أولمبياد السابع

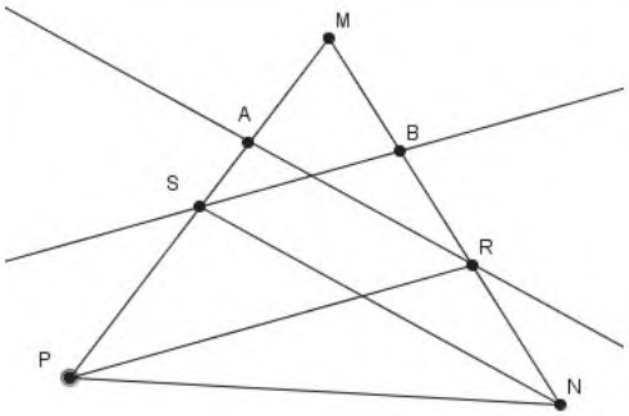
تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

1- بين أن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$

2- استنتج أن : $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}\geq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$

تمرين 2



في الشكل جانبه لدينا : $S\in[PM]$ و $R\in[NM]$

و $(AR)//(NS)$ و $(PR)//(BS)$

بين أن : $\frac{MA}{MP}=\frac{MB}{MN}$

تمرين 3

ABC مثلث قائم الزاوية في C

بين أن : $BC^K > AB^k + AC^K$ $\quad (K>2)$

تمرين 4

x و y و z و x' و y' و z' أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=m$

بين أن : $\sqrt{xx'}+\sqrt{yy'}+\sqrt{zz'}=\sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')}$

حل أولمبياد السابع

تمرين 1

1- لدينا : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}=\frac{y+x}{xy}-\frac{4}{x+y}=\frac{(x+y)^2-4xy}{xy(x+y)}=\frac{x^2-2xy+y^2}{xy(x+y)}=\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}\geq 0$

(لأن : $(x-y)^2\geq 0$ و لدينا $x>0$ و $y>0$ يعني $xy(x+y)\geq 0$)

إذن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$

2- حسب السؤال السابق لدينا : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{4}{y+z}$ (2)

و $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\geq\frac{4}{x+z}$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\geq\frac{4}{x+y}+\frac{4}{y+z}+\frac{4}{x+z}$

أي : $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\geq 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}\right)$

أي : $\frac{1}{4}\times 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{1}{4}\times 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}\right)$

أي : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}$

وبالتالي : $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}\geq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$

تمرين 2

في المثلث MSN لدينا : $(AR)//(NS)$

حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : $\frac{MA}{MS}=\frac{MR}{MN}=\frac{AR}{SN}$ ومنه $\frac{MA}{MS}=\frac{MR}{MN}$

أي $MS\times MR=MA\times MN$ (1)

في المثلث MRP لدينا : $(PR)//(BS)$

حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : $\frac{MB}{MR}=\frac{MS}{MP}=\frac{BS}{PR}$ ومنه $\frac{MB}{MR}=\frac{MS}{MP}$

أي $MS\times MR=MB\times MP$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $MA\times MN=MB\times MP$

وبالتالي : $\frac{MA}{MP}=\frac{MB}{MN}$

تمرين 3

لدينا : ABC مثلث قائم الزاوية في C

إذن : $BC^2=AB^2+AC^2$

نضرب طرفي المتساوية في BC^{K-2} فنحصل على : $BC^2\times BC^{K-2}=AB^2\times BC^{K-2}+AC^2\times BC^{K-2}$

يعني : $BC^K=AB^2\times BC^{K-2}+AC^2\times BC^{K-2}$ (1)

لدينا : $BC>AB$ و $BC>AC$ يعني : $BC^{K-2}>AB^{K-2}$ و $BC^{K-2}>AC^{K-2}$

يعني : $BC^{K-2}\times AB^2>AB^{K-2}\times AB^2$ و $BC^{K-2}\times AC^2>AC^{K-2}\times AC^2$

إذن : $BC^{K-2}\times AB^2>AB^k$ و $BC^{K-2}\times AC^2>AC^K$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $BC^K>AB^k+AC^K$

تمرين 4

لدينا : $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=m$

إذن : $x=mx'$ و $y=my'$ و $z=mz'$

لدينا:

$$\begin{aligned}\sqrt{xx'}+\sqrt{yy'}+\sqrt{zz'}&=\sqrt{mx'x'}+\sqrt{my'y'}+\sqrt{mz'z'}\\&=\sqrt{mx'^2}+\sqrt{my'^2}+\sqrt{mz'^2}\\&=x'\sqrt{m}+y'\sqrt{m}+z'\sqrt{m}\\&=\sqrt{m}\left(x'+y'+z'\right)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')}&=\sqrt{(mx'+my'+mz')(x'+y'+z')}\\&=\sqrt{m(x'+y'+z')(x'+y'+z')}\\&=\sqrt{m}\left(x'+y'+z'\right)\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\sqrt{xx'}+\sqrt{yy'}+\sqrt{zz'}=\sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')}}$