تمارين شاملة في الدوال

وفق البرنامج الوزاري
2021 / 2020

بالتوفيق في
شهادة البكالوريا

الأستاذ
عبد الرحمان
للرياضيات

تمارين شاملة في الدوال:

- العددية
- الأسية
- اللوغارتمية

لجميع الشعب العلمية

النّهايات + الاشتقاقية + دراسة دوال: كثير الحدود، جذرية، ناطقة وصمّاء

قواديري أحمد عبد الرحمان

التمرين الأول

ادرس قابلية اشتقاق الدّوال التالية عند القيمة a المشار إليها في كل من الدّوال المعرفة بـ:

- $f_2(x) = x^2 + 1; a = 2$
- $f_3(x) = x^2; a = 1$
- $f_4(x) = x^2 + x; a = -1$
- $f_3(x) = 3x + 1; a = 0$
- $f_6(x) = \frac{x}{x+2}1; a = -1$
- $f_5(x) = \frac{1}{x+1}; a = 2$
- $f_8(x) = \frac{1}{x} + 2; a = -1$
- $f_7(x) = \frac{x+1}{x+3}; a = 1$
- $f_{10}(x) = \sqrt{x+3}; a = 6$
- $f_9(x) = \sqrt{x}; a = 1$
- $f_{12}(x) = \sqrt{2x}; a = 2$
- $f_{11}(x) = \sqrt{-x-1} + 2; a = -1$

التمرين الثاني

المستوي منسوب إلى معلم متعامد.

عيّن في كل حالة من الحالات التالية معادلة المماس لمنحنى كل دالة من الدّوال المعرفة كمايلي في النقطة ذات الفاصلة x_0:

- $f(x) = \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x}; x_0 = -2$
- $f(x) = -3x^3 + x - 4; x_0 = 0$
- $f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}; x_0 = 0$
- $f(x) = \frac{2x+1}{x-2} + 2; x_0 = 3$

التمرين الثالث

a، b و c أعداد حقيقية.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = ax^3 + bx + c$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- عين الأعداد a ، b و c بحيث المنحنى (C_f) يشمل النقطة $A(1; -3)$ ويقبل في النقطة $B(0;1)$ مماسا موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y = -6x$.

التمرين الرابع

f دالة كثير حدود من الدرجة الثانية تحقّق:

$$f'(3) = 3 \qquad f(1) = 2 \qquad f'(-2) = -3$$

- عيّن الدّالة f.

التمرين الخامس

احسب مشتقة كل دالة من الدّوال المعرفة كمايلي:

- $f_3(x) = \frac{2x+1}{x-2}$
- $f_2(x) = \frac{3x^2+6x-3}{4}$
- $f_1(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 5x$
- $f_6(x) = \frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}$
- $f_5(x) = (x^2+x)\sqrt{x}$
- $f_4(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}$
- $f_9(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x+3}$
- $f_8(x) = (2x+1)^2$
- $f_7(x) = \frac{x^2-8x+16}{x-3}$
- $f_{13}(x) = sinx + 3cosx$
- $f_{12}(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$
- $f_{11}(x) = \frac{-x^2+4x}{x^2-4x+3}$
- $f_{10}(x) = \frac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$
- $f_{18}(x) = \frac{1}{tanx}$
- $f_{17}(x) = \frac{1}{cosx}$
- $f_{16}(x) = cos^2x$
- $f_{15}(x) = (sinx)(cosx)$
- $f_{14}(x) = tanx$
- $f_{22}(x) = \sqrt{2x+2}$
- $f_{21}(x) = cos(-5x-5)$
- $f_{20}(x) = sin(3x-2)$
- $f_{19}(x) = \frac{1+sinx}{3+cosx}$

التمرين السادس

احسب النّهايات التالية:

- $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{1-x}\right)$
- $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{x-2}\right)$
- $\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}}{1-x}\right)$
- $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$
- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$
- $\lim_{x\to 9}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right)$
- $\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)$
- $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x+2}{x^2+x}+\frac{3x+1}{x^2-1}\right)$
- $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$
- $\lim_{x \overset{>}{\to} 1}\frac{1}{\sqrt{x-1}}$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(x-4+\frac{1}{x}\right)^3$
- $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{2x}{x+3}}$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{cosx}{x-1}\right)$
- $\lim_{x\to -\infty}\left(3x+4+\frac{sinx}{x}\right)$
- $\lim_{x \overset{>}{\to} 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}\right)$
- $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
- $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

التمرين السابع

احسب النّهايات التالية:

- $\lim_{x\to +\infty}\left((2x+1)^2-5x^2+3\right)$
- $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{2}x^3-4x^2+9\right)$
- $\lim_{x\to +\infty}(3x^2-5x+2)$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3-2x}{x^2-2x}\right)$
- $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3x^2-2x+1}{(x-2)^2}\right)$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^2-x-3}{x-1}\right)$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x+1}\right)$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x+1}-2x\right)$
- $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x+1}{2x^2-x-1}\right)$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2x-1}-x\right)$
- $\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{2-x}-x\right)$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}+2x\right)$
- $\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{x}+2}\right)$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2\sqrt{x}-3}{3\sqrt{x}+2}\right)$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

. الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات . https://youtu.be/d3Tty_sfEFY

التمرين الثامن

احسب النّهايات التالية:

- $\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{x^2+x-2}$
- $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$
- $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}$
- $\lim_{x\to -1}\frac{2x^4+3x+1}{x^3+2x^2-1}$
- $\lim_{x\to \frac{2}{3}}\frac{3x^2-5x+2}{9x^2-4}$
- $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2+3x+2}$

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

. الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات . https://youtu.be/d3Tty_sfEFY

التمرين التاسع

احسب النّهايات التالية:

$$\bullet \lim_{x\to4}\frac{x\sqrt{x}-8}{x^2-16}\quad\bullet \lim_{x\to5}\frac{5\sqrt{x}-x\sqrt{5}}{x\sqrt{x}-5\sqrt{5}}\quad\bullet \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x-2}-1}{\sqrt{x}-1}\quad\bullet \lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$$

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات . https://youtu.be/d3Tty_sfEFY

التمرين العاشر

المستوي منسوب إلى معلم متعامد.

احسب نهايات كل من الدّوال المعرفة بالعبارات أدناه عند أطراف مجموعة تعريفها مفسّرا النتائج هندسيا:

- $f_1(x)=\dfrac{1}{x-2}\quad;D_1=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$
- $f_2(x)=2-\dfrac{1}{x^2}\quad;D_2=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
- $f_3(x)=\dfrac{2x}{1-x}\quad;D_3=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$
- $f_4(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2+x-2}\quad;D_4=]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$
- $f_5(x)=\dfrac{-x+1}{x^2+1}\quad;D_5=]-\infty;+\infty[$
- $f_6(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\quad;D_6=]-\infty;+\infty[$

التمرين الحادي عشر

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

ب- احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)$ ، ثمّ فسر النتيجة هندسيا.

2- احسب $f'(x)$ (حيث f' الدالة المشتقة للدالة f).

3- ادرس إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

4- أ- أثبت أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y=x+2$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ب- ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (T) و المنحنى (C_f).

5- بيّن أن النقطة $\Omega(0;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

6- مثّل بيانيًا (C_f).

التمرين الثاني عشر

نعتبر الدّالة f المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{1;3\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب نهايات الدّالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثمّ فسّر ذلك هندسيا.

2- ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3- عيّن احداثيات نقط تقاطع (C_f)، مع حاملي محوري الإحداثيات.

4- أ- بيّن أنّه إذا كان $x\in D$ فإنّ: $(4-x)\in D$

ب- بيّن أنّ المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تناظر لـ (C_f).

5- مثّل بيانيًا (C_f).

التمرين الثالث عشر

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x^2+x-3}{x+1}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس تغيّرات الدّالة f.

2- أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$. حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ب- استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

3- مثّل بيانيا (C_f).

التمرين الرابع عشر

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=x^3+3x^2-4$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة f.

2- عيّن إحداثيتي نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات.

3- أ- برهن أنّ النقطة $\omega(-1;-2)$ مركز تناظر لـ (C_f).

ب- عين معادلة للمماس (T) في النقطة ω.

4- مثّل بيانيا كل من (T) و (C_f).

5- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^3+3x^2-4-m=0$.

التمرين الخامس عشر

a و b عددان حقيقيان.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-3x+b$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- عين العددين a و b حتى تقبل الدّالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8.

2- ادرس تغيرات الدالة f.

3- احسب $f(5)$، $f(1)$، $f(0)$ و $f(-2)$.

4- اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

5- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (T).

6- مثّل بيانيا كل من (T) و (C_f).

التمرين السادس عشر

a و b عددان حقيقيان.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-3x+b$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- عين العددين a و b بحيث: (C_f) يقطع حامل محور التراتيب في النقطة التي ترتيبها $\frac{4}{3}$ ويقبل المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقاربا له.

2- ادرس تغيرات الدالة f.

3- عيّن إحداثيي نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات.

4- بين أن (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيه كل منهما يساوي -2 يطلب تعيين معادلتيهما.

5- مثّل بيانيا (C_f).

التمرين السابع عشر

a و b عددان حقيقيان.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x+2}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- أ- عين العددين a و b بحيث (C_f) يقبل عند النقطة $A\left(0;\frac{7}{2}\right)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل.

ب- بيّن أن $f(x)$ تكتب على الشكل: $f(x)=1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$.

2- ادرس تغيرات الدالة f.

3- بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

4- عيّن إحداثيي نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات.

5- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

6- برهن أن نقطة تقاطع (C_f) و (Δ) هي مركز تناظر لـ (C_f).

7- عين معادلة للمماس (T) في النقطة ω.

8- مثّل بيانيًا كل من (T) و (C_f).

التمرين الثامن عشر

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$

1- ادرس تغيرات الدالة g.

2- احسب $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

3- أ- علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha)=0$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$.

II. f هي الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

ونسمّي (Γ) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$.

2- عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسر النتيجة بيانيا

3- أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ ، ثمّ فسر النتيجة بيانيا.

4- شكل جدول تغيرات الدالة f.

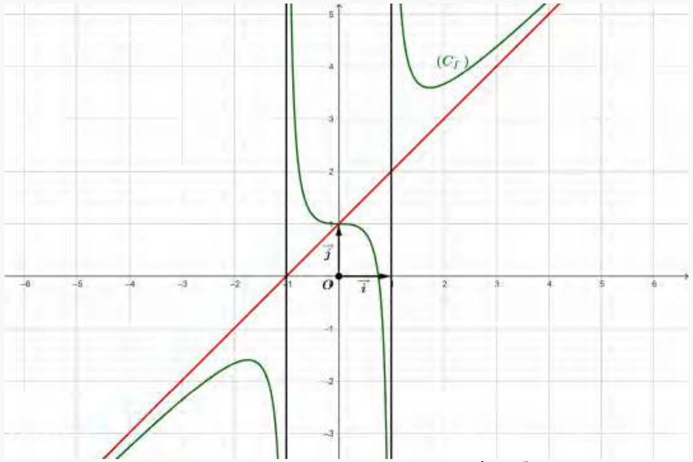
5- مثّل بيانيّا (Γ).

