

الرياضيات
السهلة

حلوه تمارين الدوال الأسية في البكالوريا

شعبة : علوم تجريبية

إنجاز : خالد بخاشة

[باك 2008] [1م]

01

التمرين رقم

- (I) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$.
 • تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول 1 cm .
 • عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.
 (II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$.
 • تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ وفسر النتيجة بيانياً . (نذكر أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} ue^u = 0$)

(2) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

(3) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثيها .

(4) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

(5) أرسم (C_g) .

- (III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي : $k(x) = g(x^2)$.
 باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

[باك 2010] [2م]

02

التمرين رقم

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي : $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$.

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ وفسر هندسياً النتيجة .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أـ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = x + 1$.

بـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

(4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

(5) أـ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1.4 < \beta < -1.3$.

بـ هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

جـ أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

دـ ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x} = m$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = e^x - ex - 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ج- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ ، تقبل في المجال $[1.75; 1.76]$ حلا وحيدا α .

د- أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 2]$.

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} ب: $g(x) = 1 - xe^x$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1; +\infty[$.

ب- تحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = -g(x)$ ،

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

(4) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(5) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6 < x_1 < -1.5$ و $1.5 < x_2 < 1.6$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f) .

(6) لتكن h الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = (ax + b)e^x$.

عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون: $h'(x) = xe^x$.

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

(I) f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) .

(2) أحسب $f'(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α .

(4) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

(5) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

(II) g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

(1) أدرس تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ- تحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم بين أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.

ب- استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج- تحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

(I) g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R} ، ثم تحقق أن: $0.36 < \alpha < 0.37$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$.

ب- استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -\alpha[$ ومتزايدة تماما على $]-\alpha; +\infty[$.

(2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

(4) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$.

(5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ، (نأخذ $0, 1 \approx f(-\alpha)$).

(6) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$.

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أـ بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين في \mathbb{R} ، أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1.52 < \alpha < -1.51$.
بـ استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

بـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = -g(x)$.

جـ شكل جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R} . (نأخذ $f(\alpha) \approx 0.38$)

دـ عين دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

(2) أـ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ يقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

جـ بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيهما.

دـ أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.

هـ ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m - x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$ على المجال $[-2; +\infty[$.

(I) g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.

(1) أـ أحسب $g'(x)$ من أجل كل x من \mathbb{R} ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g' . (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

بـ بين أنه، من أجل كل x من \mathbb{R} ، $g'(x) > 0$.

جـ أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $-1,37 < \alpha < -1,38$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

(II) f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

بـ بين أنه، من أجل كل x من \mathbb{R} ، $f'(x) = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$.

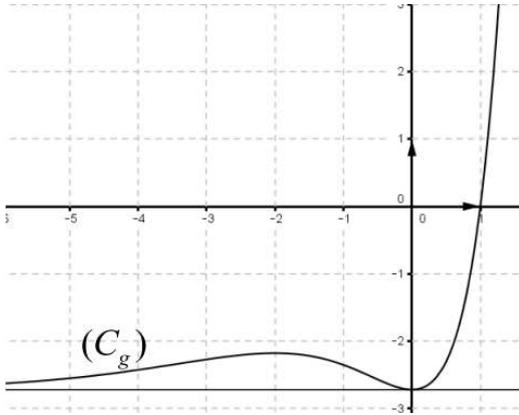
جـ أدرس اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أـ بين أن: $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

جـ أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha) \approx 0,29$)

- (I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$.
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ وأعط تفسيرا هندسيا للنتيجة، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (2) أـ بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} ، $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$.
بـ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
- (II) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $h(x) = 1 - xe^{1-x}$.
- (1) بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} ، $h(x) \geq 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T) .
- (2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.
- (3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.
- (4) الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$.
تحقق أن: $F'(x) = f(x)$.

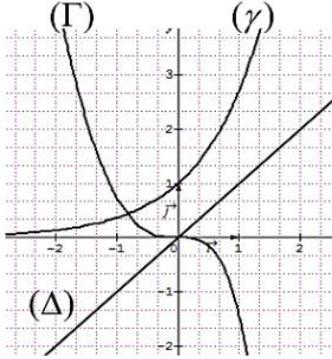


- (I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = x^2 e^x - e$.
- (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الشكل)
- أحسب $g(1)$.
- بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$.
- حسب قيم العدد الحقيقي x .
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ: $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أحسب النهايات الآتية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (2) بين أن المنحنى (γ) الذي معادلته $y = e^{-x} - 2$ و المنحنى (C_f) متقاربان بجوار، ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) .
- (3) بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R}^* ، $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$.
- (4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1; 0[$ و $]0; +\infty[$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- (5) بين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة e^x ، ثم أرسم بعناية كلا من (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

- (I) g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$.
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
 - (2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
 - (3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.37 < \alpha < -0.38$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.
- (1) (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - (2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - (3) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .
 - (4) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) حيث : $y = 2x + 1$: (Δ) .
 - (5) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
 - (6) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .
 - (7) أنشئ (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,8$) .
 - (8) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x = (1-m)e^x$.

- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$.
- (1) (C_g) و (C_f) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على \mathbb{R} كما يلي :

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$
 - (2) أدرس اتجاه تغير الدالة g .
 - (3) أحسب إشارة $g(x)$ حسب قيم x .
 - (4) أدرس اتجاه تغير الدالة f .
 - (5) أحسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 - (6) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على \mathbb{R} .
 - (7) أرسم على المجال $[0; 2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (يعطى $e^2 - 2e \approx 2$)
 - (8) الدالة المعرفة على المجال $[-2; 2]$ كما يلي : $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق .
 - (9) أ- بين أن الدالة h زوجية .
 - (10) ب- من أجل $x \in [0; 2]$ أحسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .



(I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

في الشكل المرفق، المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 2x^2 + 2x - 2xe^x$

(Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ و (γ) المنحنى الممثل للدالة $e^x \mapsto x$.
بقراءة بيانية:

(1) يبرز أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x - x > 0$.

(2) حدد تبعاً لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ علماً أن: $g(0) = 0$.

(II) الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{e^x - x}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ و أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسّر نتيجتي النهايتين هندسياً.

(2) أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$.

بـ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أـ أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0 .

بـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f(x) - (2x + 1) = \frac{g(x)}{e^x - x}$.

جـ استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) ، ماذا تمثل النقطة A بالنسبة إلى (C_f) ؟

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-\infty; 1]$ ، ثم تحقق أن: $-0.6 < \alpha < -0.5$.

(5) أنشئ المماس (T) والمستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f) .

“The only way to learn mathematics is to do mathematics”

- (I) الدالة العددية المعرفة على $[-2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$
- تعيين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.
- $A \in (C_f)$ معناه: $f(-1) = 1$ أي: $(-a+b)e + 1 = 1$ ومنه: $a = b$.
- معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$ معناه: $f'(-1) = -e$.
- الدالة f قابلة للاشتقاق على $[-2; +\infty[$ و: $f'(x) = ae^{-x} + (-e^{-x})(ax+b) = (-ax-b+a)e^{-x}$
- ومنه $f'(-1) = (2a-b)e$ و $f'(-1) = -e$ مما سبق.
- بالمطابقة لدينا $2a-b = -1$ و $a = b$ ومنه نجد: $a = b = -1$.
- (II) الدالة g معرفة على المجال $[-2; +\infty[$ بـ: $g(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \quad (1) \text{ تبيان أن}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = \lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(-x-1)e^{-x} + 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x} - e^{-x} + 1) = 1$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

(2) دراسة تغيرات الدالة g :

$$g'(x) = -e^{-x} + (-e^{-x})(-x-1) = xe^{-x} \text{ و } [-2; +\infty[\text{ المجال على الاشتقاق}$$

- اتجاه تغير الدالة g :

- إشارة $g'(x)$ من إشارة x وبالتالي الدالة g متناقصة على المجال $[-2; 0]$ و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.
- جدول تغيرات الدالة g :

x	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$e^2 + 1$	0	1

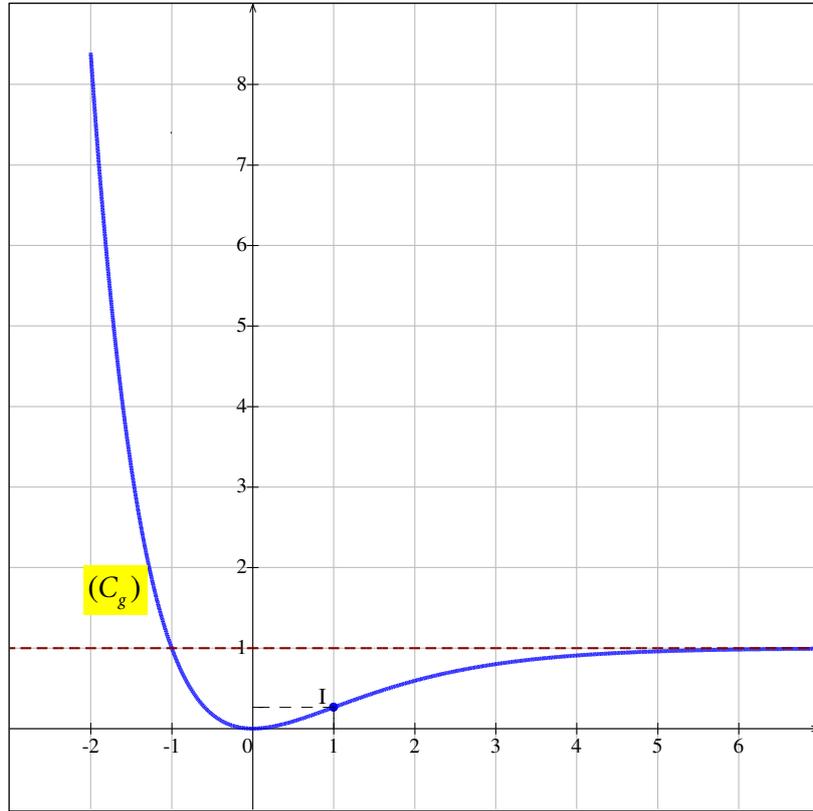
(3) تبيان أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I مع تعيين إحداثياتها.

$$g''(x) = (1-x)e^{-x} \text{ و } [-2; +\infty[\text{ المجال على الاشتقاق}$$

- إشارة $g''(x)$ من إشارة $1-x$ وبالتالي $g''(x)$ ينعدم عند 1 مغيرا إشارته، ومنه $I\left(1; 1 - \frac{2}{e}\right)$ هي نقطة إنعطاف لـ (C_g) .

(4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

$$\text{لدينا: } (T): y = g'(1)(x-1) + g(1) \text{ و منه } (T): y = \frac{1}{e}x + 1 - \frac{3}{e}$$



(III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي : $k(x) = g(x^2)$

الدالة k قابلة للاشتقاق على المجال $[-2; +\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق ،

$$. k'(x) = 2xg'(x^2) = 2x(x^2 e^{-x^2}) = 2x^3 e^{-x^2} \text{ و}$$

إتجاه تغير الدالة k :

إشارة $k'(x)$ من إشارة x وبالتالي الدالة k متناقصة على المجال $[-2; 0]$ و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة k :

x	-2	0	$+\infty$
$k'(x)$	-	0	+
$k(x)$	$1-5e^{-4}$	0	1

02

حل مقترح للتمرين

f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي : $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

$$. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = -\infty \text{ أ. (1)}$$

$$. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = -\infty \text{ ب.}$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الترتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

