

تمارين محلولة في الدوال الأسية للتحضير الجيد لباكوريا 2021

📌 : Mezianemaths / @ : Mezianemaths / 📌 : Mezianemaths / 📖 : 03 ثانوي جميع الشعب العلمية

التمرين 01

• $g(x) = e^{x^2+ax+b}$: b و a عددا حقيقيان و g الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ :
عين قيمتي a و b الموافقتين لجدول تغيرات الدالة g التالي :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$+\infty$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$+\infty$

الحل

من جدول التغيرات لدينا : $g'(\frac{3}{2}) = 0$ و $g(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{5}{4}}$

• مشتقة الدالة g : $g'(x) = (2x+a)e^{x^2+ax+b}$

$g'(\frac{3}{2}) = 0$ تكافئ $(3+a)e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)} = 0$ تكافئ $3+a=0$ لأن $e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)} \neq 0$

• إذن : $a = -3$

$g(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{5}{4}}$ تكافئ $e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)} = e^{-\frac{5}{4}}$ و منه : $(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b) = -\frac{5}{4}$ و منه : $b = 1$

و بالتالي : $a = -3$ و $b = 1$

التمرين 02

• (C_f) هو التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

للدالة f حيث : $f(x) = ae^{-2x} + be^{-x} + cx$ مع a, b, c أعداد حقيقية ثابتة.

عين الدالة f إذا علمت أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) معادلته $y = 2x - \frac{1}{2}$ في النقطة $H(0; -\frac{1}{2})$

و يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y = 2x$.

الحل

النقطة $H(0; -\frac{1}{2})$ تنتمي إلى (C_f) معناه : $f(0) = -\frac{1}{2}$ أي : $a + b = -\frac{1}{2}$

• المماس (T) عند النقطة $H(0; -\frac{1}{2})$ معادلته $y = 2x - \frac{1}{2}$ معناه : $f'(0) = 2$

$f'(x) = -2ae^{-2x} - be^{-x} + c$ و منه : $f'(0) = 2$ تكافئ : $-2a - b + c = 2$ أي : $-2a - b = 2 - c$

$y = 2x$ معادلة المستقيم المقارب عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - cx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [ae^{-2x} + be^{-x}] = 0$$

معناه : $y = cx$ معادلة المستقيم المقارب عند $+\infty$ و بالتالي : $c=2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b = -\frac{1}{2} \\ -2a-b = 0 \end{array} \right. \text{ التي تكافئ : } \left\{ \begin{array}{l} a+b = -\frac{1}{2} \\ -2a-b = 2-c \end{array} \right. \text{ نحل الجملة :}$$

ومنه : $a = \frac{1}{2}$ و $b = -1$ و بالتالي : $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x} + 2x$.

التمرين 03

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = (ax+b)e^x$ حيث a و b عدنان حقيقيان. (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و كتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يشمل المنحني (C_f) النقطة $\Omega(1, e)$ و يقبل مماسا معامل توجيهه $3e$.
- (2) أحسب $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-4; 5]$.
- (3) أكتب معادلة المماس للمنحني عند النقطة التي فاصلتها 0 .
- (4) بين أن المنحني يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين إحداثياتها.
- (5) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[-4; 5]$ كما يلي : $g(x) = [f(x)]^2$. استنتج جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-4; 5]$.

الحل

(1) تعيين العددين الحقيقيين a و b :

المنحني (C_f) يشمل النقطة $\Omega(1, e)$ معناه : $f(1) = e$

معامل توجيه المماس عند $\Omega(1, e)$ يساوي $3e$ معناه : $f'(1) = 3e$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = e \\ f'(1) = 3e \end{array} \right. \text{ نحسب } f'(x) \text{ فنجد : } f'(x) = (ax+a+b)e^x \text{ و بالتالي نحل الجملة :}$$

$$\bullet f(x) = (2x-1)e^x \text{ و بالتالي نجد : } a=2 \text{ و } b=-1 \text{ أي } \left\{ \begin{array}{l} (a+b)e = e \\ (2a+b)e = 3e \end{array} \right. \text{ و منه :}$$

$$\bullet f'(x) = 2e^x + e^x(2x-1) = e^x(2+2x-1) = e^x(2x+1) \text{ : حساب } f'(x)$$

إشارة المشتقة من إشارة $(2x+1)$ لأن : $e^x > 0$

جدول تغيرات الدالة f :

x	-4	$-\frac{1}{2}$	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-9 - 4e^{-4}$	$-2e^{-\frac{1}{2}}$	$9e^5$

(3) معادلة المماس للمنحني عند النقطة التي فاصلتها 0 :

$$y = x - 1 \text{ و منه معادلة المماس المطلوبة هي : } y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

(4) نبين أن المنحني يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها.
حساب الدالة المشتقة الثانية فنجد $f''(x) = (2x+3)e^x$ تنعدم عند $-\frac{3}{2}$ و جدول إشارتها هو :

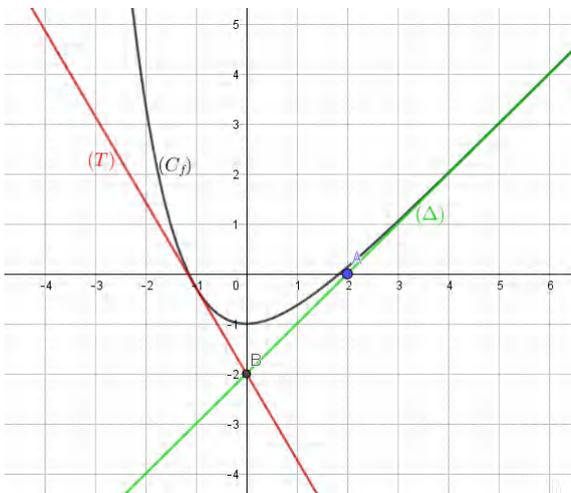
x	-4	$-\frac{3}{2}$	5
$f''(x)$	-	0	+

بما أن $f''(x)$ إنعدمت عند $-\frac{3}{2}$ و غيرت من إشارتها فإن النقطة $\omega(-\frac{3}{2}; -4e^{-\frac{3}{2}})$ هي نقطة إنعطاف للمنحني (C_f) .
(5) جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-4; 5]$ حيث : $g(x) = [f(x)]^2$
حيث $g'(x) = 2f'(x).f(x)$ و $f(x) = (2x-1)e^x$ و $f'(x) = (2x+1)e^x$

x	4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	-	-	0	+
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	$81e^{-8}$	$4e^{-1}$	0	$81e^{30}$

التمرين 04

هو التمثيل البياني للدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = ax + b + e^{-x}$ حيث : a و b عددا حقيقيان .
 (Δ) المستقيم المقارب المائل للمنحني (C_f) المار من النقطتين $A(2, 0)$ و $B(0, -2)$
 (T) هو المماس للمنحني (C_f) في النقطة التي فاصلتها -1 و معامل توجيهه هو $1 - e$



- أكتب معادلة للمستقيم (Δ) .
- إستنتج قيمة كلا من a و b .
- أكتب معادلة للمماس (T) .