التمرين التاسع عشر

I. نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ كما في الشكل المقابل :



1- بقراءة بيانية - دون استعمال عبارة الدالّة f - أوجد مايلي :

أ- نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب- معادلة المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f).

ج- إشارة $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $\frac{1}{2}\prec\alpha\prec 1$.

3- أ- من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$. أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها.

ب- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f)؟

4- من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$. أحسب $f(x)+f(-x)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

II. نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي:

$$g(x)=f(|x|)$$

ونسمّي (C_g) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- أدرس قابلية اشتقاق الدالة g في الصفر.

2- بيّن أنّ الدّالّة g زوجية.

3- انطلاقا من (C_f) مثّل بيانيا (C_g). - اشرح طريقة الإنشاء - .

4- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:

$$|x|^3+(1-|m|)\left(x^2-1\right)=0$$

التمرين عشرون

I. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x - 3$$

1- ادرس تغيرات الدالة g.

2- أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2;3[$.

ب- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

I. f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1- بين أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]1,+\infty[$.

2- ادرس إتّجاه الدالة f على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3- بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f)، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d).

4- أوجد فواصل النقط التي تكون فيها المستقيمات المماسية لـ (C_f) موازية للمستقيم (d).

5- مثّل بيانيا (C_f).

التمرين الواحد و عشرون

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1- أ- بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 - 1}$، حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ب- استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) في جوار $+\infty$ و $-\infty$، يُطلب تعين معادلته.

2- ادرس تغيرات f.

3- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\frac{4}{5};-\frac{1}{2}[$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4- مثّل بيانيّا (C_f).

5- m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $x^3 - (m+1)x^2 + m + 1 = 0$.

II. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{|x| - x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

ونسمّي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1- أثبت أن الدالة h زوجية، فسّر ذلك هندسيا.

2- اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

3- مثل بيانيّا (C_h).

التمرين الثاني و عشرون

a و b عددان حقيقيان.

I. نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1- عيّن العددين a و b بحيث: المنحنى (C_f) يمر من النقطة $A(0;3)$ ويقبل فيها مماسا معامل توجيهه 4.

II. نضع من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$$

1- عيّن العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x^2 + 1}$.

2- ادرس تغيّرات الدّالة f.

3- ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 4x + 3$.

4- أثبت أنّ (C_f) يقبل ثلاث نقط إنعطاف يطلب تعينها.

5- بيّن أنّ النقطة $A(0;3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

6- أثبت أنّ (C_f) يقبل مماسين معامل توجيههما 2.

7- مثّل بيانيا (C_f) والمستقيم (Δ).

8- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x) = 4x + m$.

التمرين الثالث و عشرون

I. نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$g(x) = x^3 - 3x - 4$$

1- ادرس تغيّرات الدّالة g.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث: $\alpha \in]2.19;2.20[$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1;1\}$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.

2- ادرس إتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3- بيّن أنّ: $f(\alpha) = \frac{3(\alpha + 2)}{\alpha^2 - 1}$، ثمّ أوجد حصرا للعدد $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-1}.

4- أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

5- مثّل بيانيا المستقيم (Δ)، ثمّ المنحنى (C_f).

III. نعتبر الدّالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

ونسمّي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1- ادرس قابلية اشتقاق الدّالة h في 0.

2- بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

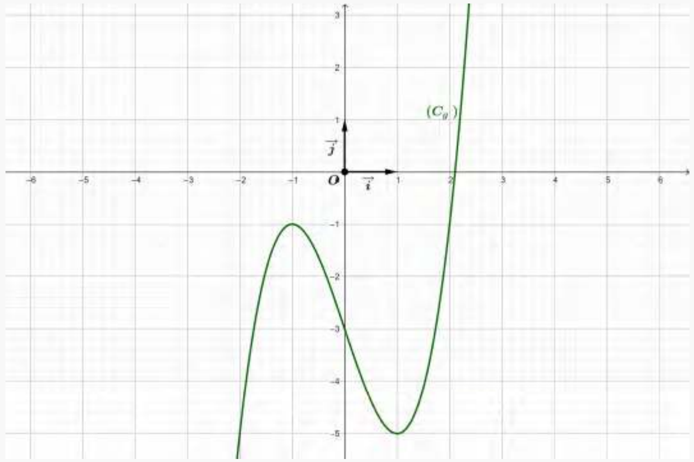
3- بيّن كيف يمكن تمثيل المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f)، ثمّ أنشئه.

التمرين الرابع و عشرون

a و b عددان حقيقيان. **I.** نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = ax^3 + bx + c$$

ونسمّي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ كما في الشكل المقابل:



1- باستعمال المنحنى (C_g) الممثل في الشكل السابق. عيّن a، b و c.

2- بيّن أنّ المعادلة $x^3-3x-3=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث: $\alpha\in\left]2;\frac{5}{2}\right[$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{2x^3+3}{x^2-1}+1$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $f'(x)=\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

2- عيّن دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

3- احسب نهايات الدّالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

4- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

5- بيّن أنّ: $f(\alpha)=3\alpha+1$، ثمّ عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6- أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

7- مثّل بيانيّا المستقيم (Δ) ثمّ المنحنى (C_f).

التمرين الخامس و عشرون

I. نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي::

$$g(x)=x^3-x^2+3x+1$$

1- ادرس تغيّرات الدّالة g.

2- أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث: $\alpha\in\left]-1;0\right[$.

ب- أعط حصرا لـ α سعته 10^{-1}.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

4- بيّن أنّ: $\alpha^2=-3-\dfrac{4}{\alpha-1}$.

II. نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^3+x-2}{x^2+1}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.

2- ادرس إتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3- أ- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\alpha-\dfrac{2}{\alpha^2+1}$.

ب- أوجد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4- أ- عيّن الأعداد الحقيقية a، b، c و d، بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$.

ب- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)، يُطلب تعيين معادلته.

ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

5- أ- تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f''(x)=\dfrac{4\left(-3x^2+1\right)}{(x^2+1)^3}$.

ب- بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يُطلب تعيينهما.

6- بيّن أنّه يوجد مماسين (T_1) و (T_2) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الترتيبة -2، يُطلب كتابة معادلتيهما

7- مثّل بيانيا المماسين (T_1) و (T_2)، ثمّ المنحنى (C_f).

8- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة: $m\left(x^2+1\right)+2=0$.

التمرين السادس و عشرون

I. نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x-1}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل النقطة ذات الفاصلة 1 مركز تناظر، يُطلب تعيين ترتيبتها.

2- ادرس تغيّرات الدّالة f.

3- أ- عيّن الأعداد الحقيقية a و b، بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{x}{x-1}$.

ب- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)، يُطلب تعيين معادلته.

ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

4- بيّن أنّه يوجد مماسان (T_1) و (T_2) لـ (C_f) عموديان على المستقيم ذو المعادلة: $y=-4x$، يُطلب تعيين معادلة كلّ منهما.

5- مثّل بيانيا كل من (T_1) و (T_2)، ثمّ المنحنى (C_f).

6- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:

$$3x^2+(5-|m-1|)x+(|m-1|-4)=0$$

II. نعتبر الدّالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $h(x)=f\left(x^2\right)$ -عبارة $h(x)$ غير مطلوبة-.
ونسمّي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- أ- احسب نهايات الدّالة h عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب- ادرس بطريقتين مختلفتين، اتجاه تغيّر الدّالة h.

ج- شكّل جدول تغيّرات الدّالة h.

2- بيّن أنّ الدّالة h زوجية، ثمّ فسّر ذلك هندسيا.

III. نعتبر الدّالة k المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كمايلي: $k(x)=2xf'\left(x^2\right)$ -عبارة $k(x)$ غير مطلوبة-.

1- ادرس إشارة $k(x)$.

2- برهن حسابيا بطريقتين مختلفتين أنّ الدّالة k فردية، ثمّ فسّر ذلك هندسيا.

التمرين السابع و عشرون

الأجزاء I، II و III مستقلة.

I. باستعمال العدد المشتق. احسب النهايتين التاليتين:

$$\bullet \lim_{x\to 1}\frac{x^{2021}-1}{x-1} \quad \bullet \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\tan(x)-1}{\sin(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \bullet \lim_{x\to \alpha}\frac{\sin^2(x)-\sin(x)\cdot\sin(\alpha)}{x-\alpha} \quad \bullet \lim_{x\to a}\frac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{x^3-a^a}$$

II. أوجد قيمة العدد الحقيقي a حتى تكون الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\begin{cases} ax^2-1 & ;x\succeq 1 \\ ax-x & ;x\prec 1\end{cases}$ قابلة للاشتقاق في $x_0=1$.

III. لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في α.

- حدّد النهايات الآتية:

$$\bullet \lim_{x\to\alpha}\frac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha} \quad \bullet \lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a+x^2)}{x}$$

التمرين الثامن و عشرون

I. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=x^3-3x-4$$

1- ادرس تغيرات الدالة g.

2- أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2;2.25[$.

ب- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

I. f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- احسب نهايات الدّالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

3- ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4- أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

5- بيّن أنّ: $f(\alpha)=1+\dfrac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$، ثمّ أوجد حصرا لـ: $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2}.

6- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $A(\beta;0)$ حيث: $1.5\prec\beta\prec-1.25$.

7- مثّل بيانيّا (C_f).

III. نعتبر الدّالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{\beta\}$ كمايلي:

$$h(x)=\frac{1}{f(x)}$$

ونسمّي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- ادرس تغيّرات الدّالة h، ثمّ مثّل (C_h) بيانيّا.

2- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x)=|m-1|$.

3- n وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم n عدد حلول المعادلة: $f(\cos(\theta))=\dfrac{1}{m}$. حيث: $0\preceq\theta\preceq 2\pi$.

4- γ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم γ عدد حلول المعادلة $f(x)=\sin(\gamma)$. حيث: $0\preceq\gamma\preceq 2\pi$.

التمرين التاسع و عشرون

I. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=x^3+3x^2+2$$

1- ادرس تغيرات الدالة g.

2- أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-4;-3[$.

ب- عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون: $-\dfrac{n+1}{10}\preceq\alpha\preceq\dfrac{n}{10}$.

ج- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

2- بيّن أنّ: $\alpha^3=-3\alpha-2$.

II. f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+2x+1}$$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- احسب نهايات الدّالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$.

3- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

4- بيّن أنّ: $f(\alpha)=-\dfrac{3}{\alpha+1}$ ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5- أ- بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=-2$.

ب- استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)، يُطلب تعيين معادلته.

ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

6- أ- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيين إحداثييها.

ب- اكتب معادلة للمماس (T).

7- مثّل بيانيا المستقيم (T)، ثمّ المنحنى (C_f).

8- m وسيط حقيقي. عيّن قيم m حتى تقبل المعادلة: $(m+2)(x+1)^2-3x-1=0$ حلّين مختلفين في الإشارة.