دراسة إتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$f'(x) = 1 - \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

ومنه : من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

(3) - لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{e^x - 1} \right] = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{e^x - 1} - 1 \right] = 0$ ومنه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x) - y = -\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - e^x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $1 - e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

• دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ') :

لدينا : $f(x) - y = -\frac{1}{e^x - 1} - 1 = \frac{e^x}{1 - e^x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $1 - e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ')		(C_f) تحت (Δ')

(4) إثبات أن النقطة $\omega \left(0; \frac{1}{2} \right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $-x \in \mathbb{R}^*$ و $1 = 2 \times \frac{1}{2}$ ، $f(-x) + f(x) = -\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^{-x} - 1} = -\frac{1}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x - 1} = 1 = 2 \times \frac{1}{2}$

ومنه النقطة $\omega \left(0; \frac{1}{2} \right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

(5) - تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1.4 < \beta < -1.3$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و $] -\infty; 0[$ و $]\ln 2; 1[\subset]0; +\infty[$ أي $f(1) \times f(\ln 2) < 0$ أي $\begin{cases} f(1) \approx 0,41 \\ f(\ln 2) \approx -0,31 \end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; +\infty[$ حلا وحيدا α ، حيث $\ln 2 < \alpha < 1$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $] -\infty; 0[$ و $] -\infty; 0[\subset] -1,4; -1,3[$ و $f(-1.4) \approx -0,07$ و $f(-1.3) \approx 0,07$

أي $0 < f(-1,3) \times f(-1,4) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; 0[$ حلا وحيدا β ، حيث $-1.4 < \beta < -1.3$.

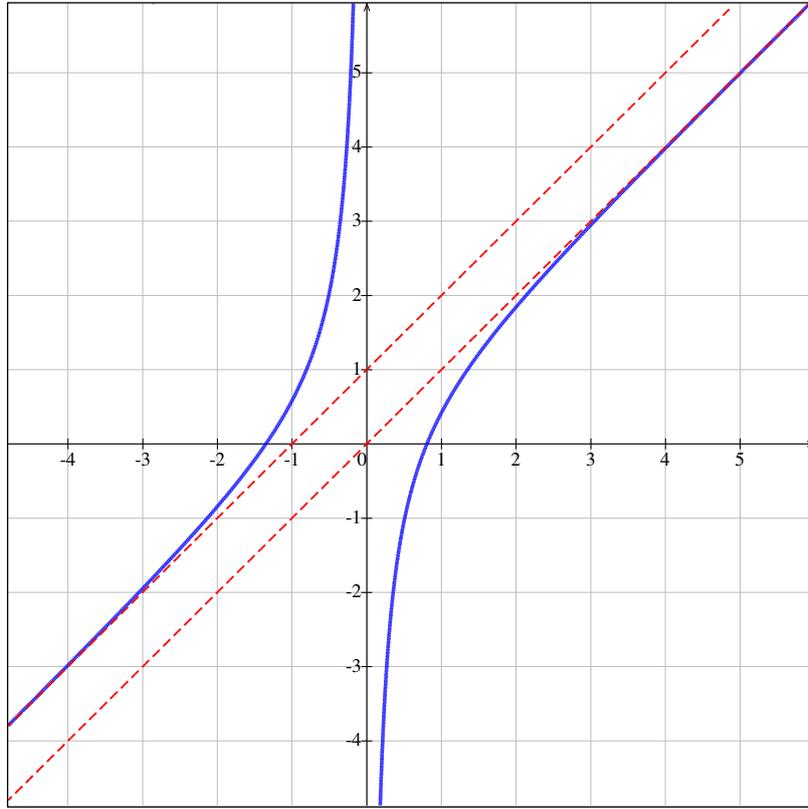
ب- دراسة وجود مماسات للمنحنى (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

لنحل في \mathbb{R}^* المعادلة: $f'(x) = 1$.

لدينا: $f'(x) = 1$ تكافئ $1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 1$ تكافئ $\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$ أي $e^x = 0$ وهذا مستحيل و بالتالي المعادلة ليس لها

حلول أي أنه لا توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

ج- الرسم:



د- المناقشة البيانية:

لدينا: $m = (m-1)e^{-x} = m - 1$ تكافئ $me^x = m - 1$ تكافئ $m = -\frac{1}{e^x - 1}$ تكافئ $m + x = x - \frac{1}{e^x - 1}$

تكافئ $f(x) = x + m$ ، ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x + m$.

إذا كان $m \in]-\infty; 0[$ فإن للمعادلة حل واحد موجب.

إذا كان $m \in [0; 1[$ فإن المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإن للمعادلة حل واحد سالب.

03

حل مقترح للتمرين

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = e^x - ex - 1$.
1) أ- حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - ex - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{e^x}{x} - e - \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - ex - 1) = +\infty$$

ب- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^x - e$

$f'(x) = 0$ تكافئ $e^x - e = 0$ تكافئ $e^x = e$ تكافئ $x = 1$.

