تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية

شعبة:

تسيير و اقتصاد

جمع أستاذ: شعبان أسامة

تمرين 1:

عين مجموعة تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي:

$$g(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \quad \text{و} \quad f(x)=\ln(x-3)$$

الحل:

طريقة: اللوغاريتم النيبيري لعدد سالب أو معدوم ليس له معنى.

1. تكون الدالة f معرفة من أجل الأعداد الحقيقية x حيث $x-3>0$ أي $x>3$.

مجموعة تعريف الدالة f هي إذن $D=]3;+\infty[$.

2. تكون الدالة g معرفة من أجل الأعداد الحقيقية x حيث $\frac{x+2}{x-1}>0$ و $x-1\neq 0$

و هذا يعني $(x+2)(x-1)>0$ أي $x<-2$ أو $x>1$

مجموعة تعريف الدالة g هي إذن $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

تمرين 2:

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$\ln(x^2-1)<\ln(x+5) \quad (2) \qquad \text{و} \qquad \ln(x^2-1)=\ln(x+5) \quad (1)$$

الحل:

طريقة: لحل المعادلة $\ln[u(x)]=\ln[v(x)]$ (على التوالي المتراجحة $\ln[u(x)]<\ln[v(x)]$) :

- نعين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).
- نحل في D المعادلة $u(x)=v(x)$ (على التوالي المتراجحة $u(x)<v(x)$).

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x^2-1>0$ و $x+5>0$

$x^2-1>0$ تعني $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ و $x+5>0$ تعني $x>-5$ و منه $D=]-5;-1[\cup]1;+\infty[$.

من أجل كل x من D، (1) تعني $x^2-1=x+5$ أي $x^2-x-6=0$.

حلا المعادلة $x^2-x-6=0$ هما (-2) و 3 و كلاهما عنصر من D. مجموعة الحلول هي إذن $S=\{-2;3\}$.

2. مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي نفسها $D=]-5;-1[\cup]1;+\infty[$.

من أجل كل x من D، (2) تعني $x^2-1<x+5$ أي $x^2-x-6<0$.

بما أن جذري x^2-x-6 هما (-2) و 3 فإن $x^2-x-6<0$ تعني $x\in]-2;3[$. حلول المتراجحة (2) هي إذن الأعداد الحقيقية من المجال $]-2;3[$ و التي تنتمي إلى D. مجموعة الحلول هي إذن $S=]-2;-1[\cup]1;3[$.

تمرين 3:

عين حسب قيم x إشارة $\ln(x-3)$

الحل:

- $\ln(x-3)\le 0$ يعني $0<x-3\le 1$ إي $3<x\le 4$.
- $\ln(x-3)>0$ يعني $x-3>1$ إي $x>4$. و منه إشارة $\ln(x-3)$ هي ملخصة في الجدول التالي:

x	3		4		$+\infty$
$\ln(x-3)$	‖	$-$	0	$+$	

ملاحظة: كان بالإمكان تعيين مجموعة التعريف ثم الاكتفاء بحل إحدى المتراجحتين.

تمرين 4:

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$\ln(x+2)+\ln(x+3)=\ln 6 \quad (1) \quad \text{و} \quad \ln(x+2)+\ln(x+3)\le\ln 6 \quad (2)$$

الحل:

طريقة: الكتابة $\ln a+\ln b$ تفرض أن يكون $a>0$ و $b>0$ بينما الكتابة $\ln(a\times b)$ تفرض أن يكون $ab>0$

و يعني هذا أنه يمكن للعددين a و b أن يكونا سالبين معا. و لذا فلابد من تعيين مجموعة التعريف قبل أي تغيير.

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x+2>0$ و $x+3>0$ م هذا يعني $x>-2$

و $x>-3$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]-2;+\infty[$.

من أجل كل x من D، (1) تعني $\ln(x+2)(x+3)=\ln 6$ و هذا يعني $(x+2)(x+3)=6$ أي $x^2+5x=0$

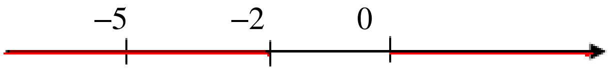
للمعادلة $x^2+5x=0$ حلان هما (-5) و 0. نلاحظ أن 0 عنصر من D بينما (-5) لا ينتمي إلى D.

مجموعة الحلول هي إذن $S=\{0\}$.

2. مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي نفسها $D=]-2;+\infty[$.