التمرين ثلاثون

I. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x+1-\frac{x}{x^2+1}$$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- ادرس تغيّرات الدّالة f.

2- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-2;-1[$، ثمّ عيّن حصرا لـ α سعته 10^{-1}.

3- نعتبر كثير الحدود التالي: $p(x)=x^4+2x^2-4x+1$.

أ- تحقّق من أنّ: $p(1)=0$.

ب- بيّن أنّ المعادلة $x^3+x^2+3x-1=0$ تقبل حلّا وحيدا β على $\mathbb{R}$ ثمّ تحقّق أنّ: $0.2 \prec \beta \prec 0.3$.

ج- حل في $\mathbb{R}$، المعادلة $p(x)=0$.

د- بيّن أنّه يوجد مماسان لـ (C_f) يمران بالنقطة $B\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

4- اكتب معادلة للمماسين (T_1) و (T_2) في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و -1 على الترتيب.

5- أ- برهن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلته.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

6- برهن أنّ النقطة $I(0;1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f).

7- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثييها.

8- مثّل بيانيا كل من المستقيمي (T_1) و (T_2)، ثمّ المنحنى (C_f).

9- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$.

II. نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=|f(x)|$$

ونسمّي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- أ- اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

ب- فسّر كيف يمكن تمثيل (C_g) انطلاقا من (C_f).

2- مثّل بيانيا (C_g).

التمرين الواحد و ثلاثون

I. نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^3-3x-6}{2(x+2)}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- احسب نهايات الدّالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2- أ- احسب $f'(x)$.

ب- ادرس إشارة $f'(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f)؟

ج- شكّل جدول تغيّراتها.

3- عيّن العددين الحقيقين a و b بحيث: $f(x)=a(x-1)^2+\frac{b}{2(x+2)}$.

II. نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2$$

ونسمّي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-g(x))$ ثمّ فسّر ذلك هندسيا.

2- ادرس الوضع النسبي بين (C_g) و (C_f).

3- اعتمادا على جدول تغيّرات الدّالة f. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=m$.

II. نعتبر الدّالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ:

$$h(x)=\frac{x^3+x-2}{2(x+2)}$$

ونسمّي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2\}$: $h(x)=f(x)+2$.

ب- استنتج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه.

ج- انطلاقا من المنحنى (C_f). مثّل بيانيا (C_h).

التمرين الثاني و ثلاثون

I. نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{4x^2-11x+7}{2(x-2)}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$، حيث: $\left\|\overrightarrow{i}\right\|=2cm$.

1- أ- احسب: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}f(x)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2- ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3- أ- برهن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x-\frac{3}{2}$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

4- بيّن أنّ نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي مركز تناظر للمنحني (C_f).

5- بيّن أنّه يوجد مماسان (T_1) و (T_2) لـ (C_f) معامل توجيه كل منهما $\frac{3}{2}$، يُطلب تعيين معادلة كلّ منهما.

6- تحقق من أنّ نقطتي التماس لـ (T_1) و (T_2) مع المنحنى (C_f) متناظرتين بالنسبة لمركز تناظر (C_f).

7- مثّل بيانيّا (C_f).

II. نعتبر الدّالة الوسيطية f_m ذات المتغيّر x والوسيط الحقيقي m المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كمايلي:

$$f(x)=\frac{4x^2+(m+8)x-m+4}{2(x-2)}$$

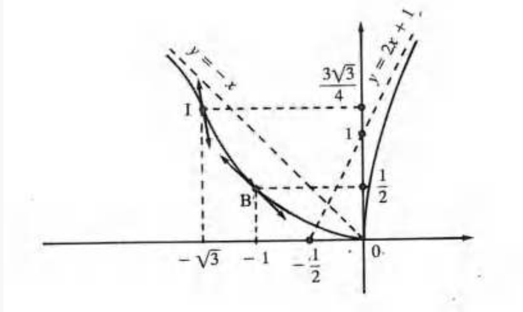
ونسمّي (C_{f_m}) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- بيّن أنّه توجد نقطة ثابتة تنتمي إليها جميع المنحنيات (C_{f_m}).

2- ماهو المنحنى الذي يشمل $A\left(\frac{7}{4};0\right)$.

التمرين الثالث و ثلاثون

I. (C_f) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$، الشكل المقابل يُوضّح ذلك:



- بقراءة بيانية، أوجد مايلي، مع التبرير:

أ- نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب- $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$ و $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$.

ج- $f'(-1)$ و $f''\left(-\sqrt{3}\right)$.

د- $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$.

II. نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=\sqrt{f(x)}$$

ونسمّي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- احسب: $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)$.

2- أ- من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، احسب: $g'(x)$.

ب- عيّن إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

3- شكّل جدول تغيّرات الدّالة g.

4- m وسيط حقيقي. انطلاقا من جدول تغيّرات الدّالة g، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $g(x)=|m-2|$.

التمرين الرابع و ثلاثون

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-2x+1$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 احسب الدالة المشتقة للدالة f.

2- بين أنه من أجل $x\prec 0$ لدينا : $f'(x)\prec 0$.

3- بين أنه من أجل $x\succeq 0$ لدينا : $f'(x)\prec 0$.

4- بين أنه من أجل كل $x\prec 0$ لدينا : $f(x)+3x-1=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

5- احسب $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+3x-1)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

6- بين أنه من أجل كل $x\succ 0$ لدينا : $f(x)+x-1=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

7- احسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x-1)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

8- أ- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1.3\prec\alpha\prec 1.4$.

ب- احسب $f(0)$.

9- مثّل بيانيا (C_f).

II. نعتبر الدّالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$h(x)=(f(x))^2$$

1- احسب: $\lim_{x\to+\infty}h(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}h(x)$.

2- ادرس إتّجاه تغيّر الدّالة h، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

التمرين الخامس و ثلاثون

I. نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$g(x)=x+\sqrt{x^2+1}$$

1- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\succ 0$.

II. نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=xg(x)$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- ادرس تغيّرات الدّالة f.

2- اكتب معادلة للمماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 0.

3- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (T).

4- مثّل بيانيا (C_f).

5- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $f(x)=x+m$.

III. نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$k(x)=f\left(x^2\right)$$

1- ادرس إتّجاه تغيّر الدّالة k بطريقتين مختلفتين.

2- شكّل جدول تغيّرات الدّالة k.

التمرين السادس و ثلاثون

I. نعتبر الدّالة f المعرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{2x-1}}{x}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- ادرس قابلية اشتقاق الدّالة f في $\frac{1}{2}$ من اليمين، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2- ادرس تغيّرات الدّالة f.

3- بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]1;2[$: $|f'(x)|\prec 1$.

4- بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]1;2[$: $f''(x)=\frac{3x^2-6x+2}{x^3\sqrt{(2x-1)^3}}$.

5- استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة نقطة انعطاف، يُطلب تعيين احداثيها.

6- مثّل بيانيا (C_f).

7- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $x+\sqrt{2x-1}-mx=0$.

II. 1- حل في المجال $[0;\pi]$ المتراجحة: $\sin(x)\succeq\frac{1}{2}$.

2- نعتبر الدّالة k المعرفة على $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ بـ:

$$k(x)=f(\sin x)$$

أ- ادرس إتّجاه تغيّر الدّالة h بطريقتين مختلفتين.

ب- شكّل جدول تغيّرات الدّالة h.

التمرين السابع و ثلاثون

I. نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب تغيّرات الدّالة f.

2- اكتب معادلة للمماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 0.

3- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ احسب: $f(-x)+f(x)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (T)، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f)؟

5- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1 \prec \alpha \prec 2$.

6- مثّل بيانيا المستقيم (T)، ثمّ المنحنى (C_f).

II. نعتبر الدّالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$h(x)=1+\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$$
ونسمّي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس قابلية اشتقاق الدّالة h في 0، ثمّ فسّر ذلك هندسيا.

2- بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

3- انطلاقا من (C_f)، مثّل بيانيًا (C_h).

التمرين الثامن و ثلاثون

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $[-2;2]$ بـ :
$$f(x)=x-\sqrt{4-x^2}$$
ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 - أ - ادرس قابلية اشتقاق الدّالة f في -2، ثمّ في 2 من اليسار.

ب - فسّر ذلك هندسيا.

2 - احسب $f'(x)$، ثمّ ادرس إشارتها.

3 - شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

4 - حل في المجال $[0;2]$ المعادلة $f(x)=0$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

5 - اكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

6 - مثّل بيانيًا (C_f).

التمرين التاسع و ثلاثون

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;1]$ بـ :
$$f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$$
ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، حيث: $\|\vec{j}\|=4cm$.

1- أ- أحسب $\lim\limits_{h \underset{>}{\to} 0}\frac{f(h-1)-f(-1)}{h}$ و $\lim\limits_{h \underset{<}{\to} 0}\frac{f(h+1)-f(1)}{h}$، ماذا تستنتج بالنسبة للدّالة f؟

ب- فسّر النتيجتين هندسيا

2- بيّن أنّه من أجل كل x من $]-1;1[$ فإنّ : $f'(x)=\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3- أُدرس إشارة $f'(x)$ ثمّ استنتج اتّجاه تغيّر الدّالة f على المجال $[-1;1]$.

4- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

5- اكتُب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

6- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (T).

7- مثّل بيانيا المستقيم (T)، ثمّ المنحنى (C_f).

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $[-1;1]$ بـ :
$$g(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}$$

1- بيّن أنّ منحنى الدالة g هو صورة المنحنى (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ثمّ مثّله بيانيّا.

2- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية : $g(x)=e^m$.

التمرين أربعون

m وسيط حقيقي يختلف عن 4.

نعتبر الدّالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ:
$$f_m(x)=\frac{2x^2+mx+2}{(x+1)^2}$$
ونسمّي (C_{f_m}) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2- ادرس حسب قيم m كل من: $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f_m(x)$ و $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} f_m(x)$، ثمّ فسّر ذلك هندسيا.

3- أ- ادرس حسب قيم m اتجاه تغيّر الدّالة f_m.

ب- حسب قيم m، شكّل جدول تغيّرات الدّالة f_m.

4- بيّن أنّه توجد مستقيمات مماسية لـ (C_{f_m}) موازية لحامل محور الفواصل في نقطة، يُطلب تعيينها.

5- برهن أنّ جميع المنحنيات (C_{f_m}) تمرّ من نقطة وحيدة ثابتة، يُطلب تعيين إحداثييها.

6- أوجد نقط تقاطع (C_{f_m}) مع محوري الإحداثيات.

7- مثّل بيانيا وفي نفس المعلم كل من $(C_{f_{-4}})$ و (C_{f_8}).

دراسة دوال أسية

التمرين الأول

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x - e^{-x}$.

1 - ادرس تغيّرات الدّالة g .

2 - أ - بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًّا وحيدا α حيث : $0.5 \prec \alpha \prec 0.6$.

ب - استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x+1}$.

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1 - أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2 - أ - بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$.

ب- عيّن دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

3 شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

4 - بيّن أنّ $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كانت $g(x) = 0$ ثمّ استنتج قيمة $f(\alpha)$.