- من أجل $x \in]-\infty; 1]$ يكون $e^x \leq e$ أي $f'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$.
- من أجل $x \in [1; +\infty[$ يكون $e^x \geq e$ أي $f'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.
- ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

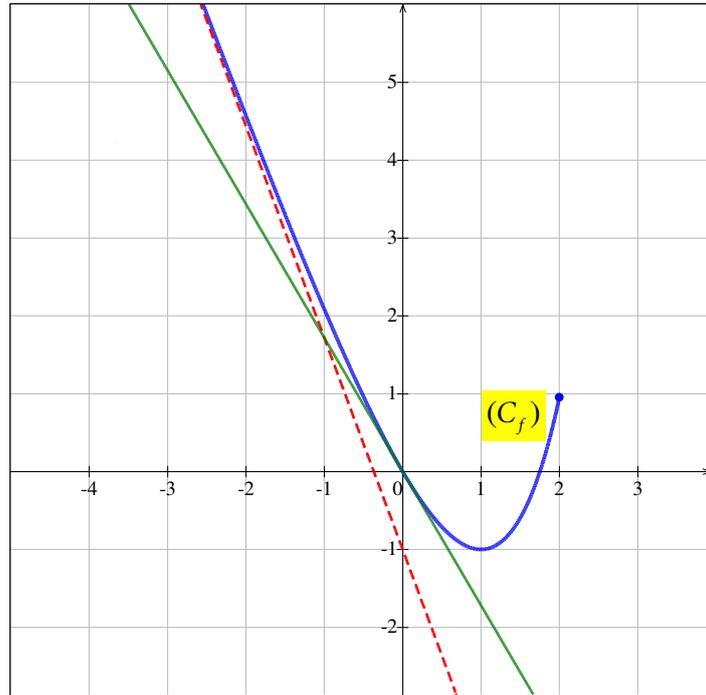
2) أ- لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - ex - 1 + ex + 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

- ومن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.
- ب- كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :
- لدينا: $(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ ومنه $(T): y = (1 - e)x$.
- ج- تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[1, 75; 1, 76[$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$ و $[1, 75; 1, 76[\subset [1; +\infty[$ و $f(1, 75) \approx -0, 002$ و $f(1, 76) \approx 0, 02$

أي $f(1, 75) \times f(1, 76) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1, 75 < \alpha < 1, 76$.

د- الرسم :



04

حل مقترح للتمرين

(I) g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} ب: $g(x) = 1 - xe^x$.

1) حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xe^x) = -\infty$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = -1 \times e^x + (-x)e^x = -(x+1)e^x$ بما أن $e^x > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $-(x+1)$ ، ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

وبالتالي الدالة g متناقصة على المجال $[-1; +\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty; -1]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1	$1 + e^{-1}$	$-\infty$

(3) - تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1; +\infty[$:

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$.

ب - التحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$:

لدينا : $]-1; +\infty[\subset]0,5; 0,6[$ و $\begin{cases} g(0.5) \approx 0,18 \\ g(0.6) \approx -0,09 \end{cases}$ ومنه $0.5 < \alpha < 0.6$.

إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي : $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^x - x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x - e^x - x - 1] = +\infty$$

(2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن : $f'(x) = -g(x)$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty; 2]$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 2]$:

$$f'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x - 1 = e^x + xe^x - e^x - 1 = xe^x - 1 = -(1 - xe^x) = -g(x)$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$:

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$e^2 - 3$

(3) تبيان أن : $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$

لدينا : $f(\alpha) = (\alpha-1)e^\alpha - \alpha - 1$ ، ولدينا من جهة $g(\alpha) = 0$ يكافئ $1 - \alpha e^\alpha = 0$ يكافئ $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

$$. f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right) \text{ أي } f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)}{\alpha} - \alpha - 1 = \frac{(\alpha-1) - \alpha^2 - \alpha}{\alpha} = \frac{-\alpha^2 - 1}{\alpha}$$

إيجاد حصر للعدد $f(\alpha)$:

$$\frac{1,25}{0,6} < \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} < \frac{1,36}{0,5} \text{ يكافئ } \begin{cases} \frac{1}{0,6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0,5} \\ 1,25 < \alpha^2 + 1 < 1,36 \end{cases} \text{ يكافئ } 0,5 < \alpha < 0,6$$

$$\text{يكافئ } -\frac{1,36}{0,5} < -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right) < -\frac{1,25}{0,6} \text{ أي: } -2,72 < f(\alpha) < -2,08$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x-1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x) = 0 \text{ أـ لدينا: (4)}$$

ومن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.
بـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :
لدينا: $f(x) - y = (x-1)e^x$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $x-1$ على المجال $]-\infty; 2]$.

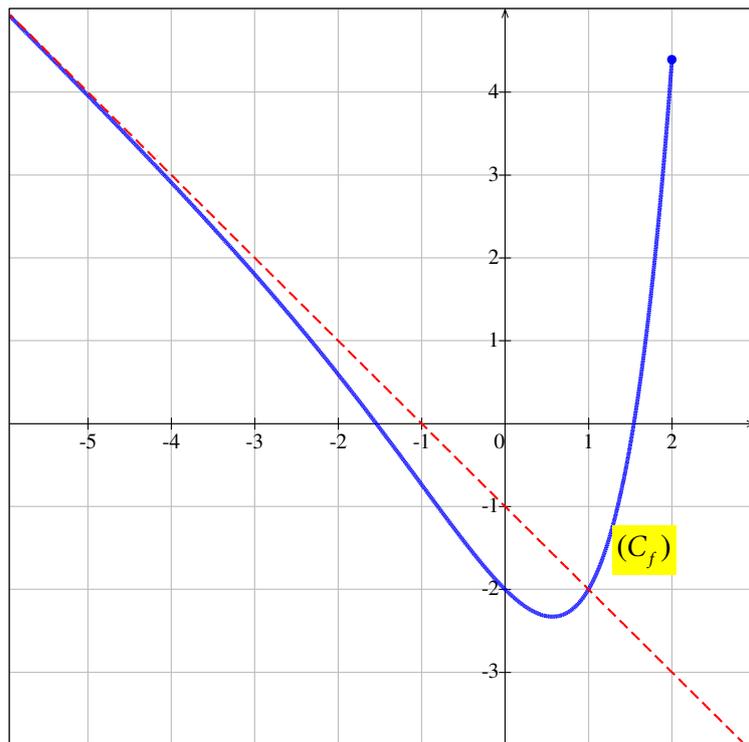
x	$-\infty$	1	2
$f(x) - y$		-	+
الوضع النسبي		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; -2)$	(C_f) فوق (Δ)
		(C_f) تحت (Δ)	

(5) أـ تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6 < x_1 < -1.5$ و $1.5 < x_2 < 1.6$.

• الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$ و $]-\infty; \alpha]$ و $]-1,6; -1,5[$ و $f(-1.5) \approx -0,05$
 $f(-1.6) \approx 0,07$ أي $f(-1.6) \times f(-1.5) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_1 حيث $-1.6 < x_1 < -1.5$ و يحقق $f(x_1) = 0$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[\alpha; 2]$ و $[\alpha; 2]$ و $1,5; 1,6[$ و $f(1.5) \approx -0,26$
 $f(1.6) \approx 0,37$ أي $f(1.6) \times f(1.5) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_2 حيث $1.5 < x_2 < 1.6$ و يحقق $f(x_2) = 0$.

بـ الرسم:



(6) لتكن h الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = (ax+b)e^x$
أـ تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون $h'(x) = xe^x$

الدالة h قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x) = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x$ ،
بالمطابقة نجد : $a = 1$ و $b = -1$. أي $h(x) = (x-1)e^x$.

05

حل مقترح للتمرين

(I) الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ بـ : $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{1}{x-1}} \right) = 1 \end{cases} \quad \text{لأن ،} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right] = 2$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C) .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{x-1} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(e^{\frac{1}{x-1}} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{لأن ،} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right] = -\infty$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C) .

(2) حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty; 1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 1[$:

$$f'(x) = \frac{1 \times (x-1) - 1 \times x}{(x-1)^2} + \left(\frac{-1}{(x-1)^2} \right) e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{-1}{(x-1)^2} \times \left(1 + e^{\frac{1}{x-1}} \right)$$

بما أن $f'(x) < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; 1[$ ، فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$.
جدول تغيرات الدالة f :

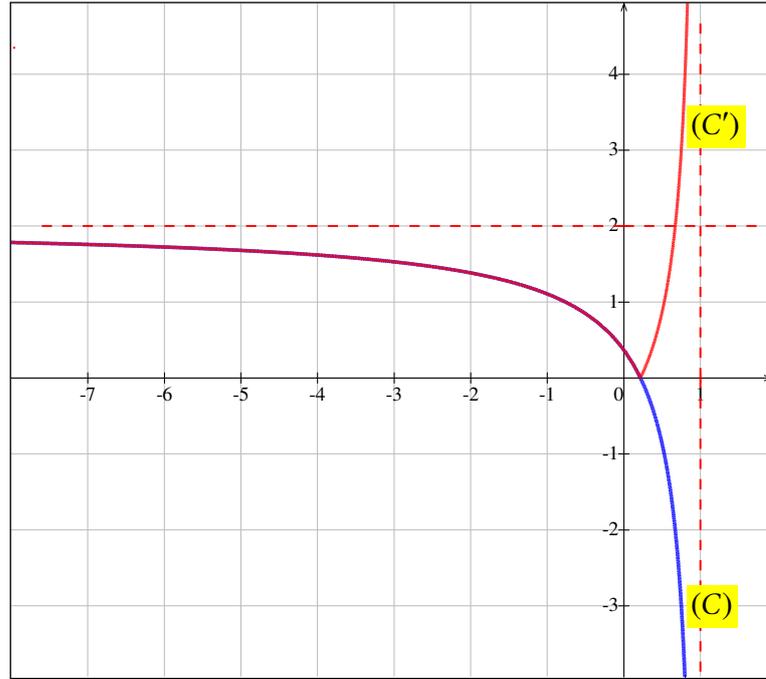
x	$-\infty$	1
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$-\infty$	2

(3) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α .

حسب جدول القيم : $0.21 < \alpha < 0.22$.



(5) تعيين مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

حلول المعادلة $|f(x)| = m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C') مع المستقيم ذي المعادلة $y = m$.

من أجل $m \in \left] \frac{1}{e}; 2 \right[$ المعادلة $|f(x)| = m$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

(II) g الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ : $g(x) = f(2x-1)$.

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(2x-1) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x-1) = 2$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty; 1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 1[$: $g'(x) = 2f'(2x-1)$.

بما أنه من أجل كل $x \in]-\infty; 1[$ ، $(2x-1) \in]-\infty; 1[$ فإن $f'(2x-1) < 0$ ، وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على

المجال $]-\infty; 1[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	1
$g'(x)$	-	
$g(x)$	2	$-\infty$

(2) أ- التحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$:

$$\text{لدينا : } g(x) = f(2x-1) \text{ ومنه } g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = f(\alpha) = 0$$

$$\text{تبيان أن : } g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$$

$$\text{لدينا : } g'(x) = 2f'(2x-1) \text{ ومنه } g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = 2f'(\alpha)$$

ب- إستنتاج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

لدينا: $(T): y = g' \left(\frac{\alpha+1}{2} \right) \left(x - \left(\frac{\alpha+1}{2} \right) \right) + g \left(\frac{\alpha+1}{2} \right)$ ومنه $(T): y = 2f'(\alpha) \left(x - \frac{\alpha+1}{2} \right)$.
 جـ- التحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3} x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

لدينا: $f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} \times \left(1 + e^{\frac{1}{\alpha-1}} \right)$ ، لكن $f(\alpha) = 0$ وهذا يعني $e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1}$ ومنه $f'(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)^3}$.
 إذن: $(T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3} \left(x - \frac{\alpha+1}{2} \right)$ أي $(T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3} x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$.

06 حل مقترح للتمرين

(I) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$
 دراسة إتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} :

الدالة g قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = -2 - 2e^{2x-2} = -2(1 + 2e^{2x-2})$
 لدينا: من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على \mathbb{R} .
 (2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R} :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-2) \left(\frac{1-2x}{2x-2} - \frac{e^{2x-2}}{2x-2} \right) = -\infty \end{cases}$$

والدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على \mathbb{R} ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R} .
 التحقق أن: $0,36 < \alpha < 0,37$.

