أولمبياد الثاني

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x+y+z=3$

بين أن : $\frac{\sqrt{x}}{y+z}+\frac{\sqrt{y}}{x+z}+\frac{\sqrt{z}}{x+y}\geq\frac{3}{2}$

تمرين 2

EFG مثلث متساوي الساقين في E و A نقطة من $[FG]$

و $[FD]$ الإرتفاع الموافق للضلع $[EG]$

و النقطتان B و C هما المسقطان العموديان للنقطة A على (EF) و (EG) على التوالي

بين أن : $FD=AB+AC$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$

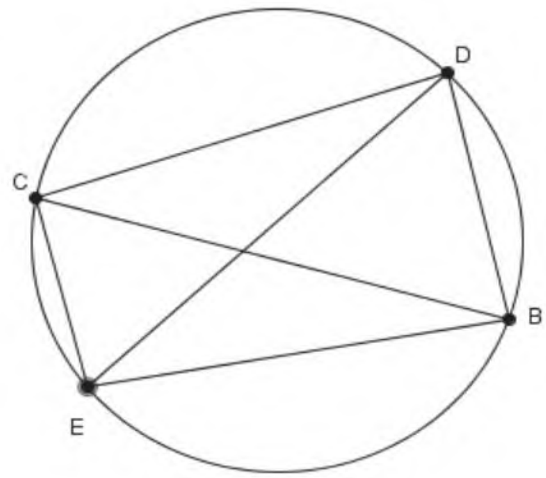
بين أن : $xyz=1$

تمرين 4

$ECDB$ رباعي محاط بدائرة

(أنظر الشكل جانبه)

بين أن : $EC\times DB+DC\times EB=BC\times ED$



حل أولمبياد الثاني

تمرين 1

لدينا : $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0$

يعني : $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \times\left(-\sqrt{x}-2\right) \leq 0\times\left(-\sqrt{x}-2\right)$ $\quad$ ($-\sqrt{x}-2 \leq 0$)

يعني : $\left(x-2\sqrt{x}+1\right)\times\left(-\sqrt{x}-2\right) \leq 0$

يعني : $-x\sqrt{x}-\cancel{2x}+\cancel{2x}+4\sqrt{x}-\sqrt{x}-2 \leq 0$

يعني : $-x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2 \leq 0$

يعني : $\sqrt{x}(3-x) \leq 2$

يعني : $\dfrac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq \dfrac{1}{2}$ $\quad$ ($3-x=y+z>0$)

يعني : $\left(\sqrt{x}\right)^2 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq \left(\sqrt{x}\right)^2 \times \dfrac{1}{2}$

إذن : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z} \geq \dfrac{x}{2}$ $\quad$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\dfrac{\sqrt{y}}{x+z} \geq \dfrac{y}{2}$ $\quad$ (2)

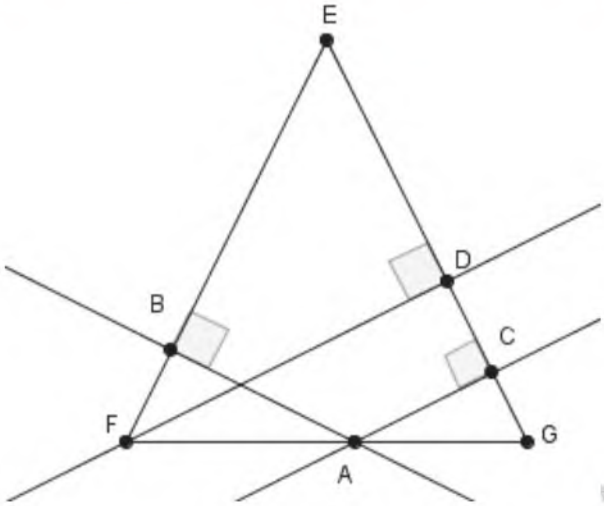
و $\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{z}{2}$ $\quad$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z}+\dfrac{\sqrt{y}}{x+z}+\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}$

أي : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z}+\dfrac{\sqrt{y}}{x+z}+\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{x+y+z}{2}$

وبالتالي : $\dfrac{\sqrt{x}}{y+z}+\dfrac{\sqrt{y}}{x+z}+\dfrac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \dfrac{3}{2}$

تمرين 2



لدينا : $S_{EFG} = S_{EFA} + S_{EAG}$

(S_{EFG} : مساحة مثلث EFG ،، S_{EFA} : مساحة مثلث EFA ،، S_{EAG} : مساحة مثلث EAG)