5 - مثّل بيانيًا (C_f).

(III) نعتبر الدّالة h المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$h(x) = |f(x)|$$

ونسمّي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1- اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

2- انطلاقا من (C_f)، مثّل بيانيًا (C_h).

التمرين الثاني

(I) نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x+3}$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$ حيث : $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 2cm$.

1 - أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2 - بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ : $f'(x) = \left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$.

3 - أ - أُدرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

ب - عيّن $f''(\ln 3)$ - دون حساب عبارة $f''(x)$ - برّر إجابتك .

4 - أ - بيّن أنّ المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $(-\infty)$.

ب - بيّن أنّ المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $(+\infty)$.

5 - أُدرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

6 - أُكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

7 - بيّن أنّ النقطة $I(\ln(3); \ln(3))$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

8 - بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α في المجال $]-2; -1[$. ثمّ عيّن حصرا للعدد α سعته 10^{-1} .

9 - أنشئ المستقيمين (Δ_1) ، (Δ_2) ، المماس (T) والمنحنى (C_f) .

10 - ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي غير المعدوم m المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(-|x|) = \ln(|m|)\, x + 2$.

(II) نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = f(3x-2)$. - عبارة $g(x)$ غير مطلوبة - .

1 - ادرس تغيّرات الدّالة g .

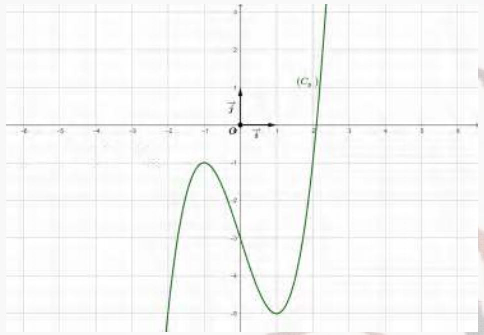
2 - تحقّق من أنّ : $g\left(\dfrac{\alpha+2}{3}\right) = 0$ ثمّ بيّن أنّ : $g'\left(\dfrac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$.

3 - استنتج معادلة المماس (D) لمنحني الدّالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\dfrac{\alpha+2}{3}$.

4 - تحقّق من أنّ : $y = \frac{3\alpha^2}{4}x - \frac{\alpha^2(\alpha+2)}{4}$ معادلة للمستقيم (D) .

التمرين الثالث

(I) a، b و c أعداد حقيقية.
نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax+b)e^x + c$.
ونسمّي (C) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، كما في الشكل أدناه:



1 - بقراءة بيانية، أوجد مايلي:
أ- $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.
ب- $g(0)$ و $g'(0)$.
2- ممّا سبق، أوجد: a، b و c.
3- نضع: $g(x) = (x-1)e^x - 1$.
أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α على $\mathbb{R}$، ثمّ تحقّق من أنّ: $1.2<\alpha<1.3$.
ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي :
$$f(x) = \frac{x}{e^x+1}$$
ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec i,\vec j)$.
1- أ- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
ب- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2- أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.
ب- ادرس إتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
3- عيّن دون حساب: $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
4- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمرّ من المبدأ، يُطلب كتابة معادلة له.
5- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\alpha-1$، ثمّ أوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2}.
6- أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.
ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).
7- مثّل بيانيّا المماس (T)، ثمّ المنحنى (C_f).
8- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$.

التمرين الرابع

(I) نعتبر الدّالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي :
$$f(x) = x-1+\frac{4}{(e^x+1)}$$
ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec i,\vec j)$.
1- أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.
ب- ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f)؟
ج- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.
2- برهن أنّ النقطة $I(0;1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f).
3- أ- بيّن أنّ: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))=0$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
ب- احسب: $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)$، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f)؟
4- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-2.77<\alpha<-2.76$.
5 أ- احسب $f(0)$.
ب- مثّل بيانيا (C_f).

(II) نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = f(4x+1)$ -عبارة $g(x)$ غير مطلوبة-.
1 ادرس تغيّرات الدّالة g.
2- تحقّق من أنّ: $g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)=0$، ثمّ بيّن أنّ: $g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)=4f'(\alpha)$.
3- استنتج معادلة المماس (T) لمنحنى الدّالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$.
4- تحقّق من أنّ: $y=(1+\alpha)^2x - \frac{(1+\alpha)(\alpha^2-1)}{4}$ معادلة للمماس (T).

(III) نعتبر الدّالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي :
$$k(x)=f(|x|)$$
ونسمّي (C_k) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec i,\vec j)$.
1- بيّن أنّ الدّالة k زوجية.
2- أ- بيّن كيف يمكن تمثيل (C_k) انطلاقا من (C_f).
ب- انطلاقا من (C_f). مثّل بيانيّا (C_k).

(IV) نعتبر الدّالة h المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي :
$$h(x)=x+\frac{4}{e^x+1}$$
ونسمّي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec i,\vec j)$.
1- تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)+1$.
2- أ- استنتج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه.
ب- انطلاقا من (C_f). مثّل بيانيّا (C_h).

التمرين الخامس

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x+2-e^x$.
1- ادرس تغيّرات الدّالة g.
2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّان α و β حيث: $1.14<\alpha<1.15$ و $-1.9<\beta<-1.8$.
3 استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي :
$$f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$، ثمّ فسّر ذلك هندسيا.

2- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

3- ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4- عيّن دون حساب كل من: $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و $\lim_{x\to\beta}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}$، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

5- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$، ثمّ أوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ سعته 10^{-1}.

6- نعتبر الدّالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=e^x-xe^x-1$.

- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)\le 0$.

7- نضع من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $p(x)=(x^2+1)e^{2x}+xe^x-2e^x+1$.

- تحقق من أنّ: $p(0)=0$.

8- أ- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x+5$.

ب- اكتب معادلة للمماس (T).

ج- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (T)، ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f)؟

9- نأخذ: $f(\beta)\simeq -1.195$. مثّل بيانيّا المستقيم (T)، ثمّ المنحنى (C_f).

10- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $e^x(1-mx^2)+mx-1=0$.

التمرين السادس

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=2x+1-xe^{x-1}$

ونسمّي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=2cm$.

1 - ادرس تغيّرات الدّالة g' .

2 - احسب $g'(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$.

3 - ادرس تغيّرات الدّالة g .

4 - أ - بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مقارب لـ (C_g) بجوار $(-\infty)$.

ب - ادرس وضعية المنحنى (C_g) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) على $\mathbb{R}$.

5 - أ - بيّن أنّ المنحنى (C_g) يقبل مماسا (D) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيين إحداثييها .

ب - اكتب معادلة المماس (D) .

6 - بيّن أنّ المنحنى (C_g) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث : $1.9\prec\alpha\prec2$ و $-0.6\prec\beta\prec-0.5$.

6 - أنشئ (Δ) ، (D) ثمّ المنحنى (C_g) .

3 - نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي الموجب تماما m التالية : $(E)......g(x)=2x+\ln m$.

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات . https://youtu.be/BlkFbE-ti_I

التمرين السابع

نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$.

ب- استنتج أنّ الدّالة f فردية.

2- احسب: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3- أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$، ثمّ ادرس إشارة $f'(x)$.

ب- ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f)؟

ج- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

4- أ- بيّن أنّ: $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)\right)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب- احسب: $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}x\right)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

5- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة: $y=-\frac{1}{2}x+1$.

6- مثّل بيانيا (C_f).

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات . https://youtu.be/lSpzGlcRlI0

التمرين الثامن

نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=-2e^{-2x}+e^{-x}+1$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب- بيّن أنّ: $f(x)=e^{-2x}(e^{2x}+e^x-2)$، ثمّ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{4-e^x}{e^{2x}}$، ثمّ ادرس إشارة $f'(x)$.

3- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

4- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=1$.

5- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=0$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

6- احسب $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ -النتيجة مدوّرة إلى 10^{-2}-.

7- مثّل بيانيا (C_f) على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

8- m وسيط حقيقي.

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x)=m+2$.

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات . https://youtu.be/fJ5eqmiZ5hw

دراسة دوال لوغاريتمية

التمرين الأول

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

1 - ادرس تغيّرات الدالة g.

2 - احسب $g(0)$، ثمّ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كمايلي :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 - احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 - بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $(+\infty)$.

3 - ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

4 - بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

5 - بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

6 - مثّل بيانيًا المنحنى (C_f).

التمرين الثاني

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x) = 1 + x^2 + \ln x$.

1 - ادرس تغيّرات الدّالة g .

2 - بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث : $0.32 \prec \alpha \prec 0.33$.

3 - استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = -x + \dfrac{2+\ln x}{x}$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 - احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 - بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{x^2}$، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3 - بيّن أنّ : $f(\alpha) = 2\left(\dfrac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$، ثمّ عيّن حصرًا للعدد $f(\alpha)$.

4 - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ ، ثمّ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

- ادرس الوضع النّسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

5 - أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها. اكتب معادلة المماس (T).

6 - مثّل بيانيًا كل من المستقيم (Δ)، المماس (T) والمنحنى (C_f). علما أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_0 و x_1 حيث : $0.1 \prec x_0 \prec 0.2$ و $1.5 \prec x_1 \prec 1.6$.

(III) نعتبر الدّالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي :

$$f(x) = -x + 1 + \frac{2+\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمّي (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- أ- بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$: $h(x) = f(x+1) + 2$.

ب- بيّن أنّ المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

2- أ- بيّن أنّ المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه.

ب- مثّل بيانيًا المنحنى (C_h).

3- m وسيط حقيقي غير معدوم.

(T_m) مستقيم معادلته: $y = \ln(|m|)\,x + 1$.

أ- برهن أنّ جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة وحيدة يُطلب تعيينها.

ب- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $h(x) = \ln(|m|)\,x + 1$.

التمرين الثالث

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln|x|} + x & ; x \in]-\infty;0[- \{-1\} \\ \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{2(\ln(x))^2} & ; x \in]0;+\infty[- \{1\} \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

ونُسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1 ادرس قابلية إشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$ ، فسر النتيجة هندسيا .

2 - ادرس تغيرات الدالة f .

3 - أ - بين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) مقاربا مائلا بجوار $(-\infty)$ يطلب تعين معادلته .

ب - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $]-\infty;0[- \{-1\}$.

4 - حل المعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]0;+\infty[- \{1\}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

5 - بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α على المجال $\left]-2;-\dfrac{3}{2}\right[$.

6 - هل توجد مماسات لـ (C_f) تمر من مبدأ المعلم $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$ ؟ برر إجابتك .

7 - مثّل بيانيّا كل من المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

(II) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ : $h(x) = f(|x|)$.

ونُسمّي (C_h) منحنيها البياني في مستو المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$.

1 - بين أن الدّالة h زوجية .

2 - اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

3 - مثّل بيانيّا المنحنى (C_h) موضحا طريقة الإنشاء .

4 - نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية : $h(x) = -(m^2 + a)$ .... (E) حيث a عدد حقيقي .

