أولمبياد الثالث

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x} \geq x+y+z$

تمرين 2

AHB مثلث بحيث : $A\hat{B}H = 120^\circ$

و $[BC)$ هو منصف الزاوية $A\hat{B}H$ $\left(C \in [HA] \right)$

المستقيم المار من H والموازي للمستقيم (CB) يقطع المستقيم (AB) في النقطة D .

بين أن : $\frac{1}{} = \frac{1}{} + \quad 1$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2$

بين أن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

تمرين 4

ABC مثلث و النقطة D منتصف $[BC]$

و (AE) الإرتفاع الموافق للضلع $[BC]$ $\left(E \in (BC) \right)$

و النقطتان F و G هما المسقطان العموديان على التوالي للنقطتين B و C على (AD)

بين أن $CG = BF$

حل أولمبياد الثالث

تمرين 1

لتكن a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث: $a=xy$ و $b=yz$ و $c=xz$

لدينا : $(a-b)^2 \geq 0$ و $(b-c)^2$ و $(c-a)^2 \geq 0$

أي : $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ أي : $a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2 \geq 0$

أي : $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac \geq 0$ أي : $2\left(a^2+a^2+a^2\right) \geq 2(ab+bc+ac)$

أي : $\dfrac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq \dfrac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2(ab+bc+ac)$

أي : $\dfrac{a^2}{\sqrt{abc}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{abc}}+\dfrac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \dfrac{ab}{\sqrt{abc}}+\dfrac{bc}{\sqrt{abc}}+\dfrac{ac}{\sqrt{abc}}$

أي : $\dfrac{a^2}{\sqrt{abc}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{abc}}+\dfrac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \dfrac{\sqrt{a^2b^2}}{\sqrt{abc}}+\dfrac{\sqrt{b^2c^2}}{\sqrt{abc}}+\dfrac{\sqrt{a^2c^2}}{\sqrt{abc}}$

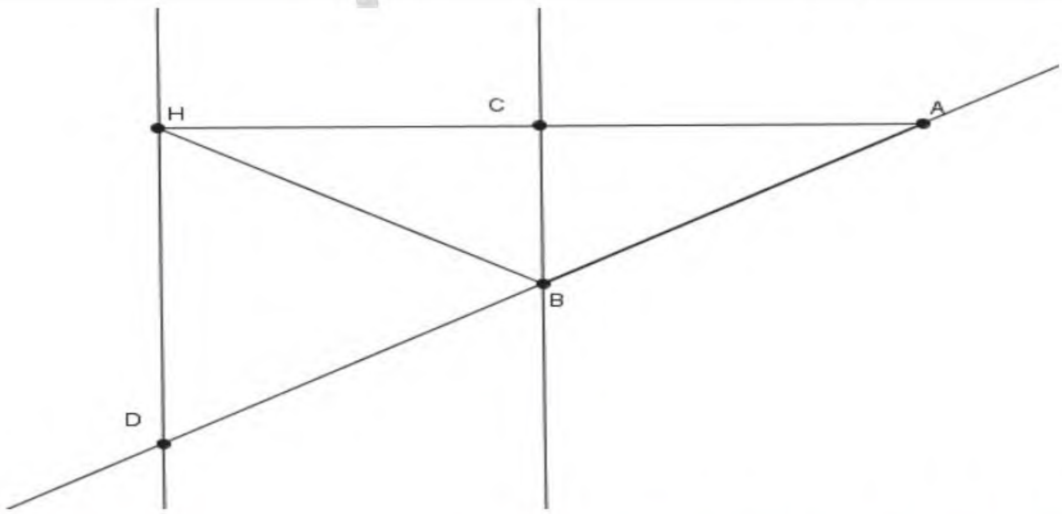
أي : $\dfrac{a^2}{\sqrt{abc}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{abc}}+\dfrac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \sqrt{\dfrac{ab}{c}}+\sqrt{\dfrac{bc}{a}}+\sqrt{\dfrac{ac}{b}}$

أي : $\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}}+\dfrac{y^2z^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}}+\dfrac{x^2z^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}} \geq \sqrt{\dfrac{xy^2z}{xz}}+\sqrt{\dfrac{yz^2x}{xy}}+\sqrt{\dfrac{x^2yz}{yz}}$

أي : $\dfrac{x^2y^2}{xyz}+\dfrac{y^2z^2}{xyz}+\dfrac{x^2z^2}{xyz} \geq \sqrt{y^2}+\sqrt{z^2}+\sqrt{x^2}$

وبالتالي : $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{xz}{y} \geq y+z+x$