من أجل كل x من D، (2) تعني $\ln(x+2)(x+3)\le\ln 6$ و هذا يعني $(x+2)(x+3)\le 6$ أي $x^2+5x\le 0$

$x^2+5x\leq 0$ يعني $-5\leq x\leq 0$ و منه مجموعة الحلول هي $S=[-5;0]\cap D=]-2;0]$



تمرين 5:

بلغ عدد سكان بلد 10 ملايين نسمة يوم $2007/01/01$.

1. **في أي سنة يصبح عدد السكان ضعف ما كان عليه إذا علمت أن عدد السكان يرتفع سنويا بنسبة** 5%؟
2. **في أي سنة يصبح عدد السكان نصف ما كان عليه إذا علمت أن عدد السكان ينقص سنويا بنسبة** 5%؟

الحل:

1. في 01 جانفي من السنة $2007+n$ يكون عدد سكان البلد هو $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$ أي $10^6(1,05)^n$.

لنعين أصغر عدد طبيعي n يحقق $10^6(1,05)^n\geq 2\times 10^6$ أي $(1,05)^n\geq 2$.

$(1,05)^n\geq 2$ يعني $\ln(1,05)^n\geq \ln(2)$ لأن الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

نحصل على $n\ln(1,05)\geq \ln(2)$ أي $n\geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,05)}$ لأن $\ln(1,05)>0$ بما أن $1,05>1$.

لدينا $\frac{\ln(2)}{\ln(1,05)}\approx 14,20$. و منه أصغر عدد طبيعي n يحقق المطلوب هو $n=15$.

يتضاعف إذن عدد سكان هذا البلد بعد 15 سنة أي سنة 2022.

2. في 01 جانفي من السنة $2007+n$ يكون عدد سكان البلد هو $10^6\left(1-\frac{5}{100}\right)^n$ أي $10^6(0,95)^n$.

لنعين أصغر عدد طبيعي n يحقق $10^6(0,95)^n\leq 0,5\times 10^6$ أي $(0,95)^n\leq 0,5$ أي $n\ln(0,95)\leq \ln(0,5)$

نجد $n\geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}$.

تمرين 6:

ليكن (Δ) **مماس المنحني** (C) **الممثل للدالة** $x\mapsto \ln x$ **عند النقطة** $A(e;1)$.

1. **عين معادلة للمماس** (Δ).
2. **أدرس اتجاه تغير الدالة** f **المعرفة على** $]0;+\infty[$ **بِـ** $f(x)=\ln(x)-\frac{1}{e}x$. **احسب** $f(e)$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

$f(x)$	$\nearrow$ 0 $\searrow$

3. استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة للمماس (Δ).

الحل:

1.معادلة (Δ) هي: $y=\frac{1}{e}(x-e)+1$ و منه $(\Delta): y=\frac{1}{e}x$

2.من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{ex}$.

بما أن $x>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $e-x$. و هكذا:

$f'(x)\geq 0$ من أجل $0<x\leq e$ و $f'(x)<0$ من أجل $x>e$.

$f(e)=0$ هي القيمة الحدية العظمى للدالة f على $]0;+\infty[$.

3. من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x)\leq 0$ أي من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\ln(x)\leq\frac{1}{e}x$.

نستنتج إذن أن المنحني (C) يقع تحت المماس (Δ) على المجال $]0;+\infty[$.

تمرين 7:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;e[\cup]e;+\infty[$ بِ $f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$

1. **أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.**

2. **أدرس اتجاه تغير الدالة f.**

الحل:

1. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln x}=0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{\ln x}=0$.

$\lim\limits_{x\to e}(1+\ln x)=2$ ، $\lim\limits_{x\to e}(1-\ln x)=0$ و بما أن $1-\ln x>0$ من أجل $x<e$ و $1-\ln x<0$ من أجل $x>e$

فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}e}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}e}f(x)=-\infty$.

2. الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]0;e[$ ، $]e;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;e[\cup]e;+\infty[$ ،

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x)-\left(-\frac{1}{x}\right)(1+\ln x)}{(1-\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}{(1-\ln x)^2}=\frac{2}{x(1-\ln x)^2}.$$

بما أن $x>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]0;e[$ و $]e;+\infty[$.

📖تمرين 8:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بِـ $f(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)$

أدرس نهايتي الدالة f عند 1 و عند $+\infty$.

الحل:

- لدينا من جهة: $\lim_{x\to1}(x^2+1)=2$ و بما أن $\lim_{X\to2}\ln X=\ln 2$ فإن $\lim_{x\to1}\ln(x^2+1)=\ln 2$

و لدينا من جهة ثانية: $\lim_{x\to1}(x^2-1)=0$ و بما أن $\lim_{X\to0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim_{x\to1}\ln(x^2-1)=-\infty$

نستنتج مما سبق أن $\lim_{x\to1}\left[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\right]=+\infty$ أي $\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$.