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

التمرين الرابع

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي :

$$g(x) = (\ln x)^3 + 1$$

1 - ادرس تغيرات الدالة g .

2 - حل المعادلة $g(x) = 0$.

3 - استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[\cup]0;1[$ كما يلي :

$$f(x) = (\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}$$

ونُسمّي (C_f) منحنيها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1 - أ - احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب - بين أنه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[\cup]0;1[$ يكون : $f'(x) = 2\dfrac{g(x)}{x(\ln x)^2}$.

ج - استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2 - نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x) = (\ln x)^2 + 1$.

ونُسمّي (C_h) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1 - ادرس تغيرات الدالة h .

2 - احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - h(x)]$ ، فسر النتيجة هندسيا .

3 - ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) .

3 - بين أن (C_h) يقبل A نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثيها .

4 - اكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_h) في النقطة A .

5 - احسب $f(e)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

6 مثّل بيانيّا المنحنيين (C_f) و (C_h) مع المستقيم (T) في نفس المعلم .

7 - نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية :

$$e^m(\ln x)^3 + e^m(\ln x) - (\ln x) - 2e^m = 0 \text{............} (F)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (F) .

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

https://youtu.be/yUL3lFE2UG4 . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات .

التمرين الخامس

(I) f دالة معرّفة على $\mathbb{R} - [-1;1]$ بجدول تغيراتها التّالي :

x	$-\infty$			-1	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$+$	
$f(x)$			$-\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$	$-\infty$					$+\infty$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ حيث : $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 2cm$.

1- علما أنّ الدّالة f فردية :

أ - عيّن إشارة $f'(x)$ مع التبرير ، ثمّ استنتج اتجاه تغير الدّالة f .

ب - بيّن أنّ : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$ و $f\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

ج - أكمل جدول تغيّرات الدّالة f السابق .

2- نقبل أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

أ - مثّل بياني كل من المستقيم (d) والمنحنى (C_f) . - نأخذ : $\sqrt{3} \simeq 1.7$ و $f(\sqrt{3}) \simeq 3$ - .

3- نفرض أنّ عبارة $f(x)$ هي من الشكل : $f(x) = ax + b + \ln\left(c + \dfrac{2}{x-1}\right)$ حيث : a ، b و c أعداد حقيقية .

أ - باستعمال نتائج الجدول أعلاه بيّن أنّ : $a = 1$ ، $b = 0$ و $c = 1$.

4- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية : $x - \dfrac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0$.

(II) نعتبر الدّالة g المعرفة على $]1;+\infty[$ كمايلي : $g(x) = \ln(f(x))$.

1- أُدرس تغيرات الدالة g .

التمرين السادس

نعتبر الدّالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$$

1- أ- بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ: $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$.

ب- بيّن أنّ الدّالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

2- استنتج أنّه من أجل كل x من المجال $[1;+\infty[$: $0 \preceq \ln x \preceq 2\sqrt{x}$ (لاحظ أنّ: $2\sqrt{x} - 2 \preceq 2\sqrt{x}$).

3- أ- بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[1;+\infty[$ فإنّ: $\dfrac{8}{\sqrt{x}} \succeq \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \succeq 0$، ثمّ استنتج النّهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$.

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

. الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات . https://www.youtube.com/watch?v=PBeTbFpwiMI&t=4s

التمرين السابع

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \ln x + x - 3$.

1- ادرس تغيرات الدّالة g.

2 - بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدًا α حيث: $2.2 \prec \alpha \prec 2.21$.

3- عيّن إشارة $g(x)$ على المجال: $]0;+\infty[$

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$.

2- أ- احسب: $f'(x)$، ثمّ ادرس إشارتها.

ب- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3- عيّن دون حساب النّهاية التالية: $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$، ثمّ فسّر النّتيجة هندسيا.

4- بيّن أنّ: $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

5- حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$، ثمّ فسّر النّتيجة هندسيا.

6- بأخذ: $f(\alpha) \simeq -0.66$. مثّل بيانيًا المنحنى (C_f). على المجال $]0;10]$.

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

. الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات . https://www.youtube.com/watch?v=9e3zBhsbJnU

التمرين الثامن

(I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = x^2 - 2 + \ln x$$

1- ادرس تغيّرات الدّالة g.

2- أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدًا α في المجال: $]0;+\infty[$.

ب- تحقق من أنّ: $1.31 \prec \alpha \prec 1.32$.

3- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

4- برهن أنّ: $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كالآتي:

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$.

2- بيّن أنّ إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

4- بيّن أنّ: $f(\alpha) = \alpha^2(1+\alpha^2)$.

5- استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(III) • نسمّي (Γ) التمثيل البياني للدّالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = \ln x$.

• النقطة A ذات الاحداثيات $(0;2)$.

• M نقطة من المنحنى (Γ) فاصلتها x.

1- بيّن أنّ المسافة AM تُعطى بـ: $AM = \sqrt{f(x)}$.

2- نعتبر الدّالة k المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ- برهن أنّ للدّالتين f و k نفس إتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$.

ب- برهن أنّ المسافة AM أصغرية في نقطة P من (Γ)، يُطلب تعيين إحداثييها.

ج- برهن أنّ: $AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3- هل المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (Γ) في النقطة P؟ برّر إجابتك.

الحل

.I

1 دراسة تغيّرات الدّالة g

النّهايات

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (x^2 - 2 + \ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 2 + \ln x) = +\infty$$

المشتقة : الدّالة g معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالّتها المشتقة معرفة كالآتي:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$$

إشارة المشتقة واتجاه التغيّر

إنّ $g'(x) \succ 0$ على المجال $]0;+\infty[$ وبالتالي الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول التغيّرات

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2 تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدًا α في المجال: $]0;+\infty[$

لدينا من جدول التغيرات الدّالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) \times \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \prec 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدًا α في المجال: $]0;+\infty[$.

التحقّق من أنّ: $1.31 \prec \alpha \prec 1.32$

لدينا: $g(1.31) = -0.13$ و $g(1.32) = 0.02$. إذن $1.31 \prec \alpha \prec 1.32$.

3 تعيين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

4 برهان أنّ: $\ln\alpha = 2-\alpha^2$

لدينا: $g(\alpha) = 0$ يكافئ:

$$\alpha^2 - 2 + \ln\alpha = 0$$

يكافئ:

$$\ln\alpha = 2 - \alpha^2$$

.II

1 حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) &= \lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(x^2+(2-\ln x)^2\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

لأنّ:

- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \ln x = -\infty$

و

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(x^2+(2-\ln x)^2\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

لأنّ:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

2 تبيين أنّ إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

لدينا الدّالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة كالتالي:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)(2-\ln x)\\ &= 2x - \frac{2}{x}(2-\ln x)\\ &= \frac{2x^2-4+2\ln x}{x}\\ &= \frac{2\left(x^2-2+\ln x\right)}{x}\\ &= \frac{2}{x}g(x)\end{aligned}$$

بما أنّ: $\frac{2}{x} \succ 0$ فإنّ إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3 تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4 تبيين أنّ: $f(\alpha) = \alpha^2\left(1+\alpha^2\right)$

لدينا:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + (2-\ln\alpha)^2 \cdots\cdots (1)$$

ومماسبق وجدنا:

$$\ln\alpha = 2-\alpha^2 \cdots\cdots (2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \left(2-\left(2-\alpha^2\right)\right)^2$$

يكافئ:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^4$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \alpha^2\left(1+\alpha^2\right)$$

5 استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

من جدول تغيّرات الدّالة f لدينا:

x	0		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	

.III

1 تبيين أنّ المسافة AM تُعطى بـ: $AM = \sqrt{f(x)}$ على المجال $]0;+\infty[$

لدينا: M نقطة من (Γ) معناه إحداثياتها هما: $(x;\ln x)$ ومنه المسافة تعطى بما يلي:

$$\begin{aligned}AM &= \sqrt{(x-0)^2+(\ln x-2)^2}\\ &= \sqrt{x^2+(-(2-\ln x))^2}\\ &= \sqrt{x^2+(2-\ln x)^2}\\ &= \sqrt{f(x)}\end{aligned}$$

2 أ- برهان أنّ للدّالتين f و k نفس إتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$

هنا نستعمل إتجاه تغيّر مركب دالتين -عُد لدروس السنة الثانية ستجد هذا بالتفصيل-

نضع من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $u(x) = \sqrt{x}$.

لاحظ أنّ: $k = u \circ f$.

نعلم أنّ الدّالة u متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ والدّالة f موجبة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالتالي فإنّ لـ f و k نفس إتجاه التغيّر.

ملاحظة: يمكنك اشتقاق الدّالة k لتجد أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ وتقوم بدراسة إشارتها ومن ثمّ إتجاه التغيّر.

ب- برهان أنّ المسافة AM أصغرية في نقطة P من (Γ)، يُطلب تعيين إحداثييها

بما أنّ لـ f و k نفس إتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$ فإنّ: الدّالة k تبلغ قيمة حدية صغرى هي $x=\alpha$ وبالتالي المسافة أصغرية لمّا $x=\alpha$ إذن:

$$P(\alpha;\ln\alpha)$$

يكافئ:

$$P(\alpha;2-\alpha^2)$$

ج- برهن أنّ: $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$

لدينا مايلي:

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{(\alpha-0)^2+(2-\alpha^2-2)^2}\\ &=\sqrt{\alpha^2+\alpha^4}\\ &=\sqrt{\alpha^2(1+\alpha^2)}\\ &=\sqrt{\alpha^2}\sqrt{1+\alpha^2}\\ &=|\alpha|\sqrt{1+\alpha^2}\\ &=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}\end{aligned}$$

3 هل المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (Γ) في النقطة P؟ برّر إجابتك.

لنبدأ أوّلا بميل المستقيم المماس لـ (Γ) في النقطة P هو:

$$h'(\alpha)=\ln'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$$

ولدينا ميل المستقيم (AP) هو:

$$\begin{aligned} a &=\frac{y_P-y_A}{x_P-x_A}\\ &=\frac{2-\alpha^2-2}{\alpha-0}\\ &=\frac{-\alpha^2}{\alpha}\\ &=-\alpha\end{aligned}$$

تذكّر أنّه: يتعامد مستقيمان إذا كان جداؤ ميليهما يساوي -1.

لدينا: $-\alpha\times\frac{1}{\alpha}=-1$ وبالتالي المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (Γ) في النقطة P.

التمرين التاسع

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=xe^x-x+1$

1 - ادرس تغيّرات الدّالة g' .

2 - احسب $g'(0)$ ثمّ استنتج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$.

3 - بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)-1\succeq 0$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كـمايلي: $f(x)=\ln(xe^x-x+1)$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 - احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

2 - بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$.

3 - شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

4 - احسب: $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\ln(-x))$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

5 - احسب: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

6 - نعتبر الدّالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $u(x)=e^x+x-2$.

أ - بيّن أنّ المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث: $0\prec\alpha\prec1$ ، ثمّ عيّن حصرا لـ α سعته 10^{-1} .