الحل

(1) بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ فإن معادلة (Δ) هي $y = ax + b$ و المار من النقطتين $A(2,0)$ و $B(0,-2)$

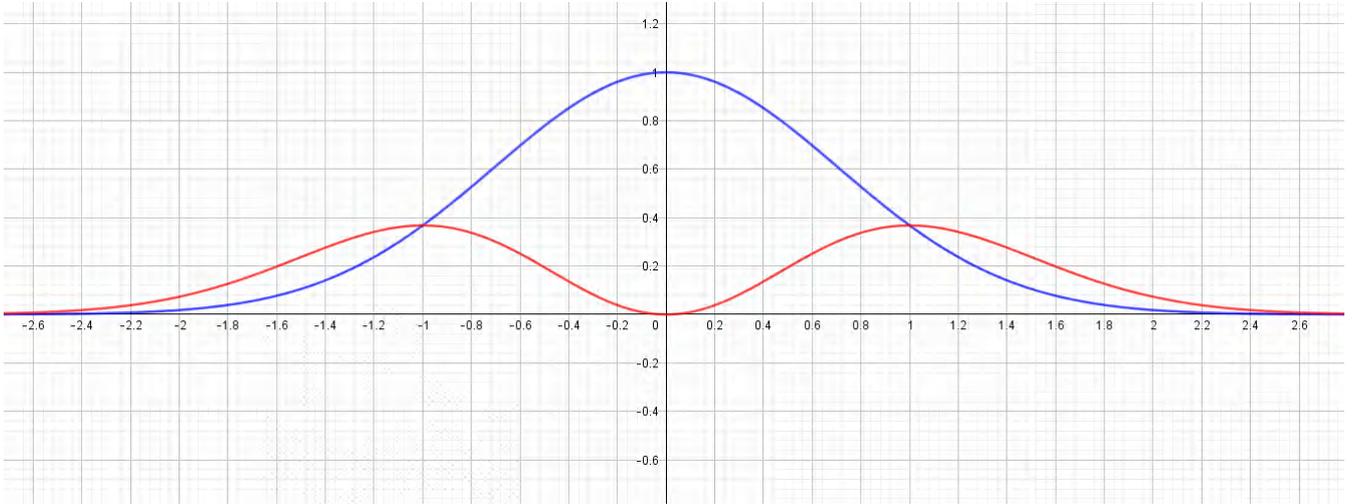
فيكون لدينا :
$$\begin{cases} 0 = 2(a) + b \\ -2 = 0(a) + b \end{cases}$$
 فنحصل على : $a = 1$ و $b = -2$

إذن : $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ و معادلة (Δ) هي $y = x - 2$

(2) معادلة (T) : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ أي $y = (1-e)(x+1) - 3 + e$ و بالتالي : معادلة (T) هي $y = (1-e)x - 2$

التمرين 05

• $f(x) = e^{-x^2}$ و $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ دالتان معرفتان على \mathbb{R} بحيث
 و ليكن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان لهما على الترتيب



- (1) ميز (C_f) و (C_g) مع التعليل
- (2) أدرس شفعية الدالتين f و g
- (3) عين النهاية عند $+\infty$ و أدرس إتجاه تغيرات الدالتين f و g
- (4) أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g)

الحل

(1) (C_f) هو المنحني الذي يشمل النقطة $A(0,1)$ لأن $f(0) = 1$

و (C_g) هو المنحني الذي يشمل المبدأ $O(0,0)$ لأن $g(0) = 0$

(2) شفعية الدالتين f و g :

شفعية f : من أجل $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$ و منه f دالة زوجية.

شفعية g : من أجل $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ و $g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = g(x)$ و منه f دالة زوجية.

(3) أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ حيث f و g زوجيتان.

ب) دراسة تغيرات الدالة f :

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	1	0

ج) دراسة تغيرات الدالة g : $g'(x) = 2xe^{-x^2} + (-2x)e^{-x^2}(x^2) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$
جدول إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$2x$	-	-	0	+	+		
$1-x^2$	-	0	+	+	0	-	
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$g(x)$	0	e^{-1}	0	e^{-1}	0	0	

- 4) الوضعية النسبية: ندرس إشارة الفرق $g(x) - f(x)$.
 $g(x) - f(x) = x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} = (x^2 - 1)e^{-x^2}$
 على المجالين $]-1, +\infty[$ و $]-\infty, -1[$ يكون $x^2 - 1 > 0$ وبالتالي المنحنى (C_g) يقع فوق المنحنى (C_f) .
 على المجال $]-1, 1[$ يكون $x^2 - 1 < 0$ وبالتالي المنحنى (C_g) يقع تحت المنحنى (C_f) .
 المنحنيان يتقاطعان في النقطتين $B(-1; e^{-1})$ و $C(1; e^{-1})$.

التمرين 06

في الشكل المقابل (C_g) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$g(x) = (ax + b)e^x + c$$

(1) بقراءة بيانية :

(أ) عين $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ثم إستنتج قيمة c .

(ب) عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

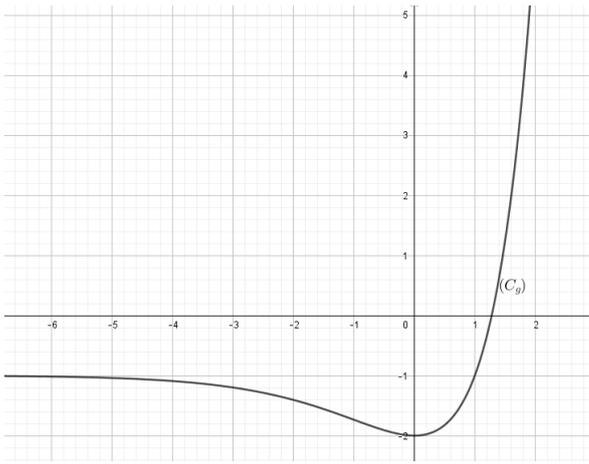
(ج) عين كلا من $g(0)$ و $g'(0)$ ثم إستنتج قيمتي كل من a و b .

(2) نفرض فيما يلي: $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

(أ) شكل جدول تغيرات الدالة g

(ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.2 < \alpha < 1.3$

(ج) إستنتج إشارة $g(x)$.



هي الدالة المعرفة على المجال \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم حدد المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.

(2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(3) أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

(4) بين $f(\alpha) = \alpha - 1$ ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

(5) أنشئ المنحنى (C_f) .

(6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

(7) نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} كإيلي: $h(x) = f(|x|)$

(أ) بين أن h دالة زوجية.

(ب) أرسم المنحنى البياني للدالة h إعتمادا على (C_f) في نفس المعلم السابق.

الحل

(1) (I) بقراءة بيانية :

(أ) لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ ، ونعلم أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(ax+b)e^x + c] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (axe^x + be^x + c) = c$

إذن نستنتج أن: $c = -1$.

(ب) لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

(ج) لدينا: $g(0) = -2$ و $g'(0) = 0$

لدينا: $g(0) = -2$ أي: $(a \times 0 + b)e^0 - 1 = -2$ أي: $b - 1 = -2$ و منه: $b = -1$.

