دراسة دالة عددية رقم 01

الجزء الأول :

لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^4 - 4x - 3$.

1) أدرس تغيّرات الدالة g (تحسب النهايات عند $+\infty$ وَ $-\infty$).

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّين بالضبط α وَ β ، حيث : $\alpha < 0 < \beta$.

ب) تحقق أنّ : $-0,69 < \alpha < -0,7$ وَ $1,78 < \beta < 1,79$.

ج) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني :

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـــ : $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ وحدته $(2cm)$.

1) عيّن نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

2) أ) عيّن الأعداد الحقيقية : a ، b ، c ، d ، e حيث : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx^2 + dx + e}{x^3 - 1}$ وَ $(x \neq 1)$.

ب) إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C_f) يطلب تعيين معادلته .

ج) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x \neq 1$ يكون : $f'(x) = \dfrac{x^2 \times g(x)}{(x^3 - 1)^2}$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

ج) أعـطـ حصرا لكل من : $f(\alpha)$ وَ $f(\beta)$.

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

5) أنشئ كلا من المماس (T) وَ (Δ) وَ المنحني (C_f) .

6) h هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $h(x) = \dfrac{x^4 + 1}{|x^3 - 1|}$.

أ) أكتب $h(x)$ دون رمز القيـمـة المطلقة .

ب) إشرح كيف يتم إنشاء (C_h) المنحني الممثل للدالة h ، إنطلاقا من المنحني (C_f) .

ج) أنشئ المنحني (C_h) في نفس المعلم السابق .

حل مختصر للدالة رقم 01

الجزء الأول :

لدينا الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^4 - 4x - 3$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

– حساب النهايات : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$.

– الدالة المشتقة : الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $g'(x) = 4x^3 - 4$.

تكون : $4x^3 - 4 \geq 0$ إذا كان : $x^3 \geq 1$ ، و منه : $x \geq 1$. (أي تكون : $g'(x) \leq 0$ إذا كان : $x \leq 1$).

– جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ) على المجال $]-\infty;1]$ الدالة g مستمرة و رتيبة ، و صورة هذا المجال هي $[-6;+\infty[$ و $0 \in [-6;+\infty[$

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α ينتمي إلى $]-\infty;1[$.

بالمثل : المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد β من $]1;+\infty[$.

ب) نحسب : $g(-0,7) = ...$ و $g(-0,69) = ...$ ، نجد أنّ : $g(-0,69) < 0 < g(-0,7)$.

إذن : $-0,7 < \alpha < -0,69$.

نفس الشيء بالنسبة إلى β ، سنجد أنّ : $1,78 < \beta < 1,79$.

3) إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	0		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الجزء الثاني :

لدينا f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بــــ : $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^3-1}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{x^3} = -\infty \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{x^4+1}{x^3-1} = -\infty \text{ ، } \lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{x^4+1}{x^3-1} = +\infty \text{ .}$$

2) أ) لدينا : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx^2+dx+e}{x^3-1}$ ، أي : $f(x) = \dfrac{ax^4 + -ax + bx^3 - b + cx^2 + dx + e}{x^3-1}$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d - a = 0 \\ e - b = 1 \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \\ e = 1 \end{cases}$ ، و منه : $f(x) = x + \dfrac{x+1}{x^3-1}$.

ب) نعلم أنّ : $\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{x+1}{x^3-1} \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{x+1}{x^3-1} = 0 \end{cases}$ ، إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ج) الوضعية : ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$ ، أي : $f(x)-x = \dfrac{x+1}{x^3-1}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x^3-1		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$+$		$-$	||	$+$	
الوضعية		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(-1;1)$	(C_f) يقع تحت (Δ)	||	(C_f) يقع فوق (Δ)	

3) الدالة المشتقة : الدالة f قابلة للإشتقاق من أجل كل x يختلف عن 1 و دالتها المشتقة هي :

$f'(x) = \dfrac{4x^3(x^3-1) - 3x^2(x^4+1)}{(x^3-1)^2}$ ، أي : $f'(x) = \dfrac{x^2 \times \left[4x(x^3-1) - 3(x^4+1)\right]}{(x^3-1)^2}$ ، أي :

$f'(x) = \dfrac{x^2(4x^4 - 4x - 3x^4 - 3)}{(x^3-1)^2}$ ، أي : $f'(x) = \dfrac{x^2(x^4 - 4x - 3)}{(x^3-1)^2}$ ، و منه : $f'(x) = \dfrac{x^2 \times g(x)}{(x^3-1)^2}$.

و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة : $x^2 \times g(x)$ ، و هي موضحة في الجدول المقابل

x	$-\infty$		α		0		1		β		$+\infty$
x^2		$+$		$+$		$+$	||	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$		$-$		$-$	||	$-$		$+$	
$x^2 \times g(x)$		$+$		$-$		$-$	||	$-$		$+$	

جدول التغيرات

x	$-\infty$		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$			0		||		0		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ج) حصرا كل من $f(\alpha)$ وَ $f(\beta)$:

1) حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $-0,7 < \alpha < -0,69$ ، أي : $0,23 < \alpha^4 < 0,240$ ، أي : $1,23 < \alpha^4 + 1 < 1,240......(1)$

وَ $-0,34 < \alpha^3 < -0,33$ ، أي : $-1,34 < \alpha^3 - 1 < -1,33$ ، أي : $\dfrac{1}{-1,34} < \dfrac{1}{\alpha^3 - 1} < \dfrac{1}{-0,33}$ ،

أي : $\dfrac{1}{1,33}........(2)$ $\dfrac{1}{0,34} < -\dfrac{1}{\alpha^3 - 1} < \dfrac{1}{1,33}$

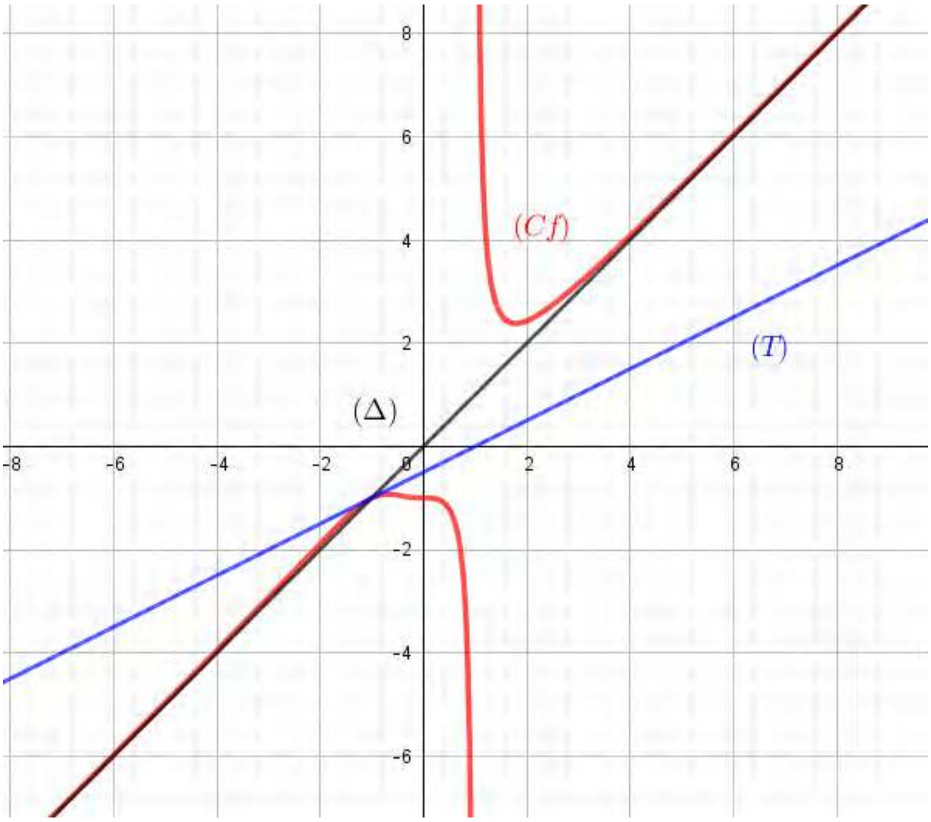
بضرب (1) وَ (2) نجد : $\dfrac{1,24}{1,33} < -\dfrac{\alpha^4+1}{\alpha^3-1} < \dfrac{1,23}{0,34}$ ، أي : $0,92 < -\dfrac{\alpha^4+1}{\alpha^3-1} < 0,93$ ،

و منه : $-0,93 < \dfrac{\alpha^4+1}{\alpha^3-1} < -0,92$ ، إذن : $-0,93 < f(\alpha) < -0,92$.

2) حصر $f(\beta)$: نفس الطريقة مثل حصر $f(\alpha)$ ، و نجد أنّ : $2,33 < f(\beta) < 2,42$.

4) معادلة المماس : $(T) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ ، و منه : $(T) : y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

5) الإنشـــاء :



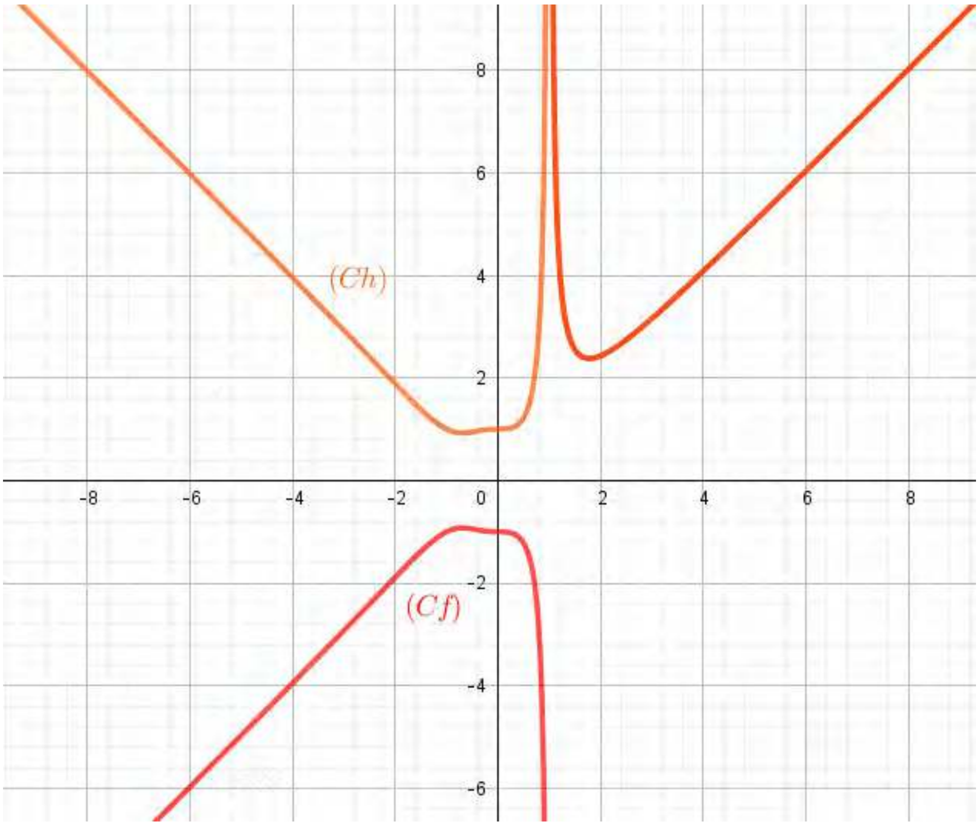
6) لدينا : $h(x) = \dfrac{x^4+1}{|x^3-1|}$.

أ) كتابة الدالة h دون رمز القيمة المطلقة :
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4+1}{x^3-1} = f(x)..........(x>1) \\ -\dfrac{x^4+1}{x^3-1} = -f(x).......(x<1) \end{cases}$$

ب) (C_h) ينطبق على (C_f) على $]1;+\infty[$.

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل على $]-\infty;1[$.

ج) الإنشـــــاء :



كتابة الأستاذ : ب . ع

دراسة دالة عددية رقم 02

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، وحدته $(5.cm)$.

نعتبر المنحنى (C) الذي معادلته في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي : $x(x^2+y^2)+y^2-3x^2=0$.

1) نفرض الدالة f المعرّفة على $]-1;3]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2(3-x)}{x+1}}$.

❖ بيّن أنّ المنحنى (C) هو إتحاد المنحنيين (C_1) وَ (C_2) الممثلين للدالتين f وَ $-f$ على الترتيب .

2) أ) عيّن كلا من : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ وَ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج ؟ .

ب) فسّـــر النتائج هندسيا .

3) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ، مــــاذا تستنتج ؟ .

4) أ) بـيّن أنّـه من أجل كل $x \in]-1;0[\cup]0;3[$ يكون : $f'(x)=\dfrac{3x-x^3}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)(3-x)}}$.

ب) إستـنـتـج إشــــارة $f'(x)$.

ج) أحســب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ، ثـمّ فـسّـر النتيجة هندسيــاً .

د) شكّـــل جدول تغيّرات الدالة f .

5) أنشئ (C_1) ، ثمّ أكمل إنشـــاء المنحنى (C) .

حل مختصر للدالة العددية رقم 02

1) (C) هو المنحنى الذي معادلته : $x(x^2+y^2)+y^2-3x^2=0$ ، أي : $x^3+xy^2+y^2-3x^2=0$ ، أي :

$y^2(x+1)=3x^2-x^3$ ، و منه : $y^2=\dfrac{3x^2-x^3}{x+1}$ ، إذن : $y=\sqrt{\dfrac{3x^2-x^3}{x+1}}$ أو $y=-\sqrt{\dfrac{3x^2-x^3}{x+1}}$ ، أي :

$y=\sqrt{\dfrac{x^2(3-x)}{x+1}}$ أو $y=-\sqrt{\dfrac{x^2(3-x)}{x+1}}$ ، و منه : $y=f(x)$ أو $y=-f(x)$ مع $x\in\left]-1;3\right]$.

و عليه نقول أنّ (C) هو إتحاد المنحنيين (C_1) وَ (C_2) الممثلين للدالتين f وَ $-f$ على الترتيب .

2) أ) تعيين النهايات :

❖) $\displaystyle\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\sqrt{\dfrac{x^2(x+1)}{x+1}}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}=\sqrt{3}$.

❖) $\displaystyle\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\sqrt{\dfrac{x^2(3-x)}{x+1}}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-x\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}-\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}=-\sqrt{3}$.

نستنتج أنّ الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 0 .

ب) **التفسير الهندسي** : نقول أنّ المنحنى (C_1) يقبل عند النقطة $O(0;0)$ نصفي مماسين (T_1) وَ (T_2) معامل توجيههما $\sqrt{3}$ وَ $-\sqrt{3}$ على الترتيب ، والنقطة O هي نقطة زاوية .

3) $\displaystyle\lim_{x\xrightarrow{<}3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\xrightarrow{<}3}\frac{\sqrt{\dfrac{x^2(3-x)}{x}}-0}{x-3}=\lim_{x\xrightarrow{<}3}x\times\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{x-3}$ ، أي :

$\displaystyle\lim_{x\xrightarrow{<}3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\xrightarrow{<}3}x\times\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}\times\frac{-1}{3-x}=\lim_{x\xrightarrow{<}3}x\times\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}\times\frac{-1}{(\sqrt{3-x})^2}$ ، و منه :

$\displaystyle\lim_{x\xrightarrow{<}3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\xrightarrow{<}3}\frac{-x}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{3-x})}=-\infty\begin{cases}-3\\0^+\end{cases}$.

❖) نستنتج أنّ الدالة f لا تقبل الإشتقاق على يسار 3 وَ المنحنى (C_1) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $(3;0)$

4) حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{\dfrac{(6x-3x^2)(x+1)-(3x^2-x^3)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{3x^2-x^3}{x+1}}}=\frac{6x^2+6x-3x^3-3x^2-3x^2+x^3}{(x+1)^2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{x+1}{3x^2-x^3}}$$

أي : $f'(x)=\dfrac{-2x^3+6x}{(x+1)^2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x^2-x^3}}=\dfrac{2(-x^3+3x)}{(\sqrt{x+1})^4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x^2-x^3}}$ ، أي :

$$f'(x)=\frac{-x^3+3x}{(\sqrt{x+1})^3}\times\frac{1}{\sqrt{3x^2-x^3}}=\frac{-x^3+3x}{(x+1)\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{\sqrt{3x^2-x^3}}=\frac{3x-x^3}{(x+1)\sqrt{(x+1)(3x^2-x^3)}}$$

و منه : $f'(x) = \dfrac{3x - x^3}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)(3-x)}}$ ، و هو المطلوب .

ب) نلاحظ أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $(3x - x^3)$:

لدينا : $3x - x^3 = x(3 - x^2) = x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$. سنلخص الإشارة في الجدول التالي :

❖) ممكن دراسة الإشارة على $\mathbb{R}$ ، ثم في جدول التغيرات نأخذ الإشارة فقط على D_f .

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$-\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3 - x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(3x - x^3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

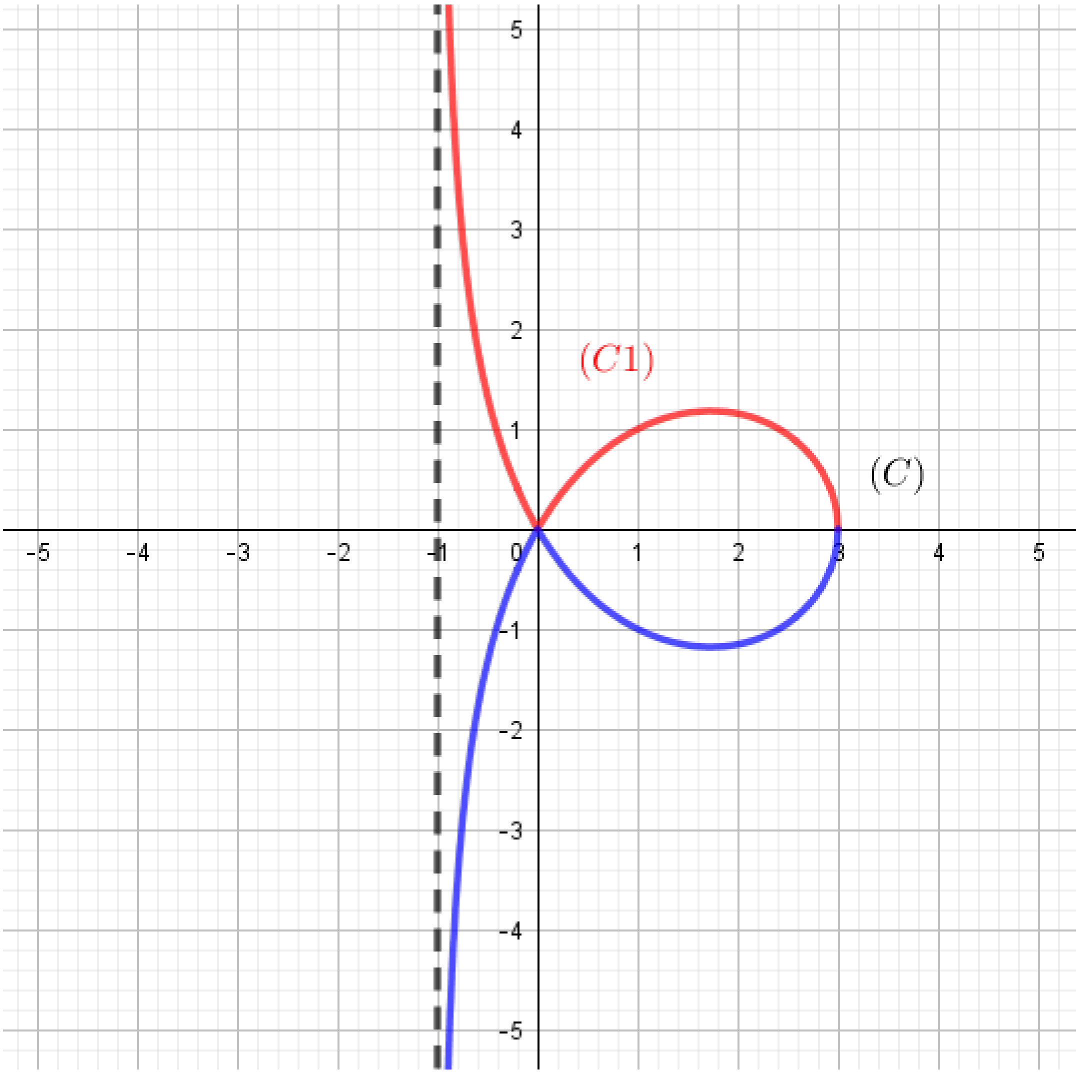
ج) حساب النهاية :

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty \begin{cases} 2 \\ 0^+ \end{cases}$ ، و منه المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحني (C_1) .

د) جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		0		$\sqrt{3}$		3
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1,5$	$\searrow$	0

5) الإنشـــاء :



كتابة الأستاذ : ب.ع

دراسة دالة عددية رقم 03

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{-x^3-2x^2+7x+12}{(x+2)^2}$.

و ليكن (C_f) المنحني الممثّل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب نهاياتٍ الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب) فسّر هندسياً النهاية عند -2 .

2) أ) عيّن الأعداد الحقيقية : a ، b ، c ، d بحيث من أجل كل x يختلف عن -2 تكون :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}+\frac{d}{(x+2)^2}\ .$$

ب) إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C_f) بجواري $+\infty$ وَ $-\infty$.

ج) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x\neq -2$ تكون : $f'(x)=\dfrac{(-x-1)(x^2+5x+10)}{(x+2)^3}$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

4) أ) أحسب : $f(-3)$ ، ثمّ حدّد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

ب) حدّد أيضا نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور التراتيب .

5) أنشئ المنحنى (C_f) .

6) m عدد حقيقي . عيّن قيم m حتّى يكون للمعادلة : $f(x)=m$ ثلاث حلول سالبة .

7) g هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=f(|x|)$.

أ) بيّن أنّ الدالة g زوجية .

ب) إشرح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_g) إنطلاقاً من المنحنى (C_f) .

ج) أنشئ المنحنى (C_g) في نفس المعلم السابق .

حل مختصر للدالة رقم 03

1) أ) حساب نهايات الدالة f :

❖) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=-\infty\begin{cases}-2\\0^+\end{cases}$ ، ❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=-\infty\begin{cases}-2\\0^+\end{cases}$.

ب) **التفسير الهندسي :** المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-2$.

2) أ) $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}+\frac{d}{(x+2)^2}=\frac{ax(x+2)^2+b(x+2)^2+c(x+2)+d}{(x+2)^2}$ ، أي :

$f(x)=\frac{ax^3+4ax^2+4ax+bx^2+4bx+4b+cx+2c+d}{(x+2)^2}$ ، بالمطابقة نجد :

$\begin{cases}a=-1\\4a+b=-2\\4a+4b+c=7\\4b+2c+d=12\end{cases}$ ، و منه : $\begin{cases}a=-1\\b=2\\c=3\\d=-2\end{cases}$ ، إذن : $f(x)=-x+2+\frac{3}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}$.

ب) بما أنّ : $f(x)=-x+2+\frac{3}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}$ وَ $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\frac{3}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}\right)=0$.

إذن يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) معادلته : $(\Delta): y=-x+2$ بجواري $-\infty$ وَ $+\infty$.

ج) دراسة الوضعية :

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-(-x+2)=\frac{3}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}=\frac{3x+4}{(x+2)^2}$.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$\frac{3x+4}{(x+2)^2}$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) يقع تحت (Δ)	‖	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) عند النقطة $(\frac{-4}{3};\frac{10}{3})$	(C_f) يقع فوق (Δ)	

3) أ) حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(-3x^2-4x+7)(x+2)^2-2(x+2)(-x^3-2x^2+7x+12)}{(x+2)^4}$$ ، أي :

$$f'(x)=\frac{(x+2)\Big[(-3x^2-4x+7)(x+2)-2(-x^3-2x^2+7x+12)\Big]}{(x+2)^4}$$ ، أي :

$$f'(x)=\frac{-3x^3-6x^2-4x^2-8x+7x+14+2x^3+4x^2-14x-24}{(x+3)^3}$$ ، أي :

$$f'(x)=\frac{-x^3-6x^2-15x-10}{(x+3)^3}$$ ، بملاحظة أنّ : $(-x-1)(x^2+5x+10)=-x^3-6x^2-15x-10$

و منه : $$f'(x)=\frac{(-x-1)(x^2+5x+10)}{(x+2)^3}$$ ، و هو المطلوب .

ب) ❖) جدول الإشارة :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x^2+5x+10$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$(x+2)^3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

ملاحظة : (إشارة $(x+2)^3$ من إشارة $x+2$ ، و إشارة $x^2+5x+10$ هي نفس إشارة a لأنّ : $\Delta<0$) .

❖) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

4) أ) $f(-3)=0$ ، لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل نحل المعادلة : $f(x)=0$ ،

أي : $-x^3-2x^2+7x+12=0$ ، بما أنّ : $f(-3)=0$ فإنّ : -3 هو جذر لـ $(-x^3-2x^2+7x+12)$ ،

إذن : $-x^3-2x^2+7x+12=(x+3)(ax^2+bx+c)$ ، أي :

$-x^3-2x^2+7x+12=ax^3+bx^2+cx+3ax^2+3bx+3c$ ، أي :

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a=-1 \\ b+3a=-2 \\ c+3b=7 \\ 3c=12 \end{cases}$ ، و منه : $\begin{cases} a=-1 \\ b+3a=1 \\ c=4 \end{cases}$ ،

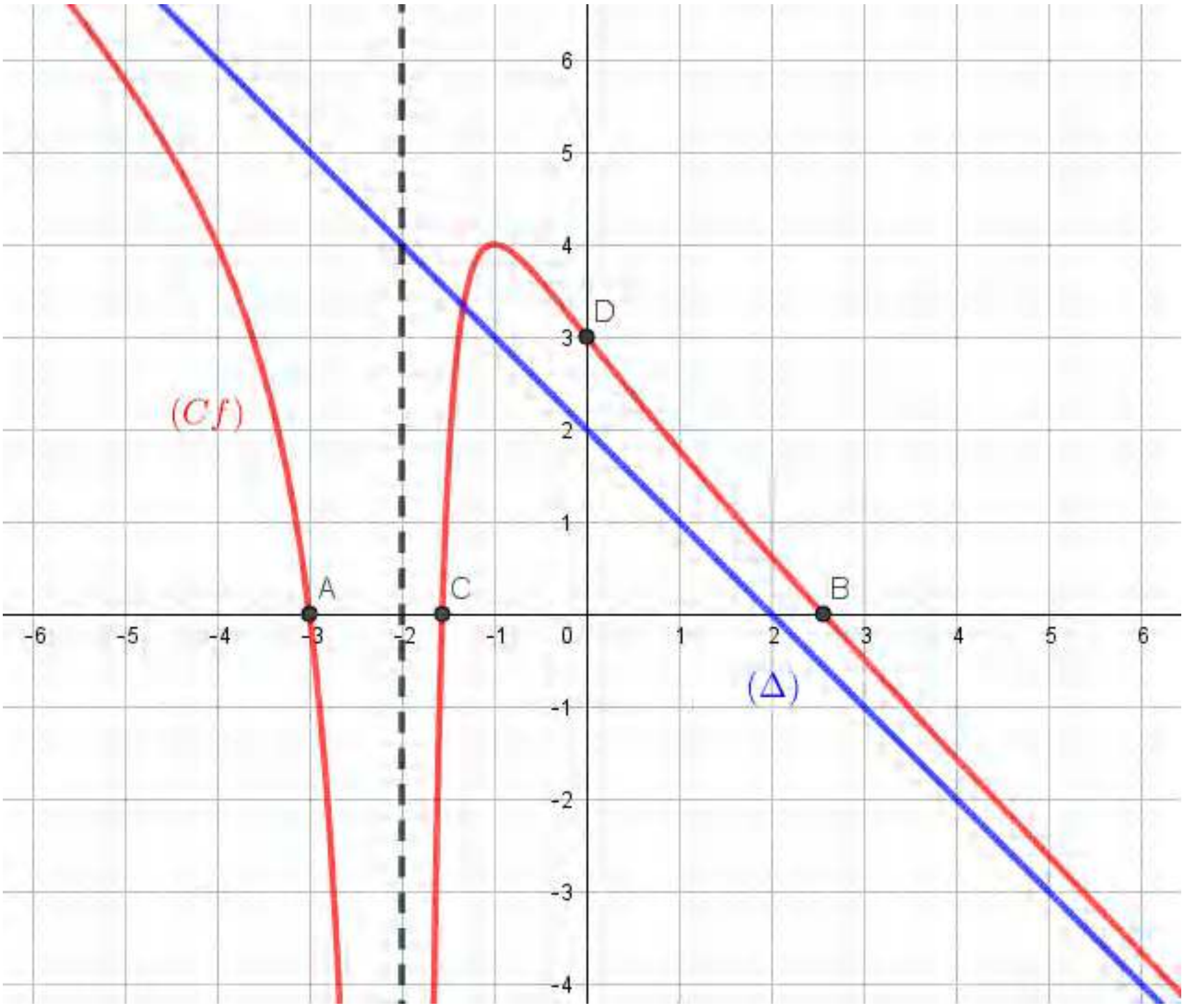
إذن : $-x^3-2x^2+7x+12=(x+3)(-x^2+x+4)$.

إما : $\begin{cases} x+3=0 \\ x=-3 \end{cases}$ ، أو : $-x^2+x+4=0$ ، أي : $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{-2}$ وَ $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{-2}$.

و منه : (C_f) يقطع حامل محور الفواصل عند : $A(-3;0)$ ، $B(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};0)$ وَ $C(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2};0)$.

ب) إيجاد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب ، أي نحسب : $f(0)=3$ ، و منه النقطة : $D(0;3)$.

5) الإنشـــــاء :



6) المعادلة : $f(x)=m$ ، تقبل ثلاث حلول سالبة لمـــا : $3<m<4$ ، (أنظر الإنشاء) .

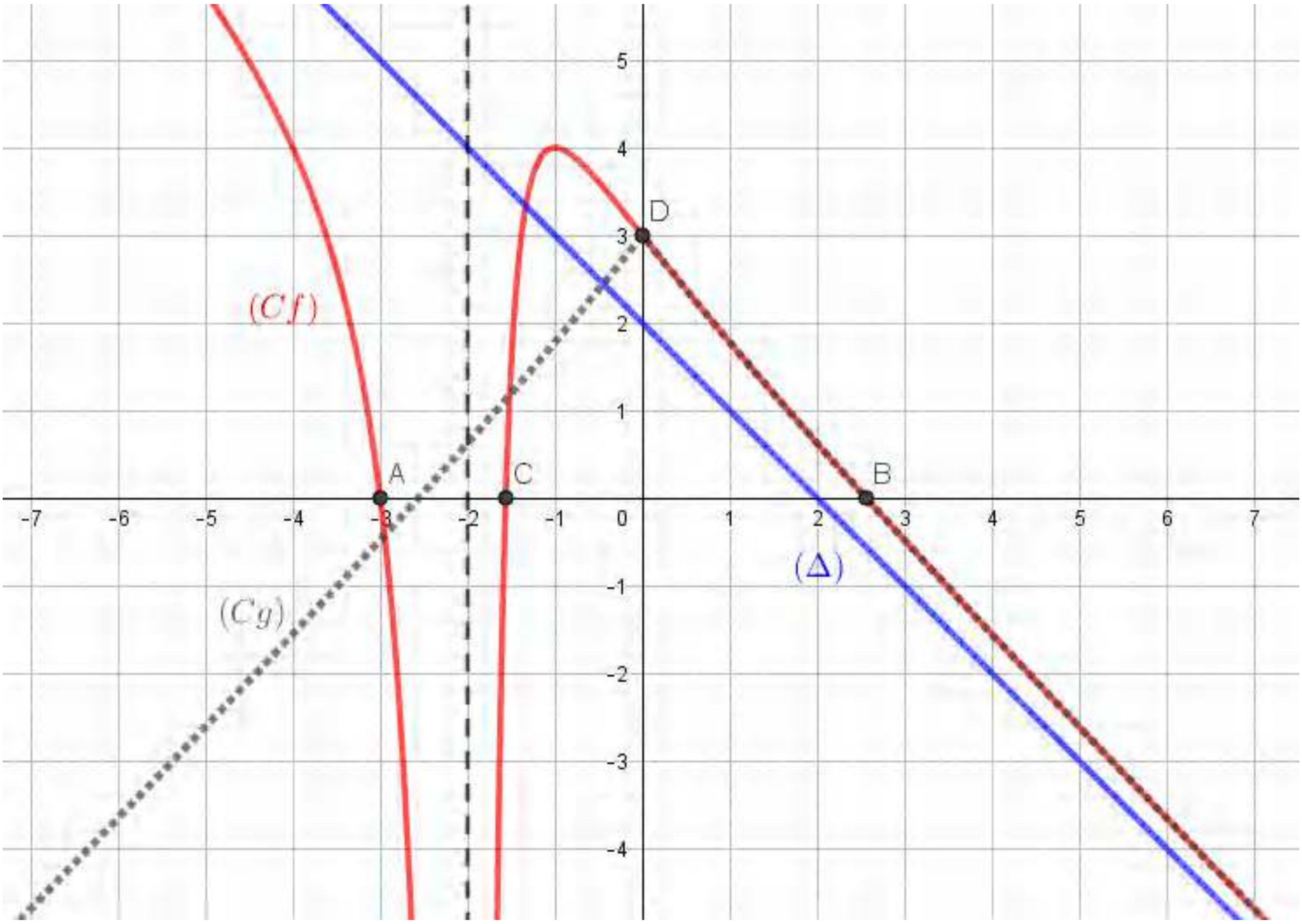
7) لدينا : $g(x) = f(|x|)$.

أ) إثبات أن الدالة g زوجية : $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$ ، إذن g زوجية .

ب) ❖ إذا كان : $x \geq 0$ فإنّ : $|x| = x$ ، و منه : $g(x) = f(x)$ ، إذن : (C_g) ينطبق على (C_f) في المجال $[0;+\infty[$

❖ ثم ننشئ (C_g) بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأنّ الدالة g زوجية .

ج) الإنشـــــــاء :



كتابة الأستاذ : ب . ع

دراسة دالة عددية رقم 04

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} \;\; .....; x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2} \;\; ....; x > 0 \end{cases}$.

وَ ليكن (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ وَ $-\infty$ ، ثمّ فسّر بيانياً النتيجة عند $-\infty$.

2) أدرس إستمرارية الدالة f عند 0 .

3) أ) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x}$. ماذا يمكن القول بالنسبة للدالة f ؟ . وَ ما هو التفسير الهندسي لهذه النتيجة ؟ .

ب) بيّن أنّه من أجل كل x من $]-\infty; 0[$ تكون : $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 - 2x} \times (\sqrt{x^2 - 2x} - x + 1)}$ ،

وَ من أجل كل x من $]0; +\infty[$ تكون : $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 \times (x+2)}{x^3}$.

ج) شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

4) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

5) بيّن أنّ المنحني (C) يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعيين إحداثياها .

6) أنشئ المستقيمات المقاربة وَ المنحني (C) .

حل مختصر للدالة رقم 04

لدينا : $\begin{cases} f(x)=x+\sqrt{x^2-2x} \;\;.....;x\le 0 \\ f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{x^2} \;\;....;x>0 \end{cases}$

1) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2-2x}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2-2x}\right]\times\dfrac{x-\sqrt{x^2-2x}}{x-\sqrt{x^2-2x}}$ ، أي :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-(x^2-2x)}{x-\sqrt{x^2-2x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-\sqrt{x^2(1-\frac{2}{x})}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x+x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$ ، $(\sqrt{x^2}=-x;x\le 0)$

و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x\left[1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right]}=1$ ، إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=+\infty$.

2) دراسة إستمرارية الدالة f عند 0 :

لدينا : $\begin{cases} -1 \\ 0^+ \end{cases}$ $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\dfrac{(x-1)^3}{x^2}=-\infty \end{cases}$ ، إذن : $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)\ne f(0)$.

و منه نقول أنّ الدالة f ليست مستمرة عند 0 .

3) أ) حساب : $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\dfrac{f(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\dfrac{x+\sqrt{x^2-2x}}{x}=\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\dfrac{x+\sqrt{x^2(1-\frac{2}{x})}}{x}=\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\dfrac{x\left[1-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right]}{x}=-\infty$.

❖) إذن : نقول أنّ الدالة f **لا** تقبل الإشتقاق عند 0 .

❖) **التفسير الهندسي** : المنحنى (C) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $O(0;0)$.

ب) ❖) حساب $f'(x)$ على $]-\infty;0[$:

$f'(x)=1+\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=1+\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}+x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}+x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\times\dfrac{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}$

أي : $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x}\times\sqrt{x^2-2x}-x+1}=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-2x}\times(\sqrt{x^2-2x}-x+1)}$.

نلاحظ أنّه من أجل $x\in\,]-\infty;0[$ يكون : $\sqrt{x^2-2x}\times\sqrt{x^2-2x}-x+1>0$.

و بالتالي ستكون : $f'(x) < 0$ ، أي أنّ الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;0[$.

❖) حساب $f'(x)$ على $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2 \times x^2 - 2x \times (x-1)^3}{x^4} = \frac{x(x-1)^2\left[3x-2(x-1)\right]}{x^4} = \frac{x(x-1)^2 \times (x+2)}{x^4} ،$$

و منه : $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 \times (x+2)}{x^3}$.

نلاحظ أنّه من أجل $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) \geq 0$ ، (لأنّ : $f'(x)$ تنعدم من أجل $x = 1$).

و منه : الدالة f متزايدة على $]0;+\infty[$.

ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0 ‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$

توضيح مهم : الشيء الجديد بالنسبة للطلبة هو أنّ الدالة f معرفة عند 0 ، أي : $f(0) = 0$ ، لكن نهاية الدالة f على يمين 0 هي $-\infty$.

4) أ) نبيّن أنّ المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ ، أي :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-3) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{x^2}-(x-3)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+3x-1-x^2(x-3)}{x^2} ، \text{أي :}$$

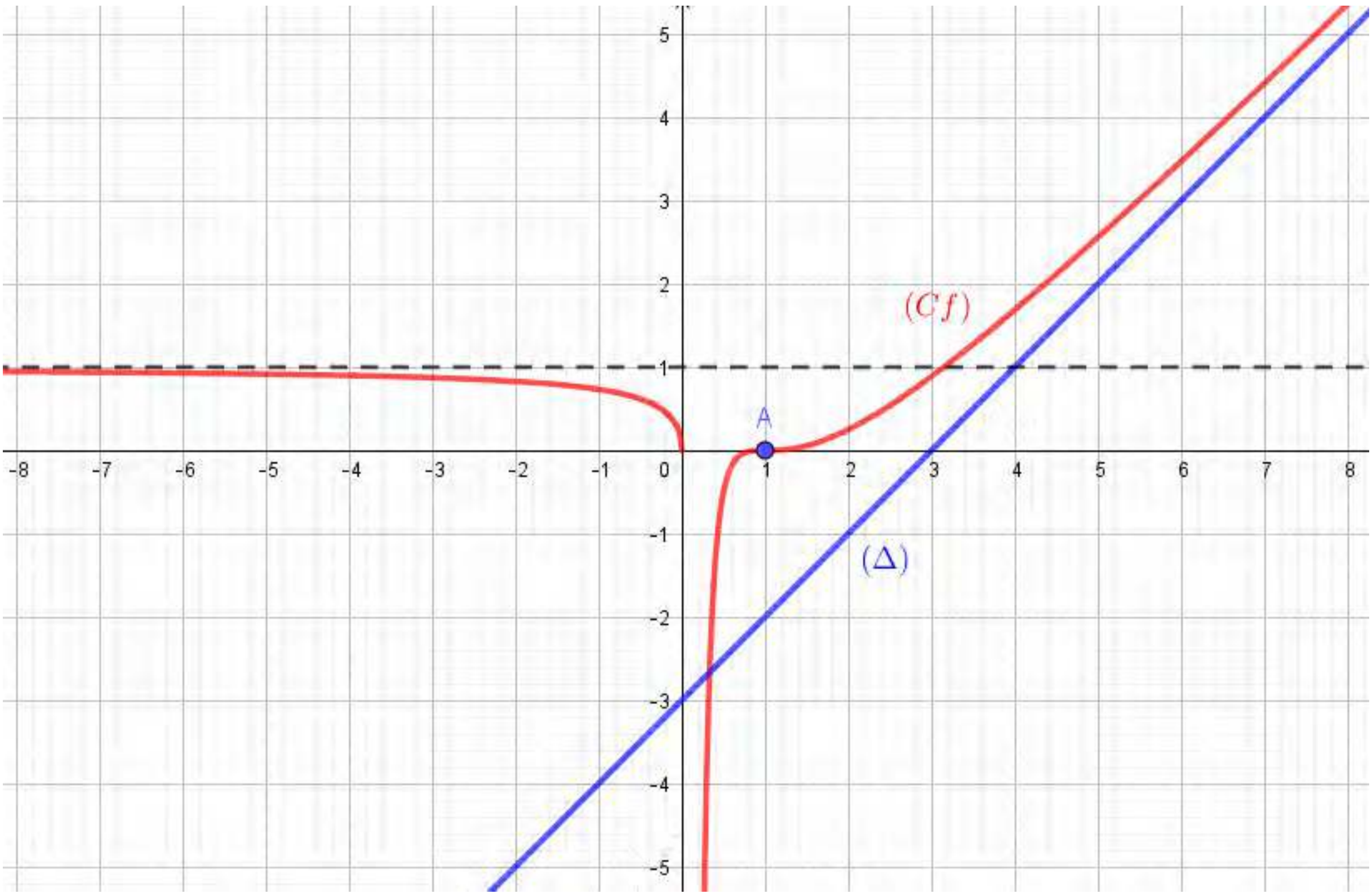
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-3) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x} = 0 .$$

و منه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب) الوضعية : أي ندرس إشارة $\dfrac{3x-1}{x^2}$ ، و منه الإشارة من إشارة $3x-1$

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$		$+$	
الوضعية		(C) يقع تحت (Δ)	(C) يقطع (Δ) عند النقطة $(\frac{1}{3};-\frac{8}{3})$	(C) يقع فوق (Δ)	

5) نلاحظ من خلال جدول التغيرات للدالة f أنّ الدالة f' تنعدم عند 1 و لا تغيّر إشارتها ،
إذن النقطة $A(1,f(1))$ هي نقطة إنعطاف للمنحني (C) ، أي : النقطة $A(1,0)$.
6) الإنشاء :



كتابة الأستاذ : ب . ع

دراسة دالة عددية رقم 05

الجزء الأوّل :

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - \sqrt{1+x^2}$.

وَ ليكن (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسياً .

ب) بيّن أنّ المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

2) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $\sqrt{1+x^2} - x > 0$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

3) أ) أنشئ المماس (T) وَ المنحني (C) .

ب) حل بيانياً المتراجحة : $f(x) > 2x - 1$.

ج) تحقّق أنّه من أجل كل $x > 0$ يكون : $x(1 + f(\frac{1}{x})) = 1 + f(x)$.

الجزء الثّاني :

لتكن الدالة g المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ بـ :
$$\begin{cases} g(x) = \tan x - \sqrt{1+\tan^2 x} \;\;........ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ g(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

و ليكن (Γ) هو المنحني الممثل للدالة g .

1) بيّن أنّ : $\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$.

2) أحسب : $\lim_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسياً .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ يكون : $g(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x}$.

ب) أدرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ أنشئ منحناها (Γ) في معلم آخر .

الجزء الثالث :

لتكن الدالة h المعرّفة على $\left]-\infty;0\right] \cup \left[2;+\infty\right[$ كما يلي :
$$\begin{cases} h(x) = x - \sqrt{1+x^2} \;......... \; x \le 0 \\ h(x) = 2 - x - \sqrt{x^2 - 4x + 5} \;\; ..... \;\; x \ge 2 \end{cases}$$

1) بيّن أنّ المستقيم الذي معادلته : $x = 1$ هو محور تناظر للمنحني (C_h) .

2) شكل جدول تغيّرات الدالة h .

3) أنشئ (C_h) في نفس معلم الدالة f .

المسألة مأخوذة من أحد كتب المغرب الشقيق مع تعديل يوافق المنهاج الجزائري

حل مختصر للدالة رقم 05

الجزء الأول :

1) أ) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{1+x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\times x+\sqrt{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}=0\left\{\begin{array}{l}-1\\+\infty\end{array}\right.$$

إذن المنحني (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب بجوار $+\infty$.

ب) بيان أنّ المستقيم (d) مقارب مائل بجوار $-\infty$: أي نحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to-\infty}-x-\sqrt{1+x^2}$ ، أي :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x=(-x-\sqrt{1+x^2})\times\frac{-x+\sqrt{1+x^2}}{-x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{-1}{-x+\sqrt{1+x^2}}=0\left\{\begin{array}{l}-1\\+\infty\end{array}\right. .$$

إذن المستقيم (d) مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

2) أ) بيان أنّ : $\sqrt{1+x^2}-x>0$ من أجل عدد حقيقي x ، نميّز حالتين :

❖) حالة $x\geq 0$ يكون : $\sqrt{1+x^2}-x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}>0$.

❖) حالة $x<0$ يكون : $\sqrt{1+x^2}-x>0$. و منه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $\sqrt{1+x^2}-x>0$.

ب) حساب f' : $f'(x)=1-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=1-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}>0$.

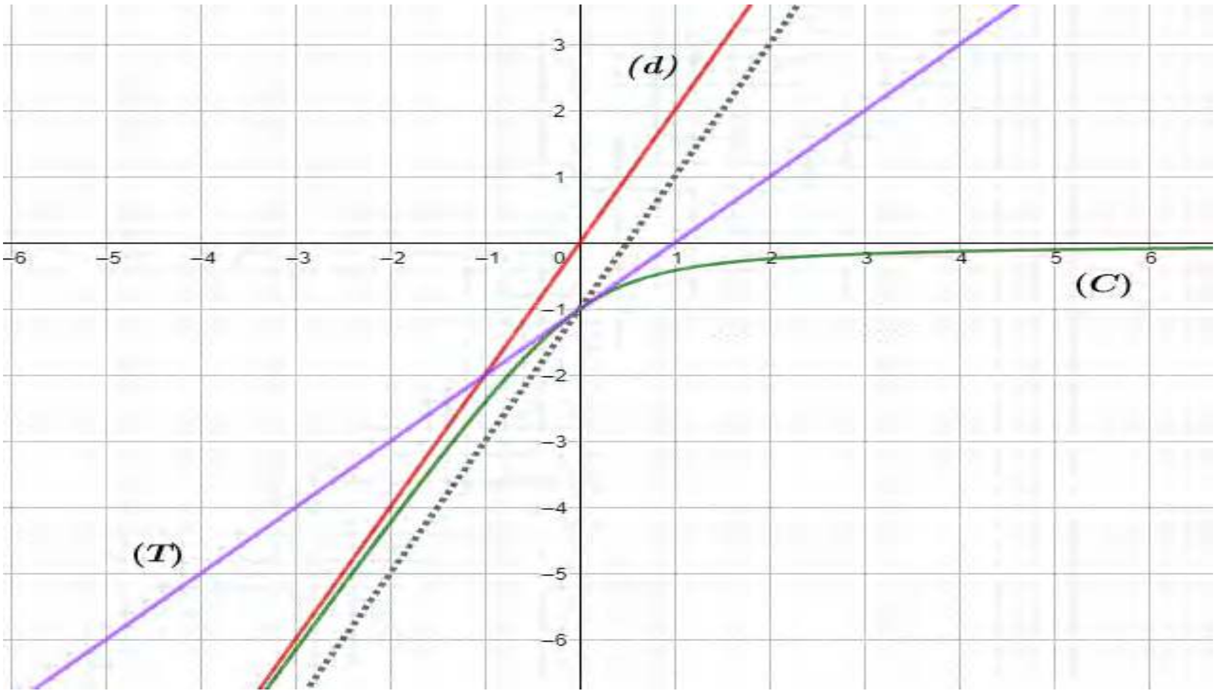
و منه : الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

❖) جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 0

ج) معادلة المماس : $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، و منه : $(T):y=x-1$.

3) أ) الإنشاء :



ب) حل المتراجحة : $f(x) > 2x-1$ (الحلول هي المجالات التي يكون فيها المنحني (C) فوق المستقيم ذو المعادلة $y = 2x-1$) إذن : $S = \left]-\infty;0\right[$.

ج) من أجل كل $x > 0$ يكون : $x(1+f(\frac{1}{x})) = x(1+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) = x+1-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x+1-x\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$

أي : $x(1+f(\frac{1}{x})) = x+1-\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x} = x-\sqrt{x^2+1}+1 = f(x)+1$ ، $(\sqrt{x^2} = x \;.....; x>0)$.

الجزء الثاني :

1) بيان أنّ : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$.

لدينا : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \left[\tan x - \sqrt{1+\tan^2 x}\right] = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f(\tan x)$ ، أي :

$\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \tan x = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty \begin{cases} 1 \\ 0^+ \end{cases} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$ ، و منه : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = 0$ ، أي : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$.

2) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x)$:

أي : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} f(\tan x)$ ، أي : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} \tan x = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty \begin{cases} -1 \\ 0^+ \end{cases} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$.

و منه : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x) = -\infty$ ، إذن : المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي للمنحني (C) .

3) أ) لدينا : $g(x)=\tan x-\sqrt{1+\tan^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{1+(\dfrac{\sin x}{\cos x})^2}=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}$ ، أي :

$g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{1}{\cos x}$ ، و منه : $g(x)=\dfrac{\sin x-1}{\cos x}$.

(**توضيح** : بما أنّ $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ فإنّ : $\cos x>0$ ، أي : $\sqrt{\cos^2 x}=\cos x$).

ب) دراسة تغيرات الدالة g :

❖) حساب $g'(x)$:

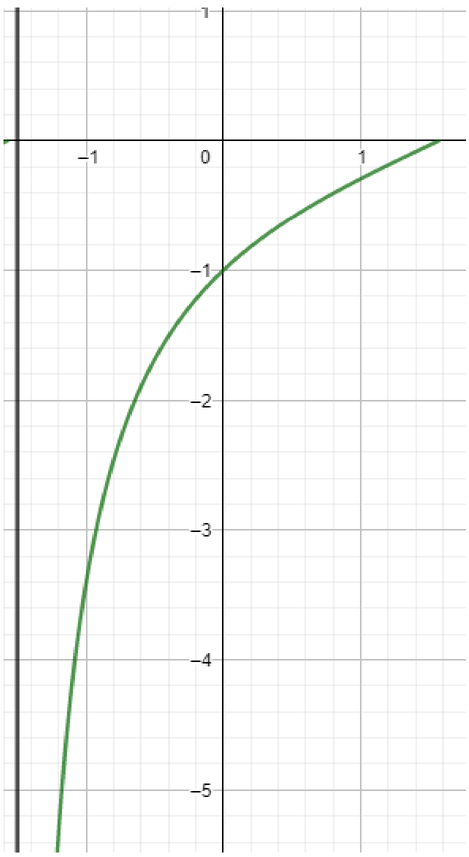
$g'(x)=\dfrac{\cos x\times\cos x-(-\sin x)(\sin x-1)}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x-\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$.

نعلم أنّ : $1-\sin x>0$ من أجل كل $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ ، إذن : الدالة g متزايدة تماما على $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

❖) جدول التغيرات :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow 0$	‖

❖) الإنشاء :



الجزء الثالث :

1) أوّلاً نلاحظ أنّ D_h متناظرة بالنسبة إلى 1 ، ثانياً نحسب : $h\ 2-x$ في الحالتين ، أي :

❖) حالة $2-x\leq 0$:

$$h(2-x)=2-x-\sqrt{1+(2-x)^2}=2-x-\sqrt{1+4+x^2-2x}=2-x-\sqrt{x^2-2x+5}=h(x)$$

❖) حالة $2-x\geq 2$:

$$h(2-x)=2-(2-x)-\sqrt{(2-x)^2-4(2-x)+5}=x-\sqrt{x^2+1}=h(x).$$

إذن : من أجل كل x من $]-\infty;0]\cup[2;+\infty[$ يكون : $h(2-x)=h(x)$

و منه : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C_h) .

2) تشكيل جدول تغيرات الدالة h :

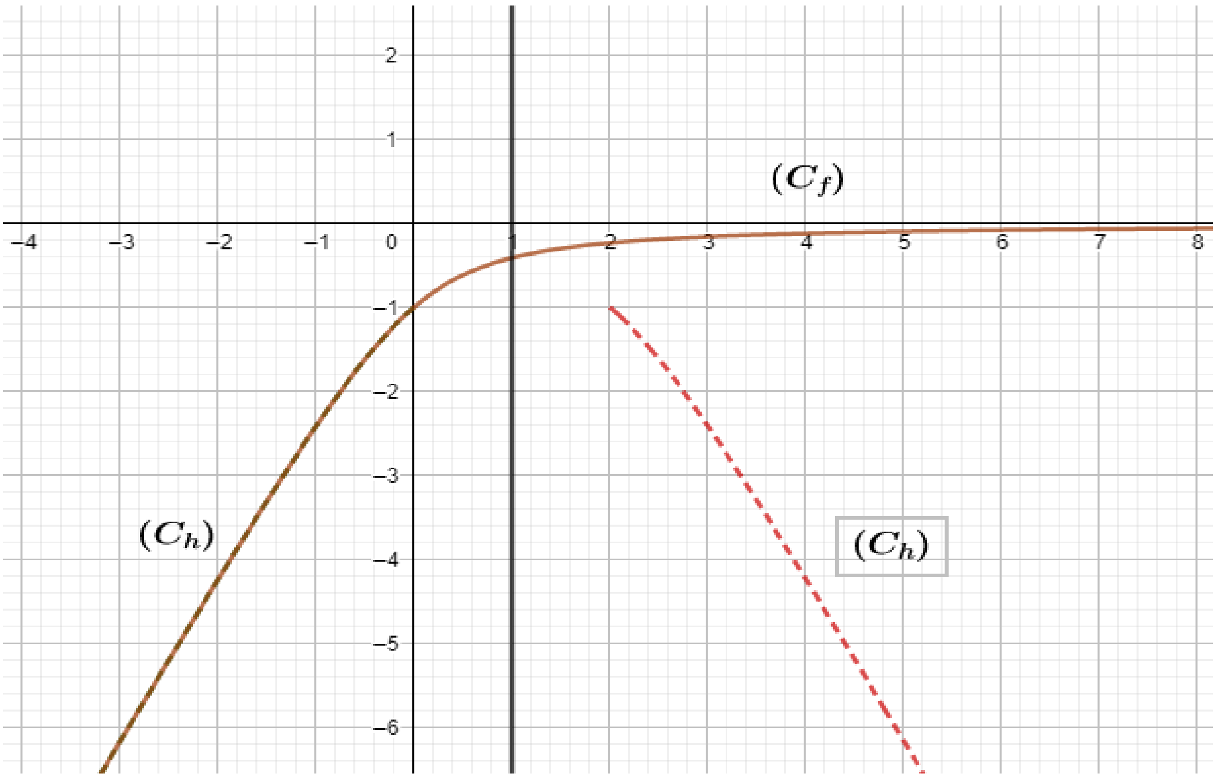
❖) لدينا على المجال $]-\infty;0]$: $h(x)=f(x)$.

❖) على المجال $[2;+\infty[$ نكمل جدول التغيرات بالحفاظ على قيم $f(x)$ و نغير إتجاه الدالة f ، لأنّ المنحنى (C_h) يناظر المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $x=1$.

❖) جدول التغيرات على المجال $[2;+\infty[$

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	-1 ↘	$-\infty$

3) إنشاء (C_h) :



كتابة الأستاذ : ب. ع

دراسة دالة عددية (مثلثية) رقم 06 + 07

المسألة رقم 01 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\sin 3x-3\sin x$ ، و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بيّن أنّ الدالة f دورية و دورها هو 2π .

2) أدرس شفعية الدالة f ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) .

3) أ) قارن بين $f(x)$ وَ $f(\pi-x)$. فسّر النتيجة هندسياً .

ب) إستنتج مما سبق مجالا لدراسة الدالة f .

4) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x تكون : $f'(x)=-6\sin x\times\sin 2x$.

5) أدرس تغيّرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

6) أنشئ المنحني (C_f) على $\left[-2\pi;2\pi\right]$.

المسألة رقم 02 :

f دالة معرّفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بـــ : $f(x)=x.\tan x$.

1) أدرس شفعية الدالة f .

2) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .

3) بيّن أنّه من أجل كل x من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ تكون : $f'(x)=\dfrac{2x+\sin 2x}{2\cos^2 x}$.

4) أ) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي : $g(x)=2x+\sin 2x$.

❖) أدرس تغيّرات الدالة g على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

ب) إستنتج تغيّرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

5) شكّل جدول تغيّرات الدالة f على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

6) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند ذات الفاصلة $\frac{\pi}{4}$.

7) أ) أنشئ (T) و المنحنى (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ب) ماهو عدد حلول المعادلة (E) ، حيث : $(E):\tan x=\dfrac{1}{x}$.

حل المسألة 01

لدينا : $f(x)=\sin 3x-3\sin x$.

1) إثبات أنّ f دورية، و دورها 2π : أي نحسب $f(x+2\pi)$.

$f(x+2\pi)=\sin 3(x+2\pi)-3\sin(x+2\pi)=\sin(3x+6\pi)-3\sin(x+2\pi)$ ، أي :

$f(x+2\pi)=\sin 3x-3\sin x$ ، و منه : $f(x+2\pi)=f(x)$.

إذن : الدالة f دورية و دورها 2π ، لهذا يمكن دراستها على مجال طوله 2π ، و ليكن المجال $[-\pi;\pi]$.

2) أ) شفعية الدالة f :

$f(-x)=\sin(-3x)-3\sin(-x)=-\sin 3x+3\sin x=-(\sin 3x-3\sin x)=-f(x)$.

و منه : الدالة f فردية، إذن : المنحنى (C_f) يقبل المبدأ O كمركز تناظر .

❖ نستنتج أنّه يمكن أن ندرس الدالة f على المجال $[0;\pi]$.

3) أ) مقارنة $f(x)$ وَ $f(\pi-x)$ ، ثم تفسير النتيجة هندسياً :

$f(\pi-x)=\sin 3(\pi-x)-3\sin(\pi-x)=\sin(3\pi-3x)-3\sin(\pi-x)=\sin(2\pi+\pi-3x)-3\sin(\pi-x)$

أي : $f(\pi-x)=\sin(\pi-3x)-3\sin(\pi-x)=\sin 3x-3\sin x$ ، و منه : $f(\pi-x)=f(x)$.

إذن : كتفسير هندسي نقول أنّ المنحنى (C_f) يقبل محور تناظر و هو المستقيم ذو المعادلة $x=\dfrac{\pi}{2}$.

ب) نستنتج مما سبق أنّه يمكننا دراسة الدالة f على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

4) حساب $f'(x)$: $f'(x)=3\times\cos 3x-3\times\cos x=3(\cos 3x-\cos x)$.

نعلم أنّ : $\cos a-\cos b=-2\sin(\dfrac{a+b}{2})\times\sin(\dfrac{a-b}{2})$

أي : $f'(x)=3(\cos 3x-\cos x)=3(-2)\sin(\dfrac{3x+x}{2})\times\sin(\dfrac{3x-x}{2})$ ،

و منه : $f'(x)=-6\sin 2x\times\sin x$ ، و هو المطلوب .