ب - استنتج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}$.

7 - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.

8 - أ - بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (δ) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ في نقطة يُطلب تعيين إحداثييها .

ب - برّر لماذا المستقيمان (δ) و (Δ) متوازيان.

ج- أوجد حصرًا للعدد $f(\alpha)-\alpha$ (تُدوّر النتائج إلى 10^{-2}) .

د - اكتب معادلة المماس (δ) .

ه - احسب $f(1)$ و $f(-2)$.

9 - اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

10 - مثّل بيانيًا كل من المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدّالة $x\mapsto\ln(-x)$ والمنحنى (C_f) .

11 - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي a عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x)=(2-e^{-1})x+a$.

11 - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي l عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x)=x+l$.

12 - (T_n) مستقيم ذو المعادلة $y=(2e^n-e^{n-1})x-(e^n-e^{n-1})$.

أ - برهن أنّ جميع المستقيمات (T_n) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيين إحداثييها .

ب - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي n عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$f(x)=(2e^n-e^{n-1})x-(e^n-e^{n-1})$$

(III) h الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$h(x)=\ln\left(\frac{1}{xe^{x-1}-xe^{-1}+e^{-1}}\right)$$

ونسمّي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 - بين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ : $h(x)=-f(x)+1$.

2 - أ - بيّن أنّ المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بتركيب تحويلين نقطيين بسيطين يطلب تعيينهما .

ب - مثّل بيانيّا المنحنى (C_h) .

3 - نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي m التالية : $x(e^x-1)-m=0\ldots\ldots(E)$ حيث $m\neq-1$.

- باستعمال المنحنى (C_h) ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

(IV) نعتبر الدّالة k المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $k(x)=h(2x-2)+f(\alpha)$. - عبارة $k(x)$ غير مطلوبة - .

1 - ادرس تغيّرات الدّالة k .

2 - تحقّق من أنّ $k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)=1$ ، ثمّ بيّن أنّ : $k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)=-2f'(\alpha)$.

3 - استنتج معادلة المماس (D) لمنحنى الدّالة k عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{2}$.

4 - تحقّق من أنّ : $y=-2x+\alpha+3$ معادلة للمستقيم (D) .

5 - احسب $k(-1)$.

(V) p الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$p(x)=f(|x|)$$

ونسمّي (C_p) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 - أ - احسب : $\lim_{x\overset{\succ}{\to}0}\frac{p(x)}{x}$ و $\lim_{x\overset{\prec}{\to}0}\frac{p(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدّالة p ؟

ب - فسّـر النتيجة هندسيا .

2 - أ - من أجل كل x عدد حقيقي ، احسب $p(x)-p(-x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدّالة p ؟

ب - فسّـر النتيجة هندسيا .

3 - اكتب $p(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

4 - باستعمال المنحنى (C_f) ، مثّل بيانيًا المنحنى (C_p) مبيّنا طريقة الإنشاء .

(VI) نعتبر الدّالة q المعرفة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ كمايلي :

$$q(x)=k(\tan x)$$

ونسمّي (C_q) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1 - احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\frac{\pi}{2}} q(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} q(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا .

2 - أ - ادرس بطرقتين مختلفتين اتجاه تغيّر الدّالة q .

ب - شكّل جدول تغيّراتها .

3 - حل في المجال $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة : $\tan x = -1$.

4 - اكتب معادلة المماس (L) للمنحني (C_q) في النقطة ذات الترتيبة $1 - f(-4) + f(\alpha)$.

الحل

الجزء الأول

1 دراسة تغيّرات الدّالة g'

حساب المستقة الأولى g'

الدّالة g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ : $g'(x) = e^x + xe^x - 1$.

حساب نهايات الدّالة g'

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} g'(x) &= \lim_{x\to-\infty} (e^x + xe^x - 1)\\ &= -1\end{aligned}$$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g'(x) &= \lim_{x\to+\infty} (e^x + xe^x - 1)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

حساب المستقة الثانية g''

الدالة g' معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ :

$$\begin{aligned}g''(x) &= e^x + e^x + xe^x\\ &= e^x(x+2)\end{aligned}$$

جدول إشارة $g''(x)$

إشارة $g''(x)$ من إشارة $x+2$ لأنّ $e^x \succ 0$ ومنه إشارة $g''(x)$ تكون كالتالي :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

إتجاه تغيّر الدّالة g'

- لمّا : $x \in]-\infty; -2]$ لدينا : $g''(x) \preceq 0$ ومنه الدّالة g' متناقصة .
- لمّا : $x \in [-2; +\infty[$ لدينا : $g''(x) \succeq 0$ ومنه الدّالة g' متزايدة .

جدول تغيّرات الدّالة g'

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	-1	$\searrow$	$-1-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2 حساب $g'(0)$ ثمّ استنتاج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$

لدينا : $g'(0) = e^0 + (0)e^0 - 1 = 0$ ومنه من جدول التغيرات تكون إشارة $g'(x)$ كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

3 تبيين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) - 1 \succeq 0$

حساب نهايات الدّالة g

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x - x + 1) = +\infty$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (xe^x - x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x(e^x - 1) + 1) = +\infty$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - 1) = +\infty$

جدول تغيّرات الدّالة g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول تغيّرات الدّالة g لدينا : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \succeq 1$ ومنه : $g(x) - 1 \succeq 0$.

الجزء الثاني

1 حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(xe^x - x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x(e^x - 1) + 1) = +\infty$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(xe^x - x + 1) = +\infty$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$

2 تبيين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

الدّالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{e^x + xe^x - 1}{xe^x - x + 1} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

3 تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$ لأنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ : $g(x) \succ 0$ ومنه جدول تغيّرات الدّالة f يكون كالتالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4 حساب : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-\ln(-x))$ ثمّ تفسير النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\ln(-x))=\lim_{x\to-\infty}(\ln(xe^x-x+1)-\ln(-x))=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{xe^x-x+1}{-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(-e^x+1-\frac{1}{x}\right)=0$$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

التفسير الهندسي

المنحنى (C_f) ومنحنى الدّالة $x\mapsto\ln(-x)$ متقاربان في جوار $(-\infty)$.

5 حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ والاستنتاج بالنسبة للمنحنى (C_f)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)&=\lim_{x\to+\infty}(\ln(xe^x-x+1)-x)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(xe^x\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right)\right)-x\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(xe^x)+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right)-x\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x)+\ln(e^x)+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right)-x\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x)+x+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right)-x\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x)+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right)\right)\\&=+\infty\end{aligned}$$

نستنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

6 تبيين أنّ المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث : $0\prec\alpha\prec1$

الدّالة u معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $u'(x)=e^x+1$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $u'(x)\succ0$.

وكذلك : $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+x-2)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x-2)=+\infty$

جدول تغيّرات الدّالة u

x	$-\infty$		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا : $u(0)=-2$ و $u(1)=e-1$

الدّالة u مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1[$ و $u(0)\times u(1)\prec0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0\prec\alpha\prec1$.

تعيين حصرا لـ α سعته 10^{-1}

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$u(x)$	-2	-0.79	-0.57	-0.35	-0.10	0.14

إذن : $0.4\prec\alpha\prec0.5$.

استنتاج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

7 دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$

لدينا : $f(x)-x=\ln(xe^x-x+1)-x$.

نضع : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $s(x)=\ln(xe^x-x+1)-x$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}s(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}s(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=+\infty$ و $s(\alpha)=f(\alpha)-\alpha$.

الدّالة s معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ :

$$s'(x)=f'(x)-1=\frac{g'(x)}{g(x)}-1=\frac{g'(x)-g(x)}{g(x)}=\frac{e^x+xe^x-1-xe^x+x-1}{xe^x-x+1}=\frac{e^x+x-2}{xe^x-x+1}=\frac{u(x)}{g(x)}$$

إشارة $s'(x)$ من إشارة $u(x)$ لأنّ : $g(x)\succ0$ ومنه جدول تغيّرات الدّالة s يكون كالتالي :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$s'(x)$		$-$	0	$+$	
$s(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$s(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا ممّا سبق : $f(1)=1$ يكافئ : $f(1)-1=0$ يكافئ : $s(1)=0$ وكذلك : $g(0)=1$ يكافئ : $\ln g(0)=\ln1$ يكافئ : $f(0)-0=0$ ومنه : $s(0)=0$.

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) نُلخّص في الدول التالي :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$s(x)=f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

- $(C_f)\cap(\Delta)=\{O(0;0)\}$
- $(C_f)\cap(\Delta)=\{M(1;1)\}$

8 تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (δ) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ في نقطة يُطلب تعيين إحداثييها

تذكير

يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1.

(δ) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ في النقطة ذات الفاصلة x_0 معناه : $f'(x_0)\times -1=-1$ أي : $f'(x_0)=1$ أي: $\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)}=1$ يكافئ : $\dfrac{e^{x_0}+x_0e^{x_0}-1}{x_0e^{x_0}-x_0+1}-1=0$ يكافئ : $\dfrac{e^{x_0}+x_0e^{x_0}-1-x_0e^{x_0}+x_0-1}{x_0e^{x_0}-x_0+1}=0$ يكافئ : $\dfrac{u(x_0)}{g(x_0)}=0$ وبما أنّ : $g(x_0)\succ 0$ فإنّ : $u(x_0)=0$ ومنه : $x_0=\alpha$.

إذن (δ) يوازي المستقيم (Δ) في النقطة ذات الإحداثيات $(\alpha;f(\alpha))$.

التبرير لماذا المستقيمان (δ) و (Δ) متوازيان.

لدينا المستقيم (Δ) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ لأنّ جداء ميليهما يساوي -1. والمستقيم (δ) أيضا عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x$-من معطيات التمرين-.

ونعلم أنّه يتوازى مستقيمان إذا كانا عموديان على نفس المستقيم.

ممّا يوحي إلى أنّ المستقيمان (δ) و (Δ) متوازيان.

إيجاد حصراً للعدد $f(\alpha)-\alpha$

لدينا : $u(\alpha)=0$ يكافئ : $e^{\alpha}+\alpha-2=0$ ومنه : $\boxed{e^{\alpha}=2-\alpha}$

ولدينا : $f(\alpha)=\ln(\alpha e^{\alpha}-\alpha+1)=\ln(\alpha(2-\alpha)-\alpha+1)$ ومنه : $\boxed{f(\alpha)=\ln(-\alpha^2+\alpha+1)}$

لدينا : $(1)\cdots 0.5\prec\alpha\prec 0.4$ ، بتربيع الطرفين نجد : $(2)\cdots(0.5)^2\prec\alpha^2\prec(0.4)^2$.

بضرب كل من المتراجحتين (1) و (2) في العدد -1 نجد : $(3)\cdots -0.4\prec-\alpha\prec-0.5$ و $(4)\cdots -(0.4)^2\prec-\alpha^2\prec-(0.5)^2$.

بجمع (1) مع (4) طرف بطرف نجد : $(5)\cdots -(0.4)^2+0.5\prec-\alpha^2+\alpha\prec-(0.5)^2+0.4$.