نحسب $g'(x) = a \times e^x + e^x(ax+b) = e^x(a+ax+b)$

لدينا: $g'(0) = 0$ أي: $e^0(a+a \times 0 - 1) = 0$ أي: $a - 1 = 0$ و منه: $a = 1$

إذن: $g(x) = (x-1)e^x - 1$

(2) (أ) تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-1	-2	$+\infty$

ب) الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[1, 2; 1, 3]$ وبما أن $g(1.2) = -$ و $g(1.3) = +$ أي $g(1.2) \times g(1.3) < 0$:
 إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 1.2 و 1.3 .
 ج) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II) لدينا : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$
 1) حساب النهايات :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x + 1} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = 0$$

• بجوار $+\infty$ المنحني (C_f) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

$$2) \text{ لدينا } : y = x : (\Delta), \text{ نحسب } : \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-xe^x}{e^x + 1} = 0$$

إذن : المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

• الوضعية النسبية بين المنحني (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y$:

أي ندرس إشارة $\frac{-xe^x}{e^x + 1}$ إذن إشارة الفرق من إشارة $(-x)$.

3) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

$$\bullet \text{ نحسب المشتقة } f'(x) : f'(x) = \frac{(e^x + 1) - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(-x + 1)e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{-[(x - 1)e^x - 1]}{(e^x + 1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

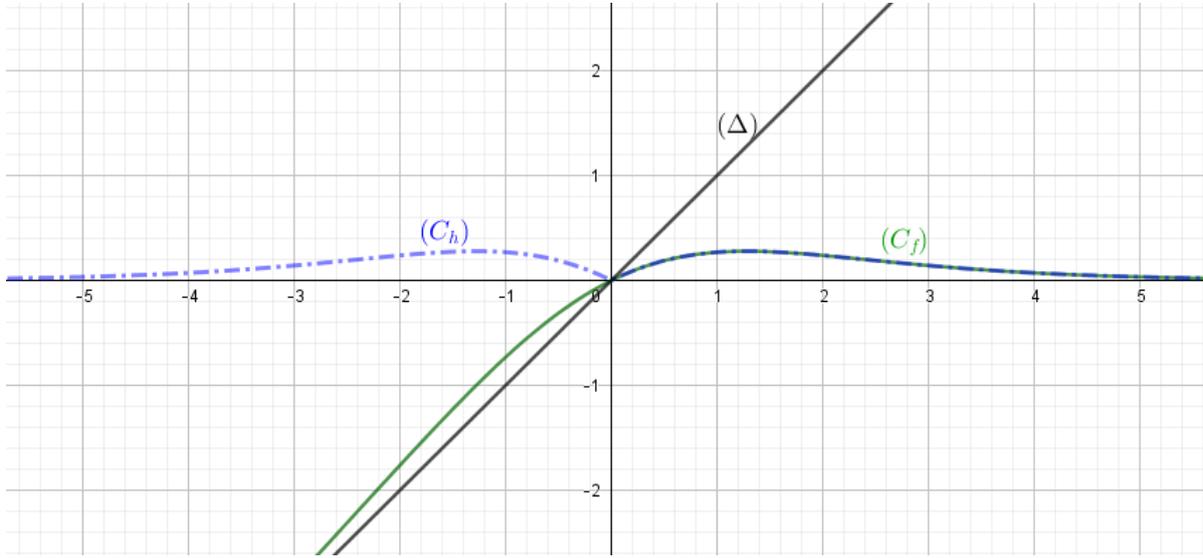
إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ لأن $(e^x + 1)^2 > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

4) إثبات : $f(\alpha) = \alpha - 1$:

نعلم أن $g(\alpha) = 0$ ، أي $(\alpha - 1)e^\alpha - 1 = 0$: أي $(\alpha - 1)e^\alpha = 1$ ، ومنه $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$.
 لنحسب الآن $f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} = \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} = \frac{\alpha}{1 + \alpha - 1} = \frac{\alpha}{\alpha} = \alpha \times \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \alpha - 1$: وهو المطلوب .

حصر ل $f(\alpha)$: لدينا $1.2 < \alpha < 1.3$ أي $0.2 < \alpha - 1 < 0.3$ ومنه $0.2 < f(\alpha) < 0.3$:
 (5) الإنشاء :



(6) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة $f(x) = f(m)$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الموازي

لحامل محور الفواصل والذي معادلته $y = f(m)$.

إذا كان $m \in]-\infty; 0]$ فإن المعادلة تقبل حل واحد .

إذا كان $m \in]0; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلان متميزان .

إذا كان $m = \alpha$ فإن المعادلة تقبل حل واحد .

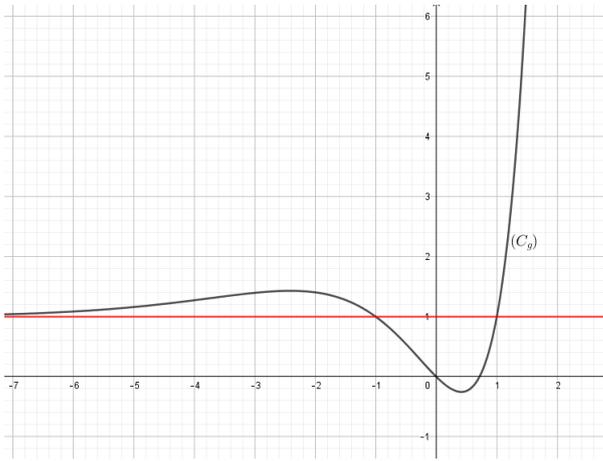
(7) لدينا الدالة h المعرفة على \mathbb{R} كإيلي $h(x) = f(|x|)$.

أ) تبيان أن الدالة h زوجية : $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$ و بالتالي الدالة h زوجية .

إنشاء المنحنى (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]0; +\infty[$

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب في المجال $]-\infty; 0]$.



- لتكن الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = (x^2 - 1)e^x + 1$
- تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس . يعطى جدول القيم التالي :

0.8	0.75	0.7	0.65	0.6	x
0.2	0.07	-0.03	-0.11	-0.17	$g(x)$

- (1) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجموعة \mathbb{R} حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7 < \alpha < 0.75$.
 - (2) إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في \mathbb{R} .
- نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = x + (x-1)^2 e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أ) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
 - (ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = g(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
 - (2) تحقق من أن : $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$ ثم عين حصرا ل $f(\alpha)$.
 - (3) أ) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1,1)$.
 - (ب) بين أن المماس (T) هو مستقيم مقارب مائل ل (C_f) بجوار $-\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و المماس (T) .
 - (ج) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في نقطة B يطلب تعيين فاصلتها ثم أكتب معادلة للمماس (T') .
 - (4) أرسم كلا من (T) , (T') و (C_f) .
 - (5) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(E) : (x-1)^2 e^x - m - 1 = 0$ ثلاثة حلول .