لدينا: أي $g(0,36) \times g(0,37) < 0$ ومنه $0,36 < \alpha < 0,37$ $\begin{cases} g(0,36) \approx 0,002 \\ g(0,37) \approx -0,02 \end{cases}$

(3) إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(II) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$

(1) أـ تبيان أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$

الدالة f قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 = e^{2x+2}(1 + 2x - e^{-2x-2}) = e^{2x+2}(1 - 2(-x) - e^{2(-x)-2}) = e^{2x+2}g(-x)$$

بـ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

نستنتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; -\alpha]$ و متزايدة على $]-\alpha; +\infty[$.

(2) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} e^2 \times 2xe^{2x} \right) = 0 \text{ ، لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2} - x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{2x+2} - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{2x+2} - 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\alpha)$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} e^2 \times 2xe^{2x} \right) = 0 \quad (3)$$

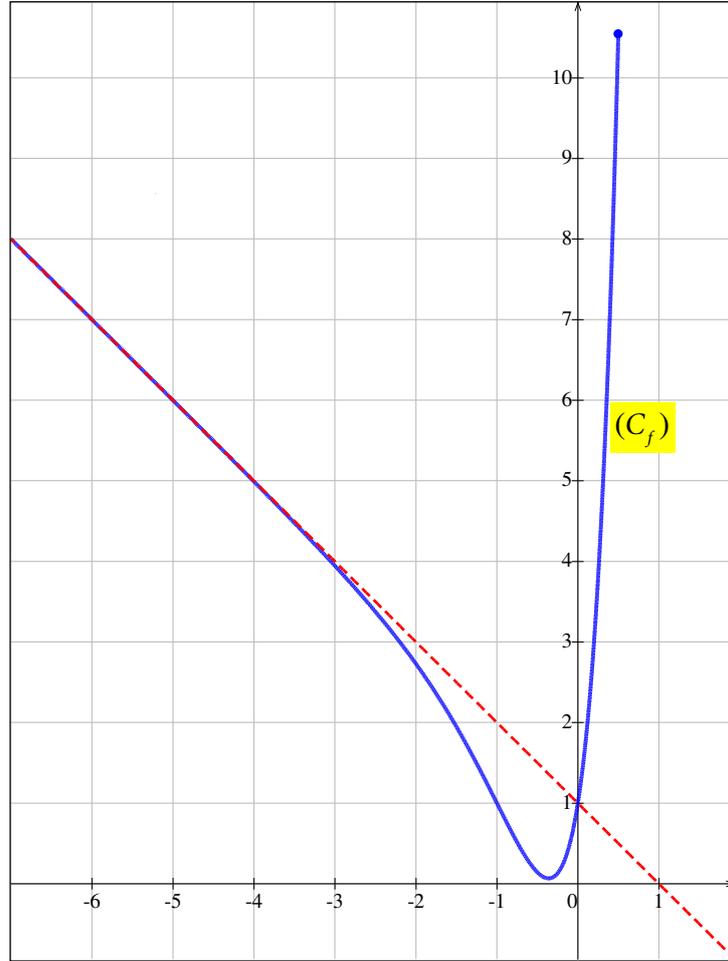
التفسير الهندسي: المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

(4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا: $f(x) - (-x + 1) = xe^{2x+2}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$		0	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) فوق (Δ)

(5) الرسم:



(6) التحقق: من أجل كل عدد حقيقي x

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 2xe^{2x+2} - 2x + 2 + e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 - (4x + 4)e^{2x+2} = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$$

(I) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.
حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = +\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) = (2x+1)e^{-x} - (x^2 + x - 1)e^{-x} = (-x^2 + x + 2)e^{-x} = (2-x)(x+1)e^{-x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2-x)(x+1)$:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

الدالة g متزايدة على المجال $[-1; 2]$ ومتناقصة على كل من المجالين $]-\infty; -1[$ و $]2; +\infty[$.
جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	$1-e$	$1+5e^{-2}$	1	

(3) أ- تبيان أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين في \mathbb{R} ، أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1.52 < \alpha < -1.51$.
لدينا: $g(0) = 1 + (0^2 + 0 - 1)e^0 = 1 - 1 = 0$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; -1[$ و $]-1; 2[$ و $]2; +\infty[$ و $g(-1.52) \approx 0.041$
 $g(-1.51) \approx -0.04$

أي $g(-1.52) \times g(-1.51) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; -1[$ حلا
وحيدا α حيث: $-1.52 < \alpha < -1.51$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.
1) أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}] = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}] = +\infty$$

ب- الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = -1 + (2x+3)e^{-x} - (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = -1 - (x^2 + x - 1)e^{-x} = -g(x)$$

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	2	$-\infty$	

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = -g(\alpha) = 0 \quad \text{د.}$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α معامل توجيهه معدوم. (يوأزي لحامل محور الفواصل).

(2) أ- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x) - (-x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = (x+1)(x+2)e^{-x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(x+1)(x+2)$.