بإضافة العدد 1 للمتراجحة (5) نجد $-(0.4)^2+0.5+1\prec-\alpha^2+\alpha+1\prec-(0.5)^2+0.4+1$.

بما أنّ الدّالة $x\mapsto\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ فإنّ :

$$\ln\left(-(0.5)^2+0.4+1\right)\prec\ln\left(-\alpha^2+\alpha+1\right)\prec\ln\left(-(0.4)^2+0.5+1\right)\cdots(6)$$

بجمع (6) مع (3) طرف بطرف نجد :

$$\ln\left(-(0.5)^2+0.4+1\right)-0.5\prec\ln\left(-\alpha^2+\alpha+1\right)-\alpha\prec\ln\left(-(0.4)^2+0.5+1\right)-0.4$$

ومنه : $\boxed{-0.36\prec f(\alpha)-\alpha\prec-0.11}$

كتابة معادلة المماس (δ)

$$y_{\delta}=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)=1(x-\alpha)+f(\alpha)=x+f(\alpha)-\alpha$$

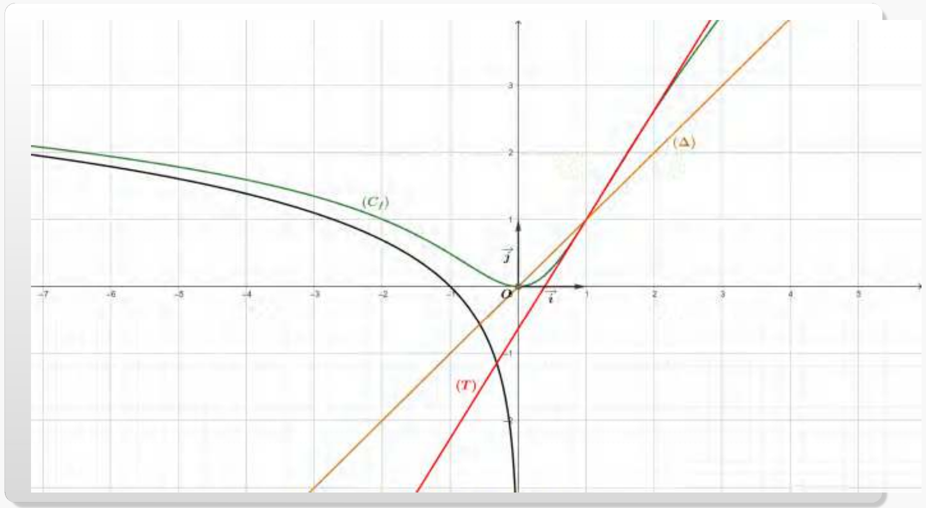
حساب $f(1)$ و $f(-2)$

- $f(1)=\ln(1e^1-1+1)=1$
- $f(-2)=\ln(-2e^{-2}+2+1)\simeq 1$

9 كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$y_T=f'(1)(x-1)+f(1)=\left(2-e^{-1}\right)x+\left(e^{-1}-1\right)$$

10 إنشاء : المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدّالة $x\mapsto\ln(-x)$ والمنحنى (C_f)



إنشاء : المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدّالة $x\mapsto\ln(-x)$ والمنحنى (C_f)

11 المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي a عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x)=(2-e^{-1})x+a$

حلول المعادلة $f(x)=(2-e^{-1})x+a$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $(2-e^{-1})x+a$. ومنه :

- لمّا $a\prec e^{-1}-1$ المعادلة تقبل حلّا وحيدًا .
- لمّا $a=e^{-1}-1$ المعادلة تقبل حلّا مضاعفا هو : $x=1$.
- لمّا $a\succ e^{-1}-1$ المعادلة تقبل حلّا وحيدًا .

12 المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي l عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x)=x+l$

حلول المعادلة $f(x)=x+l$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $x+l$. ومنه :

- لمّا $l\prec f(\alpha)-\alpha$ المعادلة لاتقبل حلول .
- لمّا $l=f(\alpha)-\alpha$ المعادلة تقبل حلّا مضاعفا هو : $x=\alpha$.
- لمّا $f(\alpha)-\alpha\prec l\prec 0$ المعادلة تقبل حلين موجبين تماما .
- لمّا $l=0$ المعادلة تقبل حلّين هما : $x=0$ و $x=1$.
- لمّا $l\succ 0$ المعادلة تقبل حلّين مختلفين في الإشارة .

13 البرهان أنّ جميع المستقيمات (T_n) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيين إحداثييها

نفرض أنّ المستقيمات (T_n) تشمل نقطة ثابتة $A(x_1;y_1)$ معناه : $y_1=(2e^n-e^{n-1})x_1-(e^n-e^{n-1})$ يكافئ : $y_1=(e^n(2-e^{-1}))x_1-(e^n(1-e^{-1}))$ يكافئ : $e^n\left[(2-e^{-1})x_1-(1-e^{-1})\right]-y_1=0$ ، المتغيّر في هذه المعادلة الأخيرة هو e^n .

نعلم أنّه ينعدم كثير الحدود إذا انعدمت معاملات حدوده أي : $\begin{cases}(2-e^{-1})x_1-(1-e^{-1})=0\\ -y_1=0\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}x_1=\dfrac{1-e^{-1}}{2-e^{-1}}\\ y_1=0\end{cases}$

ومنه جميع المستقيمات (T_n) تشمل نقطة ثابتة $A\left(\dfrac{1-e^{-1}}{2-e^{-1}};0\right)$.

المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي n عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x)=(2e^n-e^{n-1})x-(e^n-e^{n-1})$

أوّلا وقبل البدأ في هذه المناقشة يجب إيجاد قيمة n حتى يكون المستقيم (T_n) يوازي المستقيم (Δ) .

المستقيم (T_n) يوازي المستقيم (Δ) معناه : $e^n(2-e^{-1})=1$ ومنه قيمة n حتى يتوازى المستقيمان (T_n) و (Δ) هي : $n=\ln\left(\dfrac{1}{2-e^{-1}}\right)$ إذن :

- لمّا $0 \prec e^n \preceq \frac{1}{2-e^{-1}}$ أي $n \in \left]-\infty;\ln\left(\frac{1}{2-e^{-1}}\right)\right]$ المعادلة لا تقبل حلولا .
- لمّا $\frac{1}{2-e^{-1}} \prec e^n \prec 1$ أي $n \in \left]\ln\left(\frac{1}{2-e^{-1}}\right);0\right[$ المعادلة تقبل حلّا وحيدًا موجبا .
- لمّا $e^n = 1$ أي $n = 0$ المعادلة تقبل حلّا مضاعفا هو $x = 1$.
- لمّا $e^n \succ 1$ المعادلة تقبل حلّا وحيدًا موجبا .

الجزء الثالث

1 تبيين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ : $h(x) = -f(x) + 1$

$$h(x) = \ln\left(\frac{1}{xe^{x-1} - xe^{-1} + e^{-1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{-1}(xe^x - x + 1)}\right) = \ln\left(\frac{e}{xe^x - x + 1}\right) = \ln(e) - \ln(xe^x - x + 1) = -f(x) + 1$$

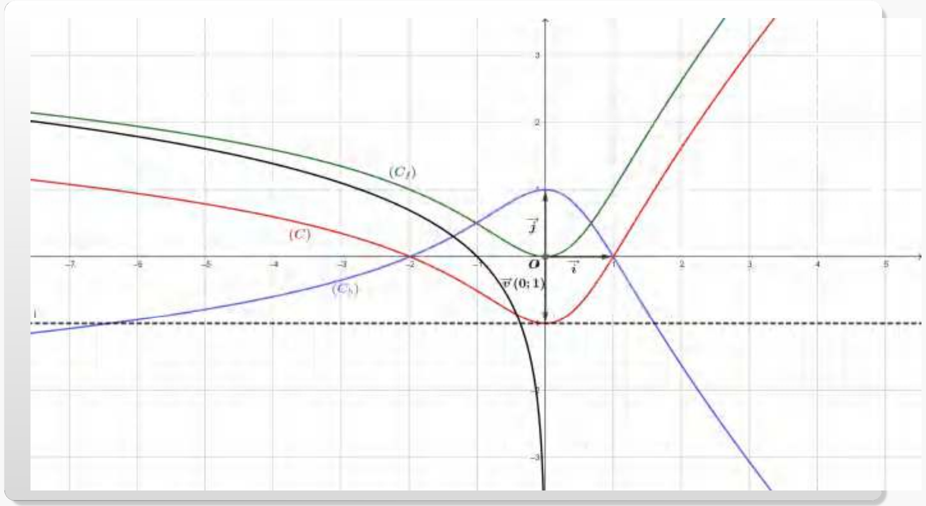
2 تبيين أنّ المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بتركيب تحويلين نقطيين بسيطين يطلب تعيينهما

لدينا : $h(x) = -f(x) + 1 = -(f(x) - 1)$ ومنه :

- منحنى الدّالة $x \mapsto f(x) - 1$ هو صورة المنحنى (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{v}(0;-1)$.
- ومنحنى الدّالة $x \mapsto -(f(x) - 1)$ هو نظير منحنى الدّالة $x \mapsto f(x) - 1$ بالنسبة لمحور التراتيب .

إنشاء المنحنى (C_h)

نسمّي (C) منحنى الدّالة $x \mapsto f(x) - 1$ في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.



إنشاء المنحنى (C_h)

3 المناقشة البيانية حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E)

من أجل $m \in \mathbb{R} - \{-1\}$ لدينا : $x(e^x - 1) - m = 0$ يكافئ : $xe^x - x = m$ يكافئ : $xe^x - x + 1 = m + 1$ يكافئ : $\ln(xe^x - x + 1) = \ln|m+1|$ يكافئ : $-\ln(xe^x - x + 1) = -\ln|m+1|$ يكافئ : $-f(x) + 1 = \ln\left(\frac{1}{|m+1|}\right) + 1$ يكافئ : $h(x) = \ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right)$.

حلول المعادلة (E) بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_h) مع المستقيم ذو المعادلة : $y = \ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right)$.

- لمّا $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) \prec 0$ أي : $\frac{e}{|m+1|} \prec e^0$ يكافئ : $\frac{|m+1|}{e} \succ 1$ يكافئ : $|m+1| \succ e$ يكافئ : $m + 1 \succ e$ أو $m + 1 \prec -e$ يكافئ : $m \succ e - 1$ أو $m \prec -e - 1$ أي : $m \in]-\infty;-e-1[\cup]e-1;+\infty[$ المعادلة (E) تقبل حلّين مختلفين في الإشارة .