تمرين 2



بما أن $[BC)$ هو منصف الزاوية $A\hat{B}H$

فإن : $A\hat{B}C = H\hat{B}C = \frac{A\hat{B}H}{2} = \frac{120}{2} = 60$

ولدينا $D\hat{B}A = H\hat{B}D + A\hat{B}H$

إذن : $H\hat{B}D = D\hat{B}A - A\hat{B}H = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (1)

بما أن المستقيمان (CB) و (HD) متوازيان و (HB) قاطع لهما

فإن : $B\hat{H}D = H\hat{B}C = 60^\circ$ (2)

ولدينا : $H\hat{D}B + D\hat{H}B + H\hat{B}D = 180$

أي $H\hat{D}B = 180 - \left(D\hat{H}B + H\hat{B}D\right)$

ومنه $H\hat{D}B = 180^\circ - \left(60^\circ + 60^\circ\right) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (3)

من 1 و 2 و 3 نستنتج أن المثلث HDB متساوي الأضلاع

ومنه $HD = HB = DB$

لدينا $(HD)//(CB)$

حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : $\frac{AH}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DH}{CB}$

أي : $\frac{AD}{AB} = \frac{DH}{CB}$

أي : $\frac{AB + BD}{AB} = \frac{BH}{CB}$ ($HD = HB = DB$ و $AD = AB + BD$)

أي : $\frac{AB + BH}{AB \times BH} = \frac{1}{CB}$

أي : $\frac{\cancel{AB}}{\cancel{AB} \times BH} + \frac{\cancel{BH}}{AB \times \cancel{BH}} = \frac{1}{CB}$

وبالتالي : $\boxed{\frac{1}{BH} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{CB}}$

<u>تمرين 3</u>

لدينا : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$

أي : $(x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$

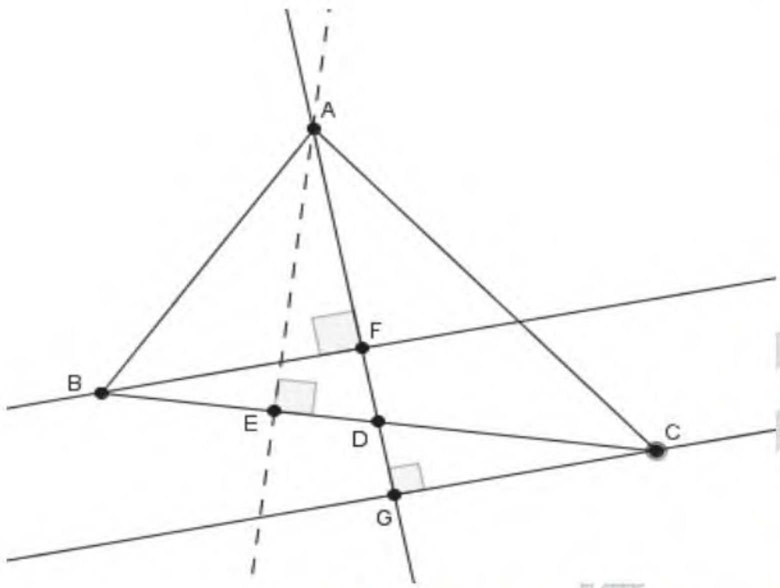
أي : $x^2 + 2xy + y^2 + 2(x + y)z + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$

أي : $2xy + 2(x + y)z = 0$ أي : $2(xy + xz + yz) = 0$

أي : $\frac{1}{\cancel{2}xyz} \times \cancel{2}(xy + xz + yz) = 0 \times \frac{1}{2xyz}$ أي : $\frac{xy}{xyz} + \frac{xz}{xyz} + \frac{yz}{xyz} = 0$

وبالتالي : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

تمرين 4



نحسب مساحة المثلثين ABD و ACD بطريقتين مختلفتين

الطريقة الأولى :

لدينا : $S_{ABD}=\frac{AE\times BD}{2}$ و $S_{ACD}=\frac{AE\times CD}{2}$

(S_{ABD} هي مساحة المثلث ABD و S_{ACD} هي مساحة المثلث ACD)

نعلم أن $BD=CD$

إذن $S_{ABD}=S_{ACD}$

الطريقة الثانية :

لدينا : $S_{ABD}=\frac{AD\times BF}{2}$ و $S_{ACD}=\frac{AD\times CG}{2}$

بما أن $S_{ABD}=S_{ACD}$

فإن : $\frac{AD\times BF}{2}=\frac{AD\times CG}{2}$

يعني : $\frac{\cancel{2}}{\cancel{AD}}\times\frac{\cancel{AD}\times BF}{\cancel{2}}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{AD}}\times\frac{\cancel{AD}\times CG}{\cancel{2}}$

وبالتالي : $BF=CG$