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$		
$f(x) - y$		+	0	-	0	+
الوضع النسبي	فوق (C_f) (Δ)		تحت (C_f) (Δ)		فوق (C_f) (Δ)	
	يقطع (C_f) (Δ)		يقطع (C_f) (Δ)			
	في النقطة $B(-2; 2)$		في النقطة $A(-1; 1)$			

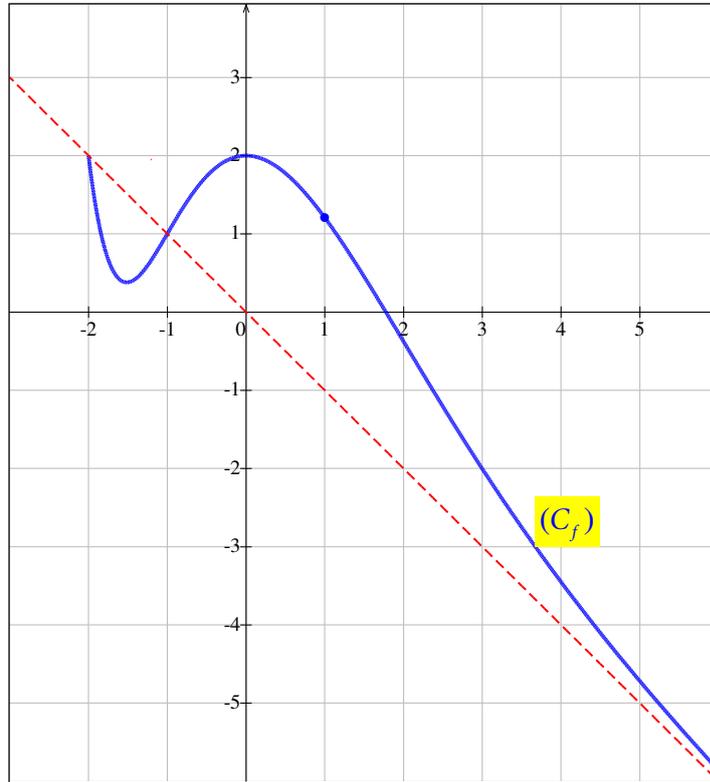
ج- تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف :

لدينا : الدالة f' قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = -g'(x) = (x-2)(x+1)e^{-x}$ ، إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

ومنه المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف هما : $A(-1; 1)$ و $C(2; -2 + 12e^{-2})$.

د- الرسم :



ه- المناقشة البيانية :

المعادلة $0 = (m-x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = f(x) - m$ تكافئ $f(x) = m$.

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = -m$.

لما $-\infty < f(\alpha) < m < +\infty$ [يكون $m \in]-\infty; f(\alpha)[$ و المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

لما $m = -f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب والآخر سالب .

لما $-\infty < f(\alpha) < m < +\infty$ [يكون $m \in]f(\alpha); +\infty[$ و المعادلة تقبل ثلاثة حلول ، إثنان سالبان والآخر موجب .

لما $m = -2$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر معدوم .

(I) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.

(1) أ. الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = 2e^x - 2x - 1$ ،

دراسة اتجاه تغير الدالة g' :

الدالة g' قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g''(x) = 2e^x - 2 = 2(e^x - 1)$ ،

إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+

الدالة g' متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

بـ. تبيان أنه، من أجل كل x من \mathbb{R} ، $g'(x) > 0$ ،

الدالة g' تقبل قيمة حدية صغرى على \mathbb{R} هي $g'(0) = 1$ و منه من أجل كل x من \mathbb{R} ، $g'(0) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2e^x}{x^2} - 1 - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - x^2 - x) = -\infty$$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38 < \alpha < -1,37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على \mathbb{R} و أي $\begin{cases} g(-1,38) \approx -0,02 \\ g(-1,37) \approx 0,001 \end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38 < \alpha < -1,37$.

(3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$.

(1) أ. حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن،} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = 0$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1 - x e^{-x}} \right) = +\infty$$

بـ. الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{(2xe^x + x^2 e^x)(e^x - x) - (e^x - 1)x^2 e^x}{(e^x - x)^2} = \frac{xe^x [(2+x)(e^x - x) - x(e^x - 1)]}{(e^x - x)^2} = \frac{xe^x g(x)}{(e^x - x)^2}$$

جـ. دراسة اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha; 0]$ و متزايدة على كل من المجالين $[0; +\infty[$ و $]-\infty; \alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0	$+\infty$	

(2) أـ تبين أن : $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$

لدينا : $g(\alpha) = 0$ أي $e^\alpha = \frac{\alpha^2 - \alpha}{2}$ ومنه $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 e^\alpha}{e^\alpha - \alpha} = \frac{\alpha^2 \left(\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} \right)}{\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} - \alpha} = \frac{\alpha^2(\alpha^2 + \alpha)}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{\alpha - 1}$

أي : $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$

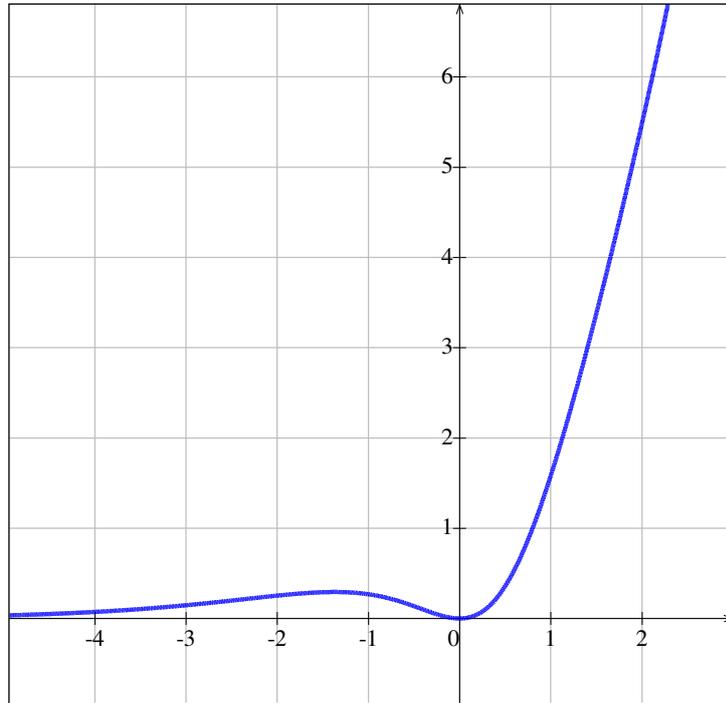
إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

لدينا : $-1,38 < \alpha < -1,37$ يكافئ $\begin{cases} -0,76 < 2\alpha + 2 < -0,74 \\ (-1,37)^2 < \alpha^2 < (-1,38)^2 \\ -2,38 < \alpha - 1 < -2,37 \\ -\frac{2}{2,37} < \frac{2}{\alpha - 1} < -\frac{2}{2,38} \end{cases}$ ومنه $0,27 < f(\alpha) < 0,32$

بـ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 e^x}{e^x - x} - x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^3} - \frac{1}{x^2}} \right) = 0$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) والمنحنى الممثل للدالة "مربع" $(x \mapsto x^2)$ متقاربان عند $+\infty$.