- $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)=+\infty$. لدينا إذن حالة عدم التعيين.

من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$. بما أن $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)=1$ و علما أن $\lim_{X\to1}\ln X=0$

نستنتج أن $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)=0$ أي $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

📖تمرين 9:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ **بِـ** $f(x)=x+3\ln(2x-1)$

1. أحسب $f'(x)$.
2. **عين معادلة لِـ (Δ) مماس المنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها** 1.

الحل:

1. من أجل كل x من $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$، $f'(x)=1+3\times\frac{2}{2x-1}=\frac{2x+5}{2x-1}$.
2. لدينا: $f(1)=1$ و $f'(1)=7$. لدينا $(\Delta):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(\Delta):y=7x-6$.

📖تمرين 10:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ **بِـ** $f(x)=\frac{5x-1}{x^2-1}$

1. تحقق أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $f(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}$.

2. عين دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$.

الحل:

1. من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $f(x)=\frac{5x-1}{x^2-1}=\frac{2(x+1)+3(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}$.

2. بوضع $u(x)=x-1$ و $v(x)=x+1$ يكون $u'(x)=1$ و $v'(x)=1$

و بالتالي يكون لدينا: $f(x)=2\times\frac{u'(x)}{u(x)}+3\times\frac{v'(x)}{v(x)}$

و بما أن من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $u(x)>0$ و $v(x)>0$ فإن دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$ هي الدالة F

حيث $F(x)=2\ln[u(x)]+3\ln[v(x)]$.

نجد هكذا $F(x)=2\ln(x-1)+3\ln(x+1)$.

تمرين 11: (دراسة دالة لوغاريتمية)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بِـ : $f(x)=x+2-\ln(x+2)$

1. احسب نهاية الدالة f عند -2 .

2. بملاحظة أن $f(x)=(x+2)\left(1-\frac{\ln(x+2)}{x+2}\right)$ ، وباستعمال النتيجة $\lim_{X\to\infty}\frac{\ln X}{X}=0$ ، عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3. احسب مشتقة الدالة f ، ثم شكل جدول تغيرات f.

4. أ- بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا واحدا α محصوراً بين 2 وَ 3 .

ب- باستعمال الحاسبة ، عين حصرا سعته 10^{-2} للعدد α.

5. نرمز بـ $(\mathcal{C})$ إلى منحني الدالة f في معلم متعامد و متجانس. وحدة الأطوال $1cm$.

أ- عين معامل توجيه المماس T للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة التي فاصلتها 2.

ب- ارسم T ، ثم المنحني $(\mathcal{C})$.

الحل:

1. $\lim_{x\xrightarrow{>}-2}f(x)=+\infty$ .2 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

3. من اجل كل x من $]-2;+\infty[$ $f'(x)=1-\frac{1}{x+2}$

جدول التغيرات:

x	-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4. أ- حسب جدول التغيرات ، الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على

$[2;3]$.بما أن $f(2)\approx 2,6$ و $f(3)\approx 3,4$ و $f(x)$ تأخذ القيمة

3 في المجال $[2;3]$ فإن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا واحدا α

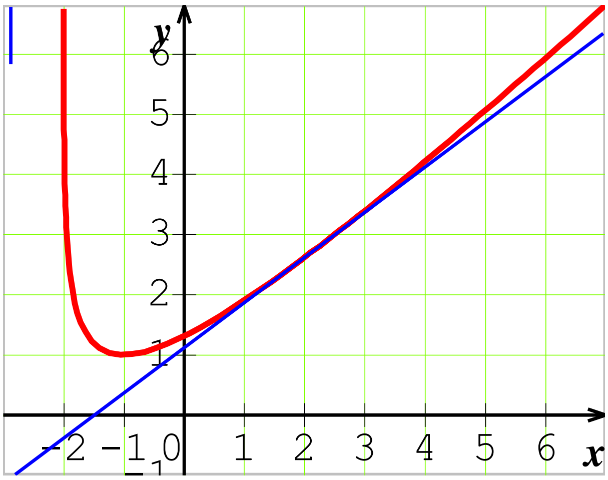
محصوراً بين 2 وَ 3 .

ب- باستعمال الحاسبة نلاحظ أن $f(2,50)\approx 2,99<3$

و $f(2,51)\approx 3,003>3$

5.أ- معامل توجيه المماس T للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة التي فاصلتها 2

هو $f'(2)=\frac{3}{4}$



مرجع هذه التمارين –الكتاب المدرسي الجزائري

بالتوفيق في دورة 2020—أحبكم

أ.شعبان

تجدون هذا الملف على صفحة