- لمّا $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) = 0$ أي : $\frac{e}{|m+1|} = e^0$ يكافئ : $|m+1| = e$ يكافئ : $m = e - 1$ أو $m = -e - 1$ المعادلة (E) تقبل حلّين هما $x = 1$ و $x = -2$.
- لمّا $0 \prec \ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) \prec 1$ يكافئ : $1 \prec \frac{e}{|m+1|} \prec e$ يكافئ : $1 \prec |m+1| \prec e$ يكافئ : $(m+1) \in]-e;-1[\cup]1;e[$ أي : $m \in]-e-1;-2[\cup]0;e-1[$ المعادلة (E) تقبل حلّين مختلفين في الإشارة .
- لمّا $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) = 1$ يكافئ : $\frac{e}{|m+1|} = e$ يكافئ : $|m+1| = 1$ أي : $m = 0$ أو $m = -2$ المعادلة (E) تقبل حلّا مضاعفا هو $x = 0$.
- لمّا $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) \succ 1$ يكافئ : $\frac{e}{|m+1|} \succ e$ يكافئ : $|m+1| \prec 1$ يكافئ : $-1 \prec m + 1 \prec 1$ يكافئ : $-2 \prec m \prec 0$ أي : $m \in]-2;0[- \{-1\}$ المعادلة (E) لا تقبل حلول .

الجزء الرابع

1 ادرس تغيّرات الدّالة k

النّهايات

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ أي : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = -\infty$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ أي : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = -\infty$.

المشتقة

الدّالة k معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$k'(x) = 2h'(2x-2) = 2(-f'(2x-2)) = -2f'(2x-2)$$

إشارة المشتقة

- لمّا : $(2x-2) \in]-\infty;0]$ أي : $x \in]-\infty;1]$ يكون : $k'(x) \succeq 0$ ومنه الدّالة k متزايدة .
- لمّا : $(2x-2) \in [0;+\infty[$ أي : $x \in [1;+\infty[$ يكون : $k'(x) \preceq 0$ ومنه الدّالة k متناقصة .

جدول التغيّرات

لدينا : $k(1) = h(2(1)-2) + f(\alpha) = h(0) + f(\alpha) = 1 - f(0) + f(\alpha) = f(\alpha)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
$k(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

2 تحقق من أنّ $k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = 1$ ثم بيّن أنّ : $k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -2f'(\alpha)$

- $k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) + f(\alpha) = h\left(2\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) - 2\right) + f(\alpha) = h(\alpha+2-2) + f(\alpha) = h(\alpha) + f(\alpha) = 1 - f(\alpha) + f(\alpha) = 1$
- $k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -2f'\left(2\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) - 2\right) = -2f'(\alpha+2-2) = -2f'(\alpha)$

3 استنتاج معادلة المماس (D) لمنحنى الدّالة k عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{2}$

$$y_D = k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left(x - \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\right) + k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -2f'(\alpha)\left(x - \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\right) + 1 = f'(\alpha)(\alpha+2-2x) + 1$$

4 التّحقق من أنّ : $y=-2x+\alpha+3$ معادلة للمستقيم (D)

$$y=f'(\alpha)(\alpha+2-2x)+1=\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}(\alpha+2-2x)+1=\frac{e^{\alpha}+\alpha e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}-\alpha-1}(\alpha+2-2x)+1$$
$$=\frac{2-\alpha+\alpha(2-\alpha)-1}{\alpha(2-\alpha)-\alpha-1}(\alpha+2-2x)+1=\frac{-\alpha^2+\alpha-1}{-\alpha^2-\alpha-1}(\alpha+2-2x)+1=-2x+\alpha+3$$

5 حساب $k(-1)$

$$k(-1)=h(2(-1)-2)+f(\alpha)=h(-4)+f(\alpha)=1-f(-4)+f(\alpha)$$

الجـزء الخامس

1 حساب : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{p(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{p(x)}{x}$ ، والاستنتاج بالنسبة للدّالة p

- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(|x|)}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\ln(xe^x-x+1)}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\ln(x(e^x-1)+1)}{x(e^x-1)}\cdot(e^x-1)=0$
- $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(|x|)}{x}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{\ln(-xe^{-x}+x+1)}{x}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{\ln(x(-e^{-x}+1)+1)}{x(-e^{-x}+1)}\cdot(-e^{-x}+1)=0$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to0}x(e^x-1)=\lim\limits_{x\to0}x(-e^{-x}+1)=0$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.

بما أنّ : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{p(x)}{x}=0$ نستنتج أنّ الدّالة p قابلة للاشتقاق في الصفر .

تفسير النتيجة هندسيا

نفسّر النتيجة السابقة هندسيا بأنّ المنحنى (C_p) يقبل مماسا موازٍ لحامل محور الفواصل معادلته هي : $y=f(0)=0$.

حساب $p(x)-p(-x)$ ، والاستنتاج بالنسبة للدّالة p

من أجل كل x و $-x$ ينتميان إلى $\mathbb{R}$ لدينا : $p(x)-p(-x)=f(|x|)-f(|-x|)=f(|x|)-f(|x|)=0$

نستنتج أنّ الدّالة p زوجية .

تفسير النتيجة هندسيا

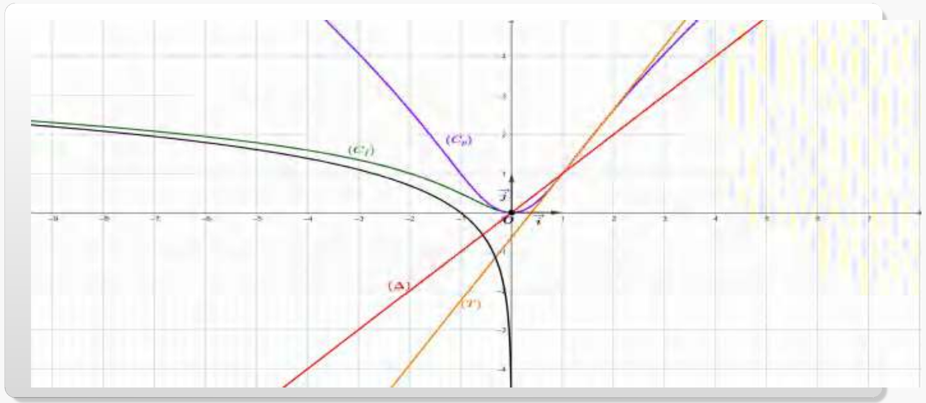
نفسّر النتيجة السابقة هندسيا بأنّ المنحنى (C_p) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) محور تناظر .

2 كتابة $p(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$p(x)=f(|x|)=\begin{cases}f(x)\,;x\succeq0\\ f(-x)\,;x\preceq0\end{cases}$$

3 باستعمال المنحنى (C_f) ، إنشاء المنحنى (C_p) مبيّنا طريقة الإنشاء

لمّا $x\succeq0$: (C_p) ينطبق على (C_f) . لمّا $x\preceq0$: (C_p) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب .



إنشاء : المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدّالة $x\mapsto\ln(-x)$ والمنحنى (C_p)

الجـزء السادس

1 حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{\pi}{2}}q(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}q(x)$ ثمّ تفسير النتيجتين هندسيا

تذكّر أنّ : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

لدينا : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{\pi}{2}}\tan(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}k(x)=-\infty$ لأنّ : $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{\pi}{2}}\cos(x)=0^+$ ومنه :

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{\pi}{2}}q(x)=-\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}\tan(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}k(x)=-\infty$ لأنّ : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}\cos(x)=0^-$ ومنه :

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}q(x)=-\infty$.

التفسير الهندسي

$x=-\frac{\pi}{2}$ معادلة مستقيم مقارب للمنحني (C_q) .

$x=\frac{\pi}{2}$ معادلة مستقيم مقارب للمنحني (C_q) .

2 دراسة بطرقتين مختلفتين اتجاه تغيّر الدّالة q

الطريـقة 1 هنا نستعمل فقط مشتقة الدّالة k وإشارتها .

الدّالة q معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ودالتها المشتقة هي : $q'(x)=\tan'x\cdot k'(\tan x)=\frac{1}{\cos^2x}\cdot k'(\tan x)$

لدينا : $k'(\tan x)=0$ أي : $\tan x=1$ يكافئ : $\frac{\sin x}{\cos x}=1$ يكافئ : $\sin x=\cos x$ يكافئ : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$ وبما أنّ مجال الدّراسة هو $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ فإنّ : $x=\frac{\pi}{4}$

- لمّا $\tan x\in\left]-\infty;1\right]$ أي : $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$ لدينا : $k'(\tan x)\succeq0$ معناه : $q'(x)\succeq0$ ومنه الدّالة q متزايدة .
- لمّا $\tan x\in\left[1;+\infty\right[$ أي : $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ لدينا : $k'(\tan x)\preceq0$ معناه : $q'(x)\preceq0$ ومنه الدّالة q متناقصة .

الطريـقة 2 هنا نستعمل إتجاه تغيّر دالة مركبة .

لدينا : $q=k\circ v$ حيث v دالة معرّفة كمايلي : $v:x\mapsto\tan x$.

- الدّالة k متزايدة على المجال $\left]-\infty;1\right]$ و $\tan x\preceq1$ لمّا $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$ والدّالة $\tan$ متزايدة على المجال $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$ (لأنّ $\tan'x=\frac{1}{\cos^2x}$) ومنه الدّالة q متزايدة على المجال $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$.
- الدّالة k متناقصة على المجال $\left[1;+\infty\right[$ و $\tan x\succeq1$ لمّا $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ والدّالة $\tan$ متزايدة على المجال $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ (لأنّ $\tan'x=\frac{1}{\cos^2x}$) ومنه الدّالة q متناقصة على المجال $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$.

جدول التغيّرات لدينا : $q\left(\frac{\pi}{4}\right)=k\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=k(1)=f(\alpha)$ ومنه :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$q'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$q(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$

3 **حل في المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة : $\tan x=-1$**

لدينا : $\tan x=-1$ يكافئ : $-\sin x=\cos x$ يكافي : $-\cos(\pi+x)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ يكافي : $\frac{\pi}{2}-x=\pi+x+2k\pi$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$ أي : $x=-\frac{\pi}{4}-k\pi$ ومنه حل المعادلة $\tan x=-1$ في المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ هو $x=-\frac{\pi}{4}$.

4 **كتابة معادلة المماس (L)**

نفرض أنّ (L) مماس لـ (C_q) في النقطة $(x_2;1-f(-4)+f(\alpha))$ وكذلك : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

$q(x_2)=1-f(-4)+f(\alpha)$ يكافئ : $k(\tan x_2)=1-f(-4)+f(\alpha)$ يكافئ : $\tan x_2=-1$ إذن : $x_2=-\frac{\pi}{4}$ ومنه:

$$y_L=q'\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+q\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1-f(-4)+f(\alpha)=2x+\frac{\pi}{4}+1-f(-4)+f(\alpha)$$

———— بالتوفيـــق والنجاح إن شاء الله في البكالوريـا ————

قال الإمام عبد الحميد ابن باديس رحمه الله تعالى :

انهض إلى العلم في جدٍّ بلا كسلٍ *** نهوض عبدٍ إلى الخيرات يبتدرُ

واصبر على نيله صبر المُجدِّ لهُ *** فليس يُدركه من ليس يصطبرُ

يكفيكَ بالعلم فضلاً أنّ صاحبهُ *** بالعزِّ نال العُلا والخيرَ ينتظرُ

وآهًا له رجلا فردًا محاسنُهُ *** بالحزمِ والعزمِ هان الصّعبُ والعسِرُ