الحل

- (I) (1) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7 < \alpha < 0.75$.
لدينا : $g(0) = (0^2 - 1)e^0 + 1 = -1 + 1 = 0$ و منه 0 حل للمعادلة $g(x) = 0$.
ولدينا : g دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[0.7; 0.75]$ و $g(0.70) \times g(0.75) = -0.03 \times 0.07 = -0.0021 < 0$ و
و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث : $0.7 < \alpha < 0.75$.
و بالتالي المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7 < \alpha < 0.75$.
- (2) إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	+

- (II) لدينا : $f(x) = x + (x-1)^2 e^x$ معرفة على $D_f = \mathbb{R}$.
- (1) أ) حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + (x-1)^2 e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + x^2 e^x - 2x e^x + e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + (x-1)^2 e^x] = +\infty$$

(ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$:
من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$f'(x) = 1 + 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x = 1 + [2x-2 + (x-1)^2 e^x] = 1 + (2x-2 + x^2 - 2x + 1)e^x = 1 + (x-1)^2 e^x = g(x)$$

$$f'(x) = g(x) : \text{أي}$$

إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

إشارة المشتقة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x) = g(x)$	+	0	-	+

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ و $] \alpha; +\infty[$ و f متناقصة تماما على المجال $]0; \alpha[$.
جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$f(\alpha)$	$+\infty$

$$(2) \text{ التحقق من أن } f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$$

$$\text{لدينا } f(\alpha) = \alpha + (\alpha - 1)^2 e^\alpha$$

$$\text{ولدينا } g(\alpha) = 0 \text{ و منه } 1 + (\alpha^2 - 1)e^\alpha = 0 \text{ و بالتالي } e^\alpha = -\frac{1}{\alpha^2 - 1}$$

$$\text{إذن : } f(\alpha) = \alpha + (\alpha - 1)^2 \times \left(-\frac{1}{\alpha^2 - 1}\right) : \text{ أي } f(\alpha) = \alpha - \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^3 - \alpha - \alpha^2 + 2\alpha - 1}{\alpha^2 - 1}$$

$$\text{و بالتالي : } f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^2(\alpha - 1) + (\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha^2 + 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}$$

تعيين حصر $f(\alpha)$:

$$\text{لدينا } : 0.70 < \alpha < 0.75 \text{ و منه } : (0.70)^2 + 1 < \alpha^2 + 1 < (0.75)^2 + 1 \text{ و } 0.70 + 1 < \alpha + 1 < 0.75 + 1$$

$$\text{إذن : } \frac{(0.70)^2 + 1}{0.70 + 1} < \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1} < \frac{(0.75)^2 + 1}{0.75 + 1} : \text{ و بالتالي } : 0.85 < f(\alpha) < 0.92$$

(3) أ) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1; 1)$:

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = g(1)(x - 1) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

(ب) تبيان أن المماس (T) هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + (x-1)^2 e^x - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x - 2x e^x + e^x) = 0$$

و منه المماس (T) هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

دراسة الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) و المماس (T)

$$\text{ندرس إشارة الفرق } f(x) - y : f(x) - y = x + (x-1)^2 e^x - x = (x-1)^2 e^x$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$+$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)

تبيان أن المنحنى (C_f) يقبلا مماسا (T') يوازي (T) في نقطة B :

لدينا $(T) \parallel (T')$ يعني معامل توجيه المماس (T') يساوي 1 أي $f'(x_0) = 1$

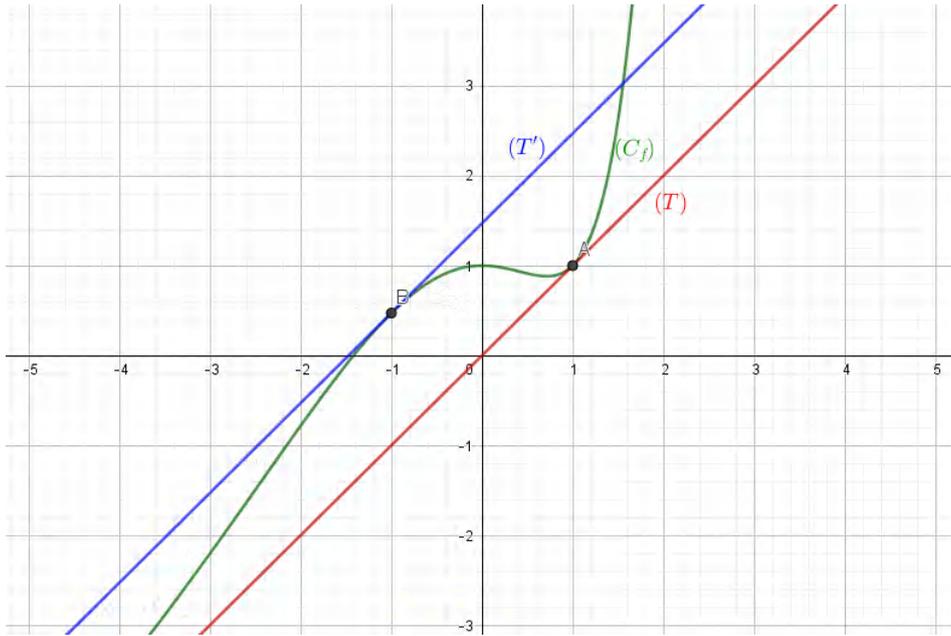
ومنه $1 + (x_0^2 - 1)e^{x_0} = 1$ وبالتالي $(x_0^2 - 1)e^{x_0} = 0$ ومنه $(x_0^2 - 1) = 0$ لأن $e^{x_0} \neq 0$ و عليه $x_0 = 1$ أو $x_0 = -1$.
إذن (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في النقطة B ذات الفاصلة -1 .

كتابة معادلة المماس (T') :

لدينا $B(-1; -1 + 4e^{-1})$:

إذن $(T') : y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = 1 \times (x+1) - 1 + 4e^{-1} = x + 4e^{-1}$

الرسم :

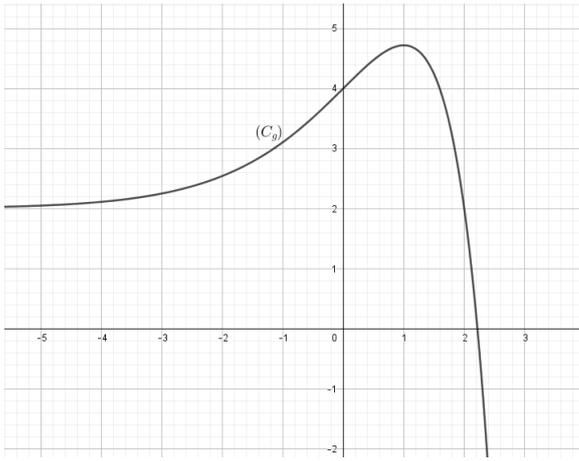


تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة (E) ثلاثة حلول:

لدينا $(x-1)^2e^x = m+1$ تكافئ $x + (x-1)^2e^x = x + m + 1$ تكافئ $f(x) = x + m + 1$

حلول المعادلة (E) بيانها هي فواصل النقط المشتركة بين المنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = x + m + 1$ الموازي لكل من المماسين (T) و (T') .

المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول يعني $0 < m+1 < 4e^{-1}$ وبالتالي $-1 < m < -1 + 4e^{-1}$.



• الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = 2 + (2-x)e^x$.
 التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الشكل المقابل)

- (1) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2.21 < \alpha < 2.22$.
 (2) بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ على \mathbb{R} .

• نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب : $f(x) = \frac{x^2}{1+e^{-x}}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- (1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 ب) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ، فسر النتيجة بيانيا .
 (2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{x \cdot g(-x)}{(1+e^{-x})^2}$
 ب) استنتج إشارة $f'(x)$ على \mathbb{R} ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f
 (3) بين أن : $f(-\alpha) = \alpha(\alpha-2)$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(-\alpha)$
 (4) (δ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto x^2$ في المعلم السابق .
 أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .
 ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (δ) .
 (5) أنشئ كلا من المنحنى (δ) والمنحنى (C_f) (تعطى $f(-\alpha) = 0.48$)

الحل

(I) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = 2 + (2-x)e^x$

- (1) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2.21 < \alpha < 2.22$

• الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]1; 3[$ و $]2.21; 2.22[$ أي $\left\{ \begin{array}{l} g(2.21) \approx 0,08 \\ g(2.22) \approx -0,02 \end{array} \right.$ و $g(2.21) \times g(2.22) < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]1; 3[$ حلا وحيدا α ، حيث $2.21 < \alpha < 2.22$
 بقراءة بيانية : إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$	+	0	-

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = \frac{x^2}{1+e^{-x}}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(ب) تبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^x}{e^x + 1} = 0$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

(أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{x \cdot g(-x)}{(1+e^{-x})^2}$

الدالة f قابلة للأشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{2x(1+e^{-x}) + x^2 e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{x((2+(x+2)e^{-x}))}{(1+e^{-x})^2} = \frac{xg(-x)}{(1+e^{-x})^2}$$

(ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$

x	$-\infty$	$-\alpha$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$-\alpha$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	$f(-\alpha)$	0	$+\infty$

$$(3) \text{ لدينا : } f(-\alpha) = \frac{\alpha^2}{1+e^\alpha} = \frac{\alpha^2}{1 - \frac{2}{2-\alpha}} = \frac{\alpha^2}{\frac{2-\alpha}{2-\alpha}} = -\alpha(2-\alpha) = \alpha(\alpha-2)$$

تعيين حصر للعدد $f(-\alpha)$:

لدينا : $2,21 < \alpha < 2,22$ و منه $0,21 < \alpha - 2 < 0,22$ إذن $0,46 < \alpha(\alpha-2) < 0,48$ و بالتالي $0,46 < f(-\alpha) < 0,49$.

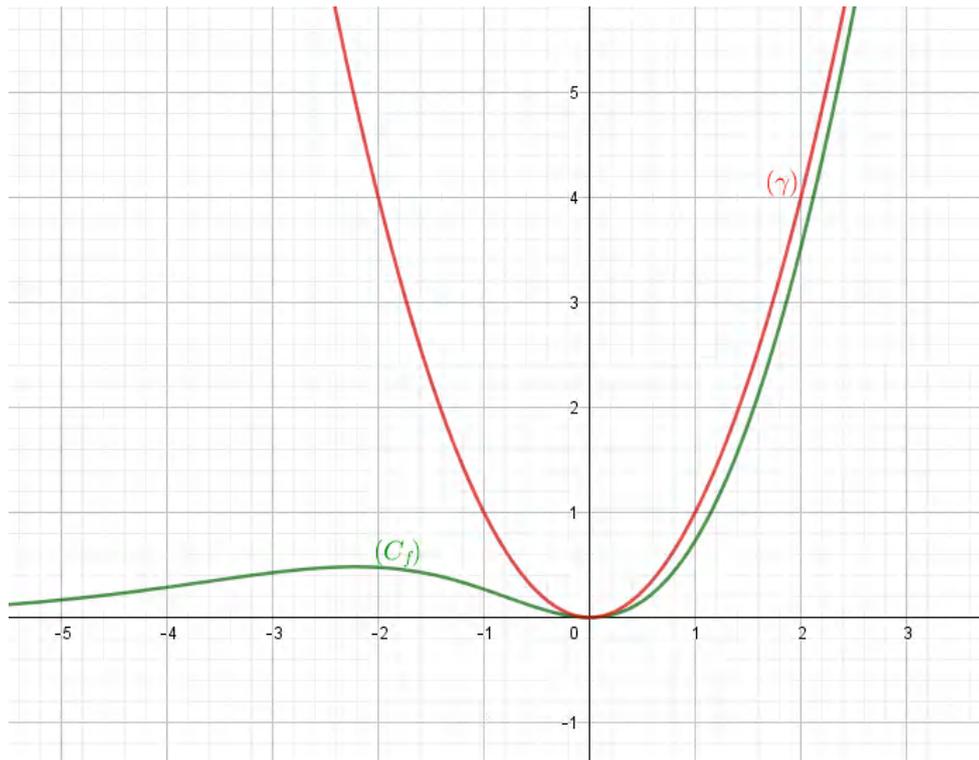
(4) المنحنى الممثل للدالة $x \rightarrow x^2$ في المعلم السابق .

$$(أ) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1+e^{-x}} - x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2 e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) = 0$$

التفسير البياني : المنحنى (γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (γ) :

لدينا : $f(x) - x^2 = \frac{-x^2 e^{-x}}{1+e^{-x}}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $\frac{-x^2 e^{-x}}{1+e^{-x}} \leq 0$ و بالتالي المنحنى (C_f) يقع أسفل المنحنى



التمرين 09

- نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = x - e^{-\frac{1}{2}x}$.
- (1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها على \mathbb{R} .
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.70 < \alpha < 0.71$.
- (3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
- لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x$.
- (Cf) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس .
- (أ) احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
- (ب) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2-x)]$ ، وفسر النتيجة بيانيا .
- (ج) ادرس الأوضاع النسبية للمنحنى (Cf) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 2$.
- (2) بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \times g(x)$ ، ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f .
- (3) بين أن $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.
- (4) احسب احداثيتي A نقطة تقاطع المنحنى (Cf) مع حامل محور الترتيب .
- (5) اكتب معادلة المماس T للمنحنى (Cf) في النقطة A .
- (6) احسب $f(2)$ و $f(2\ln \frac{1}{2})$ ، ثم ارسم كل من المستقيم (Δ) ، المماس T والمنحنى (Cf).
- (7) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $2e^{\frac{1}{2}x} = \frac{m-2}{x-2}$.