يعني : $\dfrac{EG \times FD}{2} = \dfrac{AB \times EF}{2} + \dfrac{AC \times EG}{2}$

يعني : $\dfrac{EG \times FD}{2} = \dfrac{AB \times EF + AC \times EG}{2}$

يعني : $\dfrac{EG \times FD}{2} = \dfrac{AB \times EG + AC \times EG}{2}$ ($EF = EG$ لأن المثلث EFG متساوي الساقين في E)

يعني : $\dfrac{EG \times FD}{2} = \dfrac{EG(AB + AC)}{2}$

يعني : $\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{EG}} \times \dfrac{\cancel{EG} \times FD}{\cancel{2}} = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{EG}} \times \dfrac{\cancel{EG}(AB + AC)}{\cancel{2}}$

إذن : $FD = AB + AC$

تمرين 3

لدينا : $x + \dfrac{1}{y} = y + \dfrac{1}{z}$

يعني : $x - y = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{y}$ يعني: $x - y = \dfrac{y - z}{zy}$ يعني : $zy = \dfrac{y - z}{x - y}$

إذن : $xyz = \dfrac{x(y - z)}{x - y}$ (1)

لدينا : $y + \dfrac{1}{z} = z + \dfrac{1}{x}$

يعني : $y - z = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{z}$ يعني : $y - z = \dfrac{z - x}{xz}$ يعني : $xz = \dfrac{z - x}{y - z}$

إذن : $xyz = \frac{y(z-x)}{y-z}$ (2)

لدينا : $x + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{x}$

يعني : $z - x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ يعني : $z - x = \frac{x-y}{xy}$

إذن : $xy = \frac{x-y}{z-x}$ (3)

نضرب المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف : $(xyz)\times(xyz) = \frac{x(\cancel{y-z})}{x-y} \times \frac{y(z-x)}{\cancel{y-z}}$

ومنه : $(xyz)^2 = \frac{xy(z-x)}{x-y}$ (4)

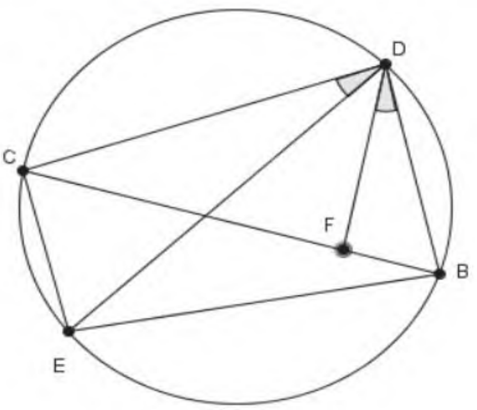
من 3 و 4 نستنتج أن : $(xyz)^2 = \frac{\left(\frac{x-y}{z-x}\right)(z-x)}{x-y}$

أي : $(xyz)^2 = \frac{\cancel{x-y}}{\cancel{z-x}} \times \frac{\cancel{z-x}}{\cancel{x-y}} = 1$

بما أن $x > 0$ و $y > 0$ و $z > 0$ أعداد حقيقية موجبة فإن : $xyz > 0$

وبالتالي : $xyz = 1$

تمرين 4



نضع النقطة F على $[BC]$ بحيث : $C\hat{D}E = B\hat{D}F$ (1)

بما أن $D\hat{B}F$ و $D\hat{E}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

فإن: $D\hat{B}F = D\hat{E}C$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن المثلثان CED و DBF متشابهان

أي $\frac{DB}{DE}=\frac{BF}{CE}$

ومنه $DB\times CE=BF\times DE$ (3)

لدينا : $C\hat{D}E=B\hat{D}F$

يعني : $C\hat{D}E+E\hat{D}F=B\hat{D}F+E\hat{D}F$

إذن : $C\hat{D}F=E\hat{D}B$ (4)

بما أن $D\hat{C}F$ و $D\hat{E}B$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

فإن: $D\hat{C}F=D\hat{E}B$ (5)

من 4 و 5 نستنتج أن المثلثان DFC و DBE متشابهان

أي : $\frac{DC}{DE}=\frac{CF}{BE}$

ومنه : $DC\times BE=CF\times DE$ (6)

نجمع المتساويتين 6 و 3 طرف بطرف : $DB\times CE+DC\times BE=BF\times DE+CF\times DE$

أي : $DB\times CE+DC\times BE=DE(BF+CF)$

وبالتالي : $EC\times DB+DC\times EB=BC\times ED$