أولمبياد الثاني عشر

<u>تمرين 1</u>

x و y و z أعدادا حقيقية غير منعدمة بحيث : $xz+yz+xy=0$

بين أن : $\frac{x+y}{xy}+\frac{y+z}{yz}+\frac{z+x}{xc}=0$

<u>تمرين 2</u>

ABC مثلث بحيث : $AB^4-AC^4=BC^2\left(AB^2-AC^2\right)$ و $AB\neq AC$

بين أن المثلث ABC قائم الزاوية

<u>تمرين 3</u>

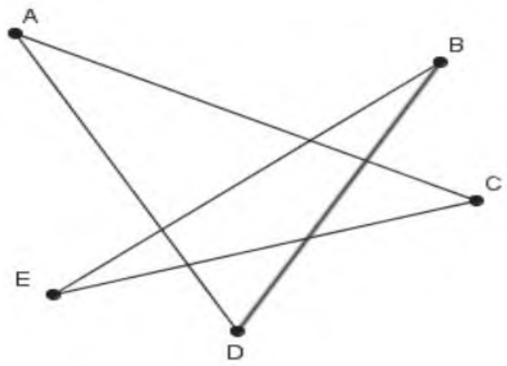
x و y و z أعدادا حقيقية موجبة غير منعدمة بحيث : $x<y+z$

بين أن : $\frac{x}{1+x}<\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}$

<u>تمرين 4</u>

نعتبر الشكل جانبه

بين أن $\hat{A}+\hat{D}+\hat{B}+\hat{E}+\hat{C}=180^{\circ}$



حل أولمبياد الثاني عشر

تمرين 1

لدينا :

$$\frac{x+y}{xy}+\frac{y+z}{yz}+\frac{z+x}{xc}=\frac{z}{z}\times\frac{x+y}{xy}+\frac{x}{x}\times\frac{y+z}{yz}+\frac{y}{y}\times\frac{z+x}{xz}$$

$$=\frac{xz+yz}{xyz}+\frac{xy+xz}{xyz}+\frac{yz+xy}{xyz}$$

$$=\frac{xz+yz+xy+xz+yz+xy}{xyz}$$

$$=\frac{2xz+2yz+2xy}{xyz}$$

$$=\frac{2(xz+yz+xy}{xyz}$$

$$=\frac{2\times 0}{xyz}=0$$

إذن : $\boxed{\frac{x+y}{xy}+\frac{y+z}{yz}+\frac{z+x}{xc}=0}$

تمرين 2

لدينا : $AB^4-AC^4=BC^2\left(AB^2-AC^2\right)$

يعني : $AB^4-AC^4=BC^2\times AB^2-BC^2\times AC^2$

يعني : $AB^4-AC^4-BC^2\times AB^2+BC^2\times AC^2=0$

يعني : $\left(AB^2-AC^2\right)\left(AB^2+AC^2\right)-BC^2\left(AB^2-AC^2\right)=0$

يعني : $\left(AB^2-AC^2\right)\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)=0$

يعني : $AB^2-AC^2=0$ أو $AB^2+AC^2-BC^2=0$

يعني : $AB^2=AC^2$ أو $AB^2+AC^2=BC^2$

يعني : $AB=AC$ أو $AB^2+AC^2=BC^2$

ونعلم أن $AB\neq AC$ إذن $AB^2+AC^2=BC^2$

حسب مبرهنة فيتاقورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A

تمرين 3

$$\frac{x}{1+x}-\left(\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\right)=\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}-\frac{z}{1+z}$$
$$=\frac{x(1+y)(1+z)-y(1+x)(1+z)-z(1+x)(1+y)}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$
$$=\frac{x+\cancel{xz}+\cancel{xy}+\cancel{xyz}-y-yz-\cancel{xy}-\cancel{xyz}-z-yz-\cancel{xz}-xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$
$$=\frac{x-y-z-2yz-xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

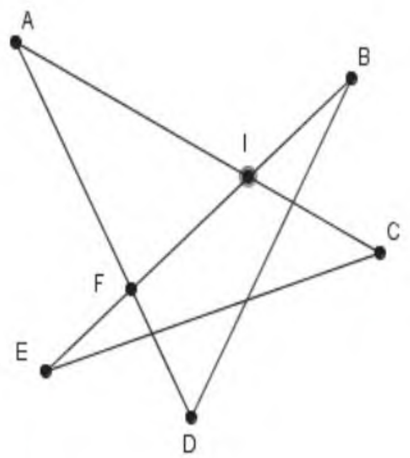
لدينا : $x>0$ و $y>0$ و $z>0$ و $x<y+z$

إذن $(1+x)(1+y)(1+z)>0$ و $-2yz-xyz<0$ و $x-y-z<0$

ومنه : $\frac{x-y-z-2yz-xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}<0$

وبالتالي : $\frac{x}{1+x}<\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}$

تمرين 4



نضع النقطة F تقاطع المستقيمين (AD) و (EB)

و نضع النقطة I تقاطع المستقيمين (AC) و (EB)

لدينا : $A\hat{F}I+B\hat{F}D=180$ و $A\hat{I}F+C\hat{I}E=180$

إذن : $B\hat{F}D=180-A\hat{F}I$ و $C\hat{I}E=180-A\hat{I}F$

في المثلث DFB لدينا : $B\hat{F}D+\hat{D}+\hat{B}=180$

يعني : $180-A\hat{F}I+\hat{D}+\hat{B}=180$ $\quad(B\hat{F}D=180-A\hat{F}I)$

إدن : $A\hat{F}I=\hat{D}+\hat{B}$ $\quad(1)$

في المثلث CEI لدينا : $C\hat{I}E+\hat{E}+\hat{C}=180$

يعني : $180-A\hat{I}F+\hat{E}+\hat{C}=180$ $\quad(C\hat{I}E=180-A\hat{I}F)$

إدن : $A\hat{I}F=\hat{E}+\hat{C}$ $\quad(2)$

في المثلث AFI لدينا : $\hat{A}+A\hat{F}I+A\hat{I}F=180^\circ$ $\quad(3)$

من 1 و 2 و 3 نستنتج أن : $\hat{A}+\hat{D}+\hat{B}+\hat{E}+\hat{C}=180^\circ$