الجزء الأول

① دراسة تغيرات الدالة g : دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = x - e^{-\frac{1}{2}x}$

أولاً: حساب النهايات $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^{-\frac{1}{2}x}) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^{-\frac{1}{2}x}) = +\infty$

ثانياً: اتجاه التغير الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \text{ لدينا:}$$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) > 0$ وعليه الدالة g متزايدة تماماً على \mathbb{R}
جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

② إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α :

لدينا الدالة g معرفة ومستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]0,7; 0,71[$ و $g(0,7) \times g(0,71) \leq 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,7 < \alpha < 0,71$
جدول الإشارة

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

الجزء الثاني الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x$

① حساب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)(2e^{\frac{1}{2}x} - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2xe^{\frac{1}{2}x} - 4e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x \right) = +\infty$$
 و

حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2-x)]$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x - 2 + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2xe^{\frac{1}{2}x} - 4e^{\frac{1}{2}x} \right) = 0$$
 لدينا:

التفسير: المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته $y = 2 - x$ بجوار $(-\infty)$
دراسة الوضع النسبي:

يؤول إلى دراسة إشارة الفرق $f(x) - (2-x)$

لدينا : $f(x) - (2-x) = (2x-4)e^{\frac{1}{2}x}$
ومن أجل كل عدد حقيقي لدينا : $e^{\frac{1}{2}x} > 0$
ومنه دراسة إشارة الفرق تؤول إلى دراسة إشارة العبارة $2x-4$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضعية	(Cf) تحت (Δ)	(Cf) يقطع (Δ) في النقطة A(2;0)	(Cf) فوق (Δ)

② دراسة اتجاه تغير الدالة f : الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}(2x-4)e^{\frac{1}{2}x} - 1 = (2+x-2)e^{\frac{1}{2}x} - 1 = xe^{\frac{1}{2}x} - 1 = e^{\frac{1}{2}x}(x - e^{-\frac{1}{2}x}) = e^{\frac{1}{2}x}g(x)$$

بما أن $e^{\frac{1}{2}x} > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وعليه :
جدول التغيرات

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

③ إثبات ان $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$: لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ تكافئ $\alpha - e^{-\frac{1}{2}\alpha} = 0$ ومنه $e^{-\frac{1}{2}\alpha} = \alpha$ إذن $e^{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{\alpha}$

$$f(\alpha) = (2\alpha - 4)\frac{1}{\alpha} + 2 - \alpha = \frac{2\alpha}{\alpha} - \frac{4}{\alpha} + 2 - \alpha = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$$

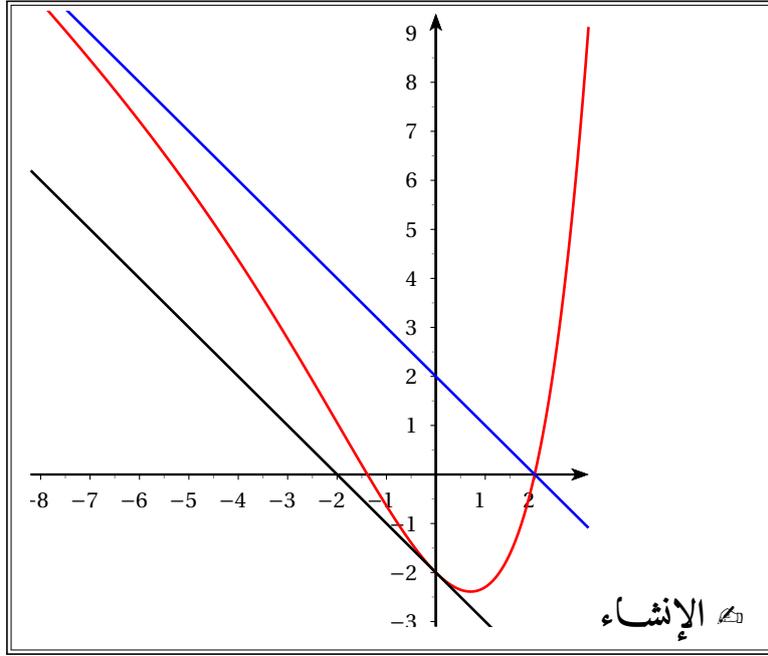
بحصر $f(\alpha)$:

لدينا $0,71 < \alpha < 0,71$ ومنه : $3,29 < 4 - \alpha < 3,3$ و $-5,61 < -\frac{4}{\alpha} < -5,71$ إذن : $-2,42 < f(\alpha) < -2,31$

أحد اثبي النقطة A نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب : لدينا : $f(0) = -2$ ومنه $(C_f) \cap (y'y) = \{A(0; -2)\}$

$$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0) = -x - 2$$

معادلة المماس عند A :



المناقشة البيانية:

لدينا: $2e^{\frac{1}{2}x} = m-2$ تكافئ $(2x-4)e^{\frac{1}{2}x} = m-2$

أي $m = (2x-4)e^{\frac{1}{2}x} + 2$ وعليه $f(x) = m-x$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = m-x$

من أجل $m < -2$ المعادلة لا تقبل حلولاً

من أجل $-2 < m < 2$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

من أجل $m = -2$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً $x = 0$

من أجل $m > 2$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً موجباً

التمرين 10

لتكن الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

(1) أدرس تغيرات الدالة g

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-0.38, -0.37[$

(3) إستنتج إشارة $g(x)$

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(وحدة الطول $2cm$)

(1) بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = g(x)$

(2) أدرس تغيرات الدالة f

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

(4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ)

(5) بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف

(6) بين أن: $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

- (7) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (Δ) (نأخذ $\alpha = -0.375$) .
 • (Δ_m) مستقيم معادلته $y = 2x + m$ حيث m عدد حقيقي .
 (1) عين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .
 (2) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة التالية : $\frac{x}{e^x} + 1 - m = 0$.

الحل

• g الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} - e^{-x} + 2 \right) = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

لدينا من أجل كل x من \mathbb{R} ، $g'(x) = (2-x)e^{-x}$ ، ومنه إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $(2-x)$ وجدول تغيراتها يعطى بالشكل :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$e^{-2} + 2$	2

2. إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $] -0.38, -0.37[$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $] -\infty, 2[$ ومنه على المجال $] -0.38, -0.37[$.
 وبما أن $g(-0.38) \times g(-0.37) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $] -0.38, -0.37[$.

3. إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		$-$	$+$

• نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

1. لدينا من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = 2 - e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x} + 2$ ومنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = g(x)$

2. دراسة تغيرات الدالة f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ ولدينا أيضا إشارة } g(x) \text{ هي من نفس إشارة } f'(x)$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3. لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x - 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

4. لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (2x + 1)$ لدينا $f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$ ومنه فإن إشارة الفرق هي عكس إشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (2x + 1)$	+		-
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

5. إثبات أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .

لدينا من أجل كل x من \mathbb{R} ، $f''(x) = g'(x)$ ، ومنه

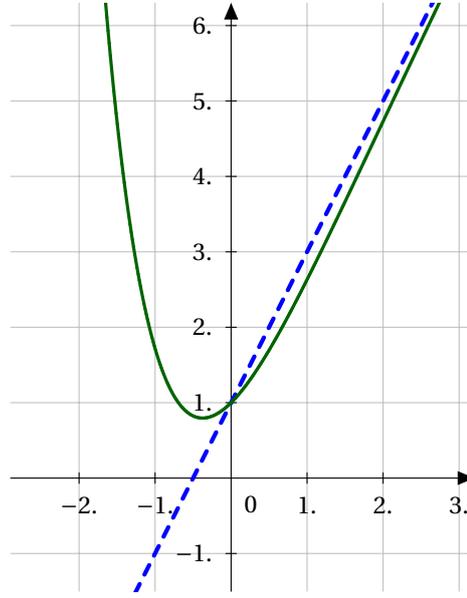
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$		+ 0 -	

بما أن $f''(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها عند 2 فإن النقطة $(2; 5 - \frac{2}{e^2})$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

