أولمبياد الرابع

تمرين 1

x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا

بين أن $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}\leq\frac{1}{xy}$

تمرين 2

ABC مثلث والنقط D و E و F هي على التوالي

منتصفات القطع $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$

بين أن : $\frac{AB+AC+BC}{2}<AD+CE+BF<AB+AC+BC$

تمرين 3

EFG مثلث قائم الزاوية في E

بين أن : $EF^4+EG^4<FG^4$

تمرين 4

بين ان : $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times...\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}<\frac{1}{\sqrt{2016}}$

حل أولمبياد الرابع

تمرين 1

لدينا : $(x^2+y)^2 \geq 0$

أي : $x^4-2x^2y+y^2 \geq 0$ أي : $x^4+y^2 \geq 2x^2y$ أي : $\frac{1}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2x^2y}$ أي : $\frac{x}{x^4+y^2} \leq \frac{x}{2x^2y}$

إذن : $\frac{x}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2xy}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{2yx}$ (2)

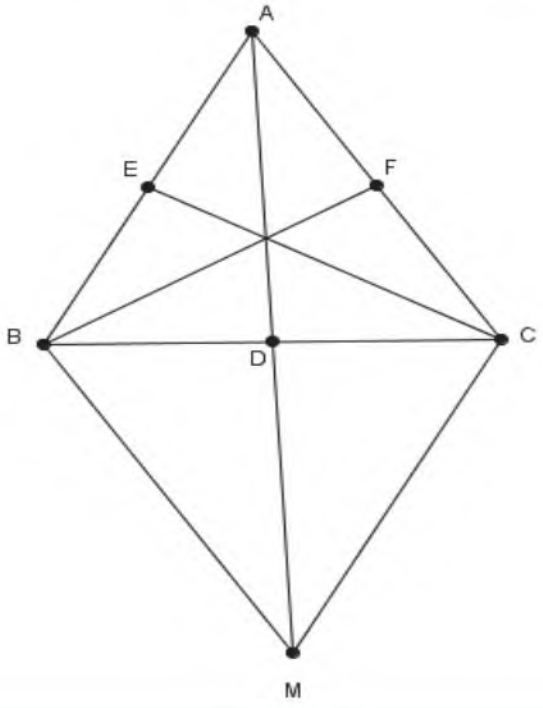
نجمع المتفاوتات 1 و 2 طرف بطرف : $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{2xy}+\frac{1}{2yx}$

ومنه : $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{\not{2}}{\not{2}xy}$

وبالتالي : $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy}$

تمرين 2

لتكن M مماثلة A بالنسبة للنقطة D



لدينا D منتصف $[BC]$

إذن C هي مماثلة B بالنسبة للنقطة D

بما أن C و M هما مماثلتي A و B على التوالي بالنسبة للنقطة D

فإن : $AB=CM$ (1)

في المثلث ACM لدينا : $AM<AC+CM$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $AM<AC+AB$

نعلم أن $AM=2AD$ (لأن M مماثلة A بالنسبة للنقطة D يعني D منتصف $[AM]$)

أي $2AD<AC+AB$ (3)

في المثلثان ADC و ADB لدينا : $AC<AD+DC$ (4)

و $AB<AD+DB$ (5)

نجمع المتفاوتتين 4 و 5 طرف بطرف : $AC+AB<AD+DC+AD+DB$

نعلم أن : $BC=BD+DC$

أي : $AC+AB<2AD+BC$

إذن : $AC+AB-BC<2AD$ (6)

من 3 و 6 نستمنج أن : $AC+AB-BC<2AD<AC+AB$ (7)

بنفس الطريقة نبين أن : $AC+BC-AB<2CE<AC+BC$ (8)

و $AB+BC-AC<2BF<AB+BC$ (9)

نجمع المتفاوتات 7 و 8 و 9 طرف بطرف :

$$AC+AB-BC+AC+BC-AB+AB+BC-AC<2AD+2CE+2BF<AC+AB+AC+BC+AB+BC$$

أي :

$$AC+\cancel{AB}-\cancel{BC}+\cancel{AC}+\cancel{BC}-\cancel{AB}+AB+BC-\cancel{AC}<2(AD+CE+BF)<2AC+2AB+2BC$$

أي : $\frac{1}{2}\times(AB+AC+BC)<\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}(AD+CE+BF)<\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}(AC+AB+BC)$

وبالتالي : $\frac{AB+AC+BC}{2}<AD+CE+BF<AB+AC+BC$

تمرين 3

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E

إذن : $EF^2+EG^2=FG^2$

لنحدد إشارة الفرق $\left(EF^4+EG^4\right)-FG^4$:

$$FG^4-EF^4-EG^4=\left(FG^2\right)^2-EF^4-EG^4=\left(EF^2+EG^2\right)^2-EF^4-EG^4$$
$$=\left(EF^2\right)^2+2EF^2\times EG^2+\left(EG^2\right)^2-EF^4-EG^4$$
$$=\cancel{EF^4}+2EF^2\times EG^2+\cancel{EG^4}-\cancel{EF^4}-\cancel{EG^4}$$
$$=2EF^2\times EG^2>0$$

وبالتالي : $EF^4+EG^4<FG^4$

تمرين 4

نضع : $X=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}$ و $Y=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2013}{2014}\times\frac{2015}{2016}$

لدينا :

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$$
$$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$$
$$\vdots$$
$$\frac{2012}{2013}<\frac{2013}{2014}$$
$$\frac{2014}{2015}<\frac{2015}{2016}$$

يعني : $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2013}{2014}\times\frac{2015}{2016}$

يعني : $X<Y$

يعني : $X^2<XY$

يعني : $\sqrt{X^2}=X<\sqrt{XY}$

لنحسب $\sqrt{XY}$:

لدينا : $XY=\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\times\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}}\times\ldots\times\frac{\cancel{2012}}{\cancel{2013}}\times\frac{\cancel{2013}}{\cancel{2014}}\times\frac{\cancel{2014}}{\cancel{2015}}\times\frac{\cancel{2015}}{2016}=\frac{1}{2016}$

إذن : $\sqrt{XY}=\sqrt{\frac{1}{2016}}=\frac{1}{\sqrt{2016}}$

وبالتالي : $X=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}<\sqrt{XY}=\frac{1}{\sqrt{2016}}$