 = 0$

يعني : $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{x}{y}} + 2 = 0$

يعني : $\sqrt{\frac{x}{y}}\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 2\right) - \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 2\right) = 0$

يعني : $\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 2\right)\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - 1\right) = 0$

يعني : $\sqrt{\frac{x}{y}} - 1 = 0$ أو $\sqrt{\frac{x}{y}} - 2 = 0$

يعني : $\sqrt{\frac{x}{y}} = 1$ أو $\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$

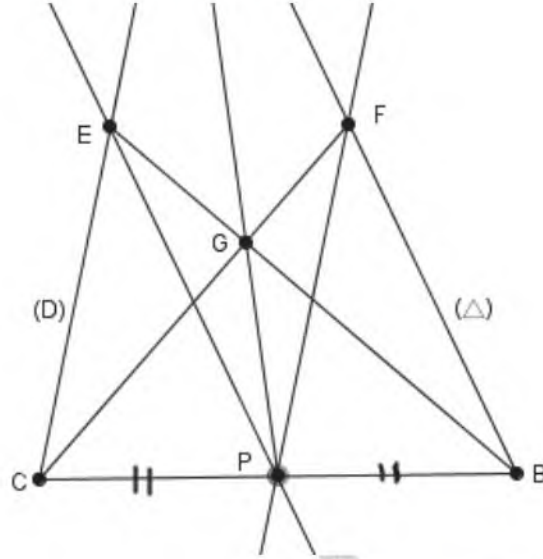
يعني : $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 = 1^2$ أو $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 = 2^2$

يعني : $\frac{x}{y} = 1$ أو $\frac{x}{y} = 4$

ونعلم أن x و y عدنان حقيقيان مختلفان إذن $\frac{x}{y} \neq 1$

وبالتالي : $\frac{x}{y} = 4$

تمرين 2



- ننشئ النقطة P منتصف $[BC]$
- ننشئ المستقيم المار من P والموازي للمستقيم (Δ) ويقطع المستقيم (D) في النقطة E
- ننشئ المستقيم المار من P والموازي للمستقيم (D) ويقطع المستقيم (Δ) في النقطة F
- لدينا في المثلث ABC المستقيم (PE) يمر من P منتصف القطعة $[BC]$ ويوازي $(\Delta) = (AC)$ ويقطع $(AC) = (D)$ في النقطة E
- إذن النقطة E هي منتصف القطعة $[AC]$
- ومنه المستقيم (BE) هو متوسط المثلث ABC (1)
- لدينا في المثلث ABC المستقيم (PF) يمر من P منتصف القطعة $[BC]$ ويوازي $(\Delta) = (AC)$ ويقطع $(AB) = (\Delta)$ في النقطة F
- إذن النقطة F هي منتصف القطعة $[AB]$
- ومنه المستقيم (CF) هو متوسط المثلث ABC (2)

من 1 و 2 نستنتج أن النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC وبالتالي المستقيم (PG) هو المتوسط الموافق للضلع $[BC]$ المار من النقطة A

تمرين 3

1- لدينا :

$$\frac{xy}{x+y} - \frac{x+y}{4} = \frac{4xy - (x+y)^2}{4(x+y)} = \frac{4xy - x^2 - 2xy - y^2}{4(x+y)} = \frac{2xy - x^2 - y^2}{4(x+y)} = \frac{-(x-y)^2}{4(x+y)} \geq 0$$

$$\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4} \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{zy}{z+y} \leq \frac{x+y}{4} + \frac{x+z}{4} + \frac{z+y}{4} \quad \text{يكافئ :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4} \\ \frac{zy}{z+y} \leq \frac{z+y}{4} \\ \frac{xz}{x+z} \leq \frac{x+z}{4} \end{array} \right. \quad \text{-2 حسب السؤال 1 لدينا :}$$

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{zy}{z+y} \leq \frac{2(x+y+z)}{4} \quad \text{يكافئ :}$$

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{zy}{z+y} \leq \frac{2x+2y+2z}{4}$$

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{zy}{z+y} \leq \frac{x+y+z}{2} \quad \text{إذن :}$$

تمرين 4

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في F

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $EG^2 = EF^2 + FG^2$

لنحدد إشارة الفرق $(EF + FG)^2 - (\sqrt{2}EG)^2$:

$$\begin{aligned} (EF + FG)^2 - (\sqrt{2}EG)^2 &= EF^2 + FG^2 + 2EF \times FG - 2EG^2 \\ &= EF^2 + FG^2 + 2EF \times FG - 2EG^2 \\ &= EF^2 + FG^2 + 2EF \times FG - 2(EF^2 + FG^2) \\ &= EF^2 + FG^2 + 2EF \times FG - 2EF^2 - 2FG^2 \\ &= 2EF \times FG - EF^2 - FG^2 \\ &= -(EF^2 - 2EF \times FG + FG^2) \\ &= -(EF - FG)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$(EF + FG)^2 \leq (\sqrt{2}EG)^2 \quad \text{إذن :}$$

$$EF + FG \leq \sqrt{2}EG \quad \text{ومنه :}$$