6. إثبات أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

$g(\alpha) = 0$ تكافئ $e^{-\alpha} = -\frac{2}{\alpha - 1}$ ومنه : $f(\alpha) = 2\alpha + 1\alpha - e^{-\alpha} = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

7. رسم المنحنى (C_f)



◀ (Δ_m) مستقيم معادلته $y = 2x + m$ حيث m عدد حقيقي

1. تعيين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

المستقيم $y = 2x + m$ مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة x_0 منه يعني : $f'(x_0) = 2$ أي أن $g(x) = 2$ ومنه $(x-1)e^{-x} = 0$ وبالتالي $x_0 = 1$

لدينا : $f(1) = 3 - e^{-1}$ ومنه معادلة المماس هي $y = 2x + 1 - e^{-1}$ بالمطابقة نجد $m = 1 - e^{-1}$

2. المناقشة البيانية :

$m + 2x = f(x)$ أي أن $m + 2x = -xe^{-x} + 1 + 2x$ بإضافة $2x$ للطرفين نجد $m = -xe^{-x} + 1$ يعني $\frac{x}{e^x} + 1 - m = 0$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ، لدينا عندئذ :

◀ إذا كان $m \in]-\infty, 1 - e^{-1}[$ المعادلة لا تقبل حولا .

◀ إذا كان $m = 1 - e^{-1}$ للمعادلة حل مضاعف .

◀ إذا كان $m \in]1 - e^{-1}, 1[$ للمعادلة حلان .

◀ إذا كان $m > 1$ للمعادلة حل وحيد .

التمرين 11

◀ g دالة عددية معرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = e^{-x} + x - 1$

(1) أحسب $g'(x)$ ثم عين اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} .

(2) بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $g(x) \geq 0$ ، استنتج أن : $e^{-x} + x \geq 1$.

◀ نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = \frac{x}{e^{-x} + x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

(1) تحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R}^* : $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$

- (2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. فسر النتيجةين بيانياً .
- (3) بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x}+x)^2}$.
- (4) أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (5) أكتب معادلة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة O .
- (6) تحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $x-f(x) = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$ ، ثم استنتج إشارة $x-f(x)$.
- (7) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.
- (8) أنشئ (Δ) و (C_f) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- (9) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $\frac{xe^x}{xe^x+1} - 1 = m$.

الحل

1. حساب $g'(x)$ تعيين اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} :

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = -e^{-x} + 1$

$$\begin{array}{l} -e^{-x} + 1 \leq 0 \quad \text{يكافئ} \quad g'(x) \leq 0 \quad \text{يكافئ} \quad -e^{-x} + 1 \geq 0 \\ e^{-x} \geq 1 \quad \text{يكافئ} \quad \text{يكافئ} \quad e^{-x} \leq 1 \\ -x \geq 0 \quad \text{يكافئ} \quad \text{و} \quad 1 \leq e \\ x \leq 0 \quad \text{يكافئ} \quad \text{يكافئ} \quad x \geq 0 \end{array}$$

إذن إذا كان $x \in]-\infty; 0[$ فإن الدالة g متناقصة تماماً، وإذا كان $x \in]0; +\infty[$ فإن الدالة g متزايدة تماماً

2. تبيان أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $g(x) \geq 0$

من أجل $x \in]-\infty; 0[$: $g(x) \geq g(0)$ لأن g متناقصة على $]-\infty; 0[$ و منه $g(x) \geq 0 \dots (1)$

من أجل $x \in]0; +\infty[$: $g(x) \geq g(0)$ لأن g متزايدة على $]0; +\infty[$ و منه $g(x) \geq 0 \dots (2)$

من (1) و (2) ينتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل x من \mathbb{R}

استنتج أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $e^{-x} + x \geq 1$

لدينا: $g(x) \geq 0$ يكافئ $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ و منه $e^{-x} + x \geq 1$

1. التحقق من أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$ لدينا:

$$f(x) = \frac{x}{e^{-x} + x} = \frac{(x) \times 1}{(x) \times (\frac{e^{-x}}{x} + 1)} = \frac{1}{\frac{e^{-x}}{x} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$$

2. حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = -\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^- \text{ أي } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 0^- \text{ وبالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = 1 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ أي } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 1 \text{ وبالتالي}$$

التفسير البياني:

عند $-\infty$: (\mathcal{C}_f) يقبل مستقيم مقاربا أفقيا (Δ) معادلته: $y = 0$ و (\mathcal{C}_f) تحت (Δ)

عند $+\infty$: (\mathcal{C}_f) يقبل مستقيم مقاربا أفقيا معادلته: $y = 1$.

$$3. f \text{ تقبل الإشتقاق على } \mathbb{R} \text{ ولدينا: } f'(x) = \frac{1(e^{-x} + x) - (-e^{-x} + 1)(x)}{(e^{-x} + x)^2} = \frac{e^{-x} + xe^{-x}}{(e^{-x} + x)^2} \text{ إذن } f'(x) = \frac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x} + x)^2}$$

4. دراسة إشارة $f'(x)$ ثم تشكيل جدول تغيرات f على \mathbb{R}

$$\text{لدينا } f'(x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + x)^2} (x+1)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x+1$ لأن $e^{-x} > 0$ والمقام موجب تماما، إذن:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$		$-$	$+$

ومن جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$		$-$	$+$
f	0	$\frac{1}{1-e}$	1

5. معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة O :

لدينا $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ ، إذن معادلة المماس هي $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ أي $y = x$

$$6. \text{ التحقق من أن } x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

$$x - f(x) = x - \frac{x}{e^{-x} + x} = \frac{x(e^{-x} + x - 1)}{e^{-x} + x} = \frac{x(e^{-x} + x - 1)}{e^{-x} + x - 1 + 1} = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

إشارة $x - f(x)$:

لدينا $g(x) \geq 0$ و $g(x) + 1 \geq 1$ و $g(x) + 1 > 0$ ، إذن إشارة $x - f(x)$ من إشارة x

إذا كان $x < 0$ فإن $x - f(x) < 0$ ،

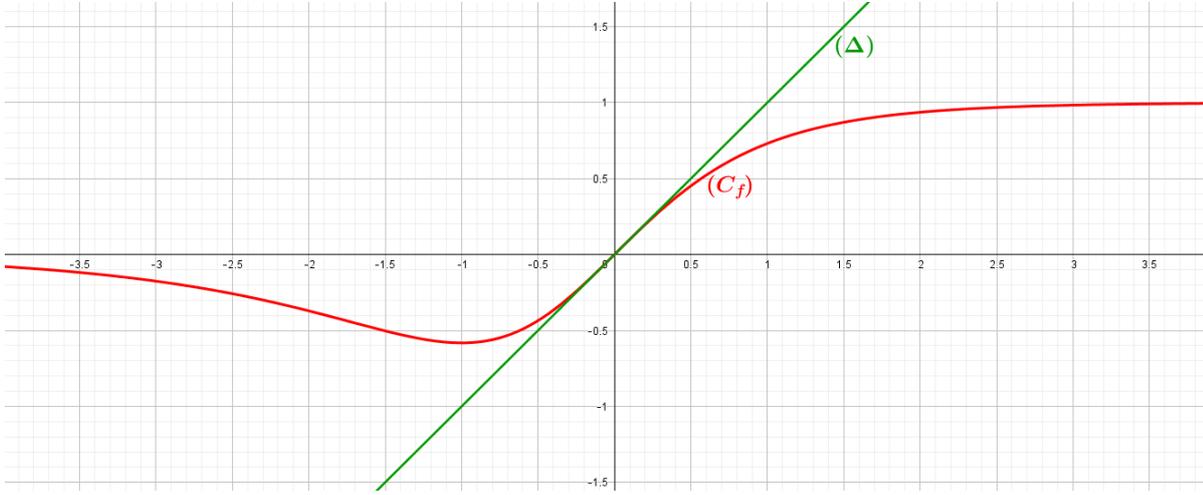
$x > 0$ فإن $x - f(x) > 0$

وإذا كان $x = 0$ فإن $x - f(x) = 0$.

7. الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$:

$x > 0$	$x = 0$	$x < 0$
(C_f) تحت (Δ)	(Δ) و (C_f) يتقاطعان في النقطة O	(C_f) فوق (Δ)

8. رسم (C_f) و (Δ)



9. المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{xe^x}{xe^x+1} - 1 = m$

المناقشة: لدينا $\frac{xe^x}{xe^x+1} - 1 = m$ يكافئ $\frac{e^x}{e^x} \frac{x}{x+e^{-x}} = m+1$ يكافئ $\frac{x}{x+e^{-x}} = m+1$ أي $f(x) = m+1$ حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = m+1$ ، نميز الحالات التالية:

- ☞ إذا كان $m+1 \geq 1$ أي $m \geq 0$ ، المعادلة ليس لديها حلول
- ☞ إذا كان $0 < m+1 < 1$ أي $-1 < m < 0$ ، للمعادلة حل وحيد موجب
- ☞ إذا كان $m+1 = 0$ أي $m = -1$ ، للمعادلة حل وحيد معدوم $x_0 = 0$
- ☞ إذا كان $\frac{1}{1-e} < m+1 < 0$ أي $\frac{1}{1-e} - 1 < m < -1$ ، للمعادلة حلين سالبين متميزين
- ☞ إذا كان $m+1 = \frac{1}{1-e}$ أي $m = \frac{1}{1-e} - 1$ ، للمعادلة حل واحد سالب هو $x_1 = -1$
- ☞ إذا كان $m+1 < \frac{1}{1-e}$ أي $m < \frac{1}{1-e} - 1$ ، المعادلة ليس لديها حلول .

12 التمرين

- ☞ لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$
- حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معاملا توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$
- نضع $c = -3$ ، $b = 0$ ، $a = 1$
- (2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- (3) ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

- (4) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها x=0
 (5) عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .
 (6) أرسم (T) و (C_f) .
 (7) m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^2 - 3 + me^x = 0$.

الحل

• لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$
 حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .
 (1) تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة A(0; -3) مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

$$f(0) = -3 \text{ و هذا يعني } c = -3$$

$$\text{و لدينا } f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$$

$$f'(0) = 3 \text{ يعني أن } b - c = 3 \text{ و منه } b = 0$$

$$f(\sqrt{3}) = 0 \text{ يعني أن } (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0 \text{ و منه } a = 1$$

$$(2) \text{ نضع } a = 1, b = 0, c = -3 \text{ تصبح } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$\text{حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ لأنه بوضع } x = 2t$$

$$\text{نجد } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4t^2}{e^{2t}} \right] = 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right)^2 = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$$

(3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$\text{حساب المشتقة : } f'(x) = (2x)e^{-x} - e^{-x}(x^2 - 3) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

إشارة المشتقة : إشارتها من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$ و متزايدة على المجال $]-1; 3[$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
f'(x)		-	0	+	0	-
f(x)	$+\infty$			$\frac{6}{e^3}$		0

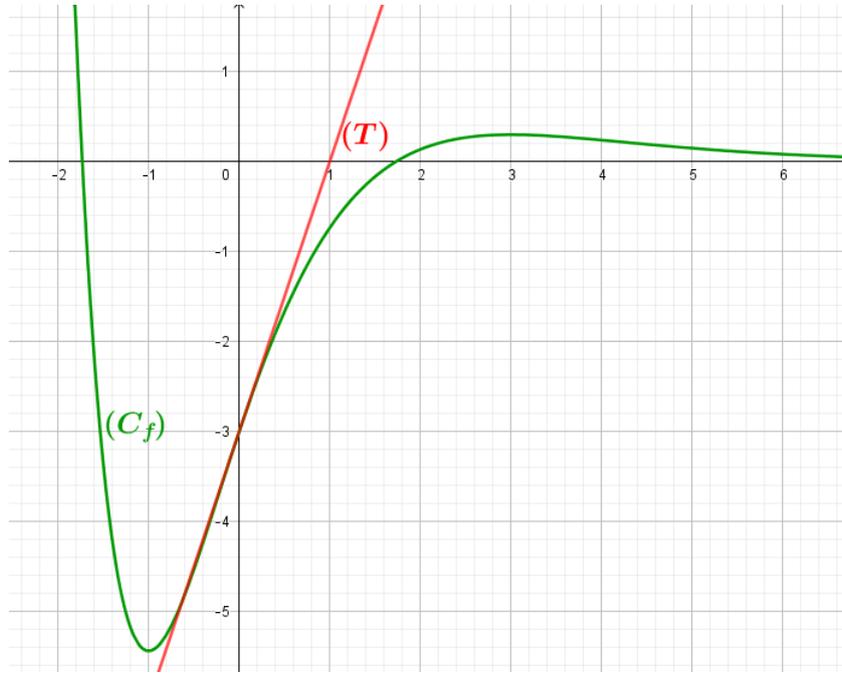
$-2e$

(4) كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها x=0 هي $y = 3x - 3$.

(5) تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل :

$f(x) = 0$ يكافئ $x^2 - 3 = 0$. أي ان $x = \sqrt{3}$ او $x = -\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3}; 0)$ و $C(-\sqrt{3}; 0)$.

(6) رسم (T) و (C_f)



(7) m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^2 - 3 + me^x = 0$ المعادلة تكافئ
 $-m = f(x)$ أي ان $-m = (x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ $-m = f(x)$
 حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$.
 المناقشة :

☞ لما $-m < -2e$ أي ان $m > 2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان ومنه ليس للمعادلة حلول .
 ☞ لما $-m = -2e$ أي ان $m = 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل
 وحيد سالب .

☞ لما $-3 < -m < -2e$ أي ان $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان ومنه للمعادلة
 حلين سالبين .

☞ لما $-m = -3$ أي ان $m = 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها
 سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .

☞ لما $-3 > -m > -2e$ أي ان $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة
 ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .

☞ لما $-m > 0 > -\frac{6}{e^3}$ أي ان $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان
 ونقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

☞ لما $-m = \frac{6}{e^3}$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه
 للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .

☞ لما $-m > \frac{6}{e^3}$ أي ان $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد
 سالب .

بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2021 و لا تنسوننا من خالص دعائكم