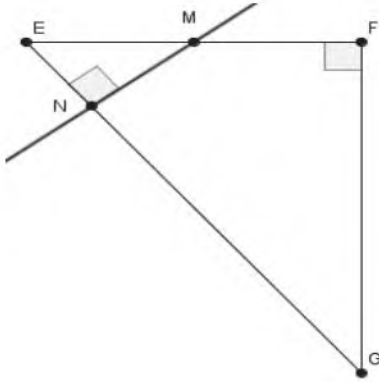


## أولمبياد التاسع

تمرين 1

$x$  و  $y$  عددين حقيقيين بحيث :  $x > 1$  و  $y > 1$   
بين أن :  $\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8$



تمرين 2

$EFG$  مثلث قائم الزاوية في  $F$  بحيث :  $EF < FG$   
النقطة  $M$  منتصف  $[EF]$   
النقطة  $N$  هي المسقط العمودي للنقطة  
 $M$  على  $(EG)$   
بين أن :  $GN^2 - EN^2 = FG^2$

تمرين 3

$m$  عدد حقيقي موجب قطعاً قطعاً  
-1 بين أن  $m + \frac{1}{m} \geq 2$   
-2  $x$  و  $y$  و  $z$  و  $t$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً  
بين أن :  $(x+y+z+t) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq 16$

تمرين 4

$ABCD$  متوازي الأضلاع و  $M$  و  $N$  منتصفا  $[BC]$  و  $[AD]$  على التوالي  
في المثلث  $AMD$  الإرتفاع المار من  $D$  يقطع  $(AM)$  في  $E$   
بين أن :  $CE = CD$

## حل أولمبياد التاسع

تمرين 1

لدينا :  $x > 1$  و  $y > 1$

يعني :  $x-1 > 0$  و  $y-1 > 0$

نضع :  $a = x-1$  و  $b = y-1$

يعني :  $x = a+1$  و  $y = b+1$

إذن :  $x^2 = (a+1)^2$  و  $y^2 = (b+1)^2$

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} &= \frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} \\ &= \frac{a^2 + 2a + 1}{b} + \frac{b^2 + 2b + 1}{a} \\ &= \frac{a^2 + 1}{b} + \frac{b^2 + 1}{a} + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

لدينا :  $(a+b)^2 \geq 0$

يعني :  $a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$  يعني  $a^2 + b^2 \geq 2ab$

يعني :  $\frac{1}{ab} \times (a^2 + b^2) \geq \frac{1}{ab} \times 2ab$  يعني  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

إذن :  $2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 4$  ( 1 )

لدينا :  $(a-1)^2 \geq 0$

يعني :  $a^2 - 2a + 1 \geq 0$  يعني  $a^2 + 1 \geq 2a$  يعني  $\frac{1}{b} \times (a^2 + 1) \geq \frac{1}{b} \times 2a$

إذن :  $\frac{a^2 + 1}{b} \geq \frac{2a}{b}$  ( 2 )

بنفس الطريقة نبين أن :  $\frac{b^2 + 1}{a} \geq \frac{2b}{a}$  ( 3 )

نجمع المتفاوتتين 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}$$

$$\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \text{ : أي}$$

$$(4) \quad \frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \text{ : ومنه}$$

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} = \frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 4+4 \text{ : نستنتج أن}$$

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8 \text{ : وبالتالي}$$

### تمرين 2

لدينا المثلثان  $MEN$  و  $MNG$  قائما الزاوية

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $ME^2 = MN^2 + EN^2$  و  $MG^2 = MN^2 + GN^2$

ومنه :  $EN^2 = ME^2 - MN^2$  و  $GN^2 = MG^2 - MN^2$

ومنه :  $GN^2 - EN^2 = MG^2 - MN^2 - (ME^2 - MN^2)$

ومنه :  $GN^2 - EN^2 = MG^2 - ME^2$

ومنه :  $GN^2 - EN^2 = MG^2 - MF^2$  (1)

(  $ME = MF$  لأن النقطة  $M$  منتصف  $[EF]$  )

لدينا المثلثان  $MGF$  قائم الزاوية

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :  $MG^2 = MF^2 + FG^2$

ومنه :  $FG^2 = MG^2 - MF^2$  (2)

من 1 و 2 نستنتج أن :  $GN^2 - EN^2 = FG^2$

### تمرين 3

$$-1 \text{ لدينا : } m + \frac{1}{m} - 2 = \frac{m^2+1}{m} - 2 = \frac{m^2+1-2m}{m} = \frac{(m-1)^2}{m} \geq 0 \text{ : إذن } m + \frac{1}{m} \geq 2$$

-2 لدينا :

$$(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{x}{t} + \frac{y}{x} + 1 + \frac{y}{z} + \frac{y}{t} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1 + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} + \frac{t}{y} + \frac{t}{z} + 1$$

$$= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{x}{t} + \frac{t}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{y}{t} + \frac{t}{y}\right) + \left(\frac{z}{t} + \frac{t}{z}\right) + 4$$



حسب السؤال 1 لدينا :  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$  و  $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$  و  $\frac{x}{t} + \frac{t}{x} \geq 2$  و  $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$  و  $\frac{y}{t} + \frac{t}{y} \geq 2$  و  $\frac{z}{t} + \frac{t}{z} \geq 2$

إذن :

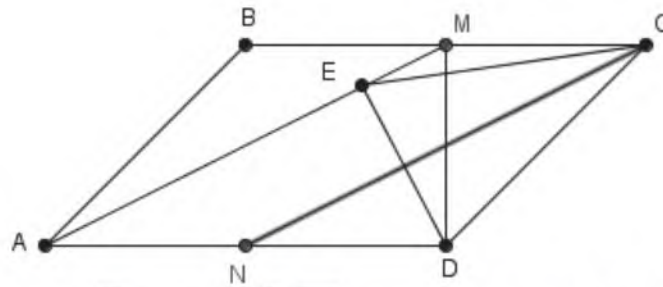
$$(x+y+z+t) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) = 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{x}{t} + \frac{y}{x} + 1 + \frac{y}{z} + \frac{y}{t} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1 + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} + \frac{t}{y} + \frac{t}{z} + 1$$

$$= \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left( \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left( \frac{x}{t} + \frac{t}{x} \right) + \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left( \frac{y}{t} + \frac{t}{y} \right) + \left( \frac{z}{t} + \frac{t}{z} \right) + 4$$

$$\geq 2+2+2+2+2+2+4$$

وبالتالي :  $(x+y+z+t) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq 16$

تمرين 4



لدينا ABCD متوازي الأضلاع و M و N منتصفا [BC] و [AD] على التوالي

إذن :  $(MC) \parallel (AN)$  و  $MC = AN$

ومنه : الرباعي ANCM متوازي الأضلاع

ومنه :  $(AM) \parallel (NC)$

ومنه :  $(CN) \perp (DE)$  ( 1 ) لأن  $(AM) \perp (DE)$

في المثلث ADE لدينا N منتصف [AD] و  $(CN) \parallel (AE)$

إذن (CN) يمر من منتصف (DE) ( 2 )

من 1 و 2 نستنتج أن (CN) هو واسط القطعة [DE]

وبالتالي :  $CE = CD$