5) دراسة تغيرات الدالة f :

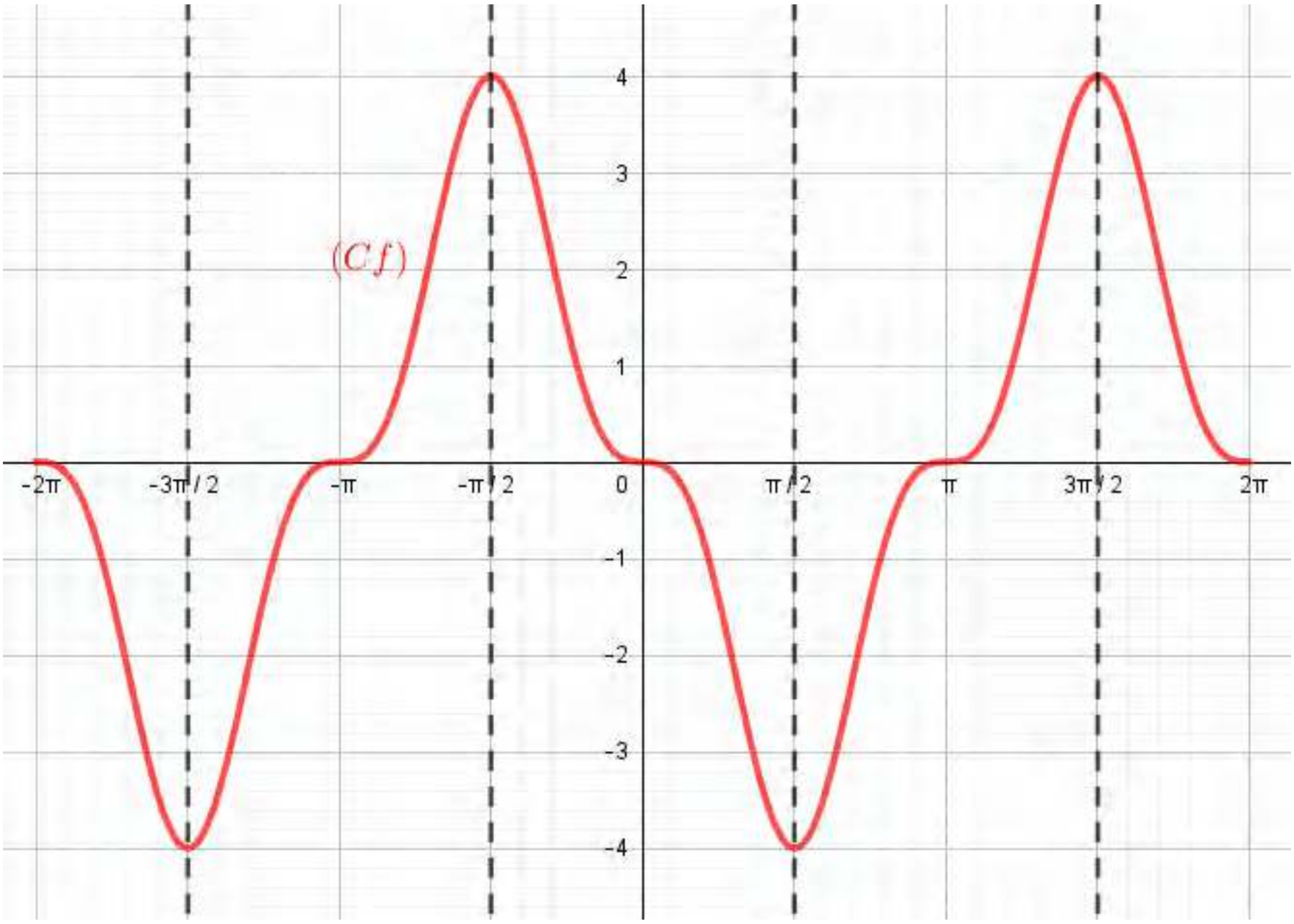
لدينا على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ ، أي : $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ ، يكون : $0\le 2x\le\pi$ ، و منه : $\sin x\ge 0$ وَ $\sin 2x\ge 0$.

إذن : من أجل كل $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$: $f'(x)\le 0$ ، و بالتالي الدالة f متناقصة على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

❖) جدول التغيرات :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	0 $\searrow$ -4

6) الإنشاء :



حل المسألة 02

لدينا : $f(x)=x.\tan x$.

1) دراسة شفعية الدالة f :

أولاً : نلاحظ أنّ 0 هو مركز لـ D_f .

ثانياً : $f(-x)=-x.\tan(-x)=-x\times-\tan x=x\times\tan x=f(x)$.

و منه الدالة f زوجية.

2) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{\pi}{2}} x\times\tan x=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}-1\\0^+\end{cases}$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{\pi}{2}}\tan x=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}} x\times\tan x=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}1\\0^+\end{cases}$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}}\tan x=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\cos x}=+\infty$.

3) حساب f' :

$f'(x)=1\times\tan x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\times x=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos^2 x}$ ، أي : $f'(x)=\dfrac{\sin x\times\cos x+x}{\cos^2 x}$ ،

(نضرب في 2 و نقسم على 2) نجد : $f'(x)=\dfrac{2\sin x\times\cos x+2x}{2\cos^2 x}$ ، (نعلم أنّ : $\sin 2x=2\sin x\times\cos x$) ،

إذن : $f'(x)=\dfrac{\sin 2x+2x}{2\cos^2 x}$ ، و هو مطلوب.

4) أ) دراسة تغيّرات الدالة g حيث : $g(x)=2x+\sin 2x$.

❖) الدالة المشتقة : $g'(x)=2+2.\cos 2x$.

نعلم أنّ : $-1\le\cos 2x\le 1$ ، أي : $-2\le 2.\cos 2x\le 2$ ، و منه : $0\le 2+2.\cos 2x\le 4$.

إذن نستنتج أنّ : $g'(x)\ge 0$ ، و بالتالي : الدالة g متزايدة على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

❖) جدول التغيرات :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $\dfrac{\pi}{2}$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$0\ \nearrow\ \pi$

❖) نلاحظ من جدول التغيرات أنّه من أجل كل $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ تكون : $g(x)\ge 0$.

ب) لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2\cos^2 x}$ ، بما أنّ : $g(x)\ge 0$ على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ ، إذن : $f'(x)\ge 0$ على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

و بالتالي : الدالة f متزايدة على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

5) بما أنّ الدالة f زوجية ، فستكون متناقصة على $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$ ، أي : جدول تغيرات الدالة f على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ يكون :

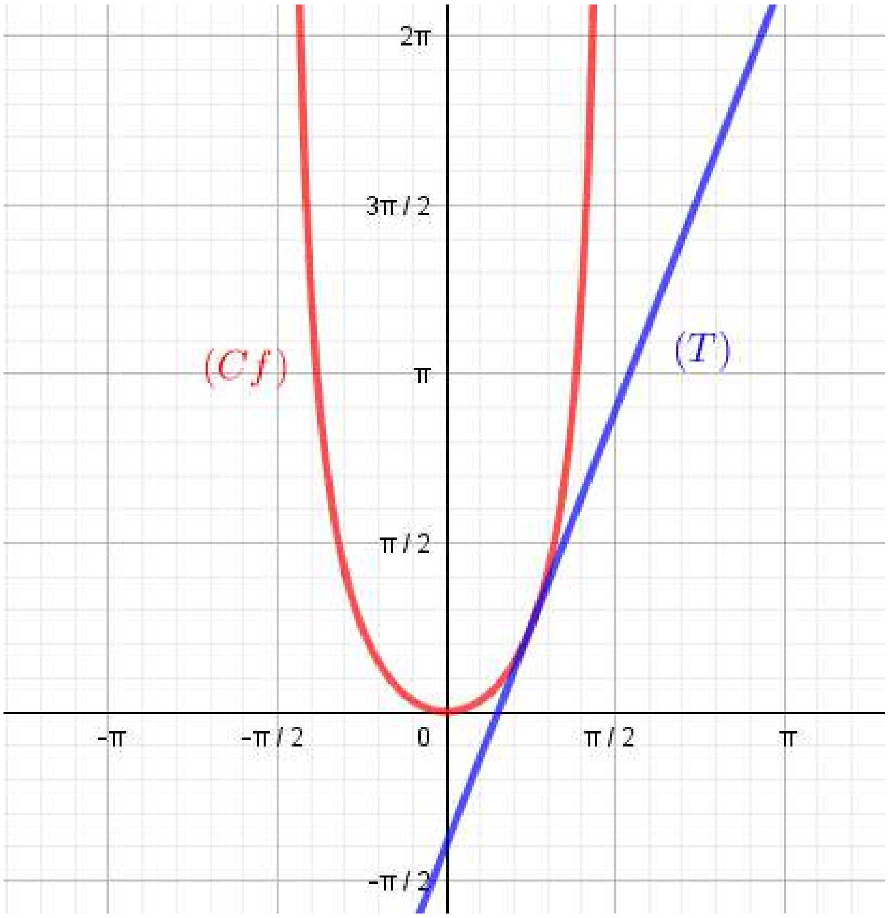
x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6) كتابة معادلة (T) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\pi}{4}$:

❖) $(T): y = f'(\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{4})$ ، لدينا : $\begin{cases} f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} \\ f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}+1 \end{cases}$ ، أي : $(T): y = (\frac{\pi}{2}+1)(x-\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4}$ ،

أي : $(T): y = (\frac{\pi}{2}+1)x - \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$ ، و منه : $(T): y = (\frac{\pi}{2}+1)x - \frac{\pi^2}{8}$.

7) أ) الإنشاء :



ب) عدد الحلول المعادلة : $(E) : \tan x = \dfrac{1}{x}$

أي : $(E) : x.\tan x = 1$ ، معناه : $(E) : f(x) = 1$. و منه المعادلة تقبل حلين متمايزين .

كتابة الأستاذ : ب . ع