جـ الرسم :



(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$.
 1) تبيان أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x^2 e^{1-x}) = 2$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e \times x^2 e^{-x}) = 0$.

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x^2 e^{1-x}) = -\infty$$

(2) أ. الدالة قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f'(x) = -2xe^{1-x} + x^2 e^{1-x} = (x^2 - 2x)e^{1-x} = x(x-2)e^{1-x}$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x-2)$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

الدالة f متناقصة على المجال $[0; 2]$ و متزايدة على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[2; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	2	$2 - 4e^{-1}$	2

جدول تغيرات الدالة f :

(3) كتابة معادلة (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

لدينا: $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ومنه $(T): y = -x + 2$.

(II) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $h(x) = 1 - xe^{1-x}$.

(1) تبيان أنه من أجل كل x من \mathbb{R} ، $h(x) \geq 0$:

الدالة h قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x) = -e^{1-x} + xe^{1-x} = (x-1)e^{1-x}$ ،

إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+

الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$ و متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى على \mathbb{R} هي $h(1) = 0$ ومنه من أجل كل x من \mathbb{R} ، $h(x) \geq 0$.

• دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T) :

لدينا: $f(x) - y = 2 - x^2 e^{1-x} + x - 2 = x(1-x)e^{1-x} = xh(x)$.

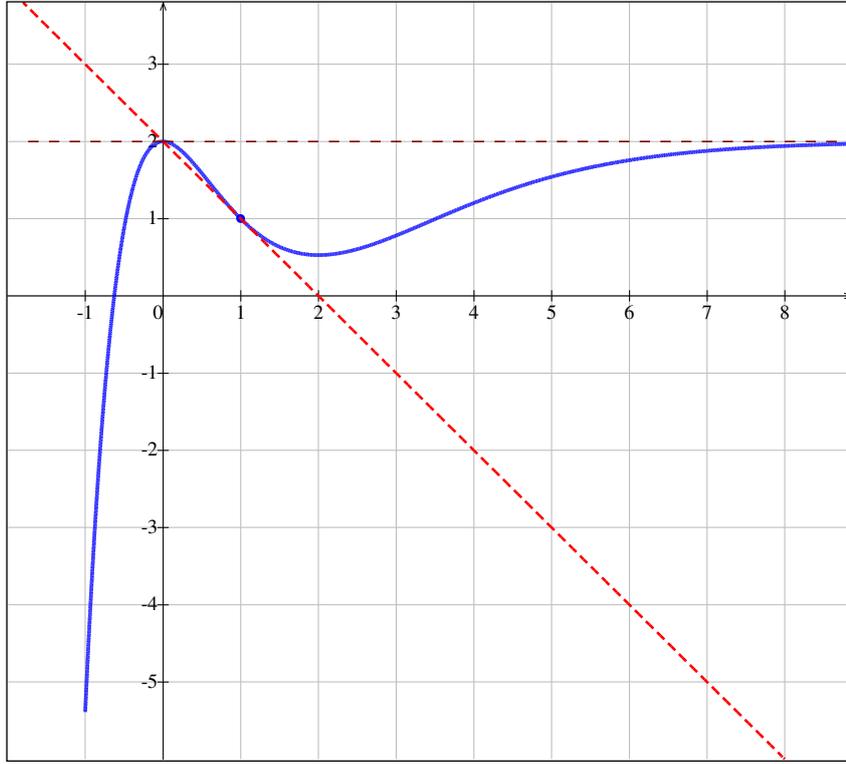
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+	+
الوضع النسبي		(C_f) تحت (T)	(C_f) فوق (T)	(C_f) فوق (T)
		(C_f) يقطع (T)	(C_f) يقطع (T)	

(2) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ و $]0; +\infty[$ و $f(-0,7) \approx -0,7$
 $f(-0,6) \approx 0,2$

أي $f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.



(4) الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$
 الدالة F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x :
 $F'(x) = 2 + (2x + 2)e^{1-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{1-x} = 2 - x^2e^{1-x} = f(x)$

10

حل مقترح للتمرين

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = x^2e^x - e$.

$$g(1) = e^1 - e = 0$$

- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

- إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(-x)$	+	0	-

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ : $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$.

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

(2) لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e}{x} \right) = 0$ و منه (C_f) والمنحنى (γ) ذي المعادلة $y = e^{-x} - 2$ متقاربان عند $-\infty$.

دراسة وضعيّة المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) : لدينا : $f(x) - y = -\frac{e}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (γ)		(C_f) تحت (γ)

$$(3) \text{ تبيان أنه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}^* , f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$$

الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ ومن أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم:

$$f'(x) = -e^{-x} + \frac{e}{x^2} = \frac{-x^2 e^{-x} + e}{x^2} = \frac{-(x^2 e^{-x} - e)}{x^2} = \frac{-g(-x)}{x^2}$$

إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(-x)$:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$

ومنه الدالة f متزايدة على كل من المجالين $]-1; 0[$ و $]0; +\infty[$ متناقصة على المجال $]-\infty; -1[$.

جدول تغيرات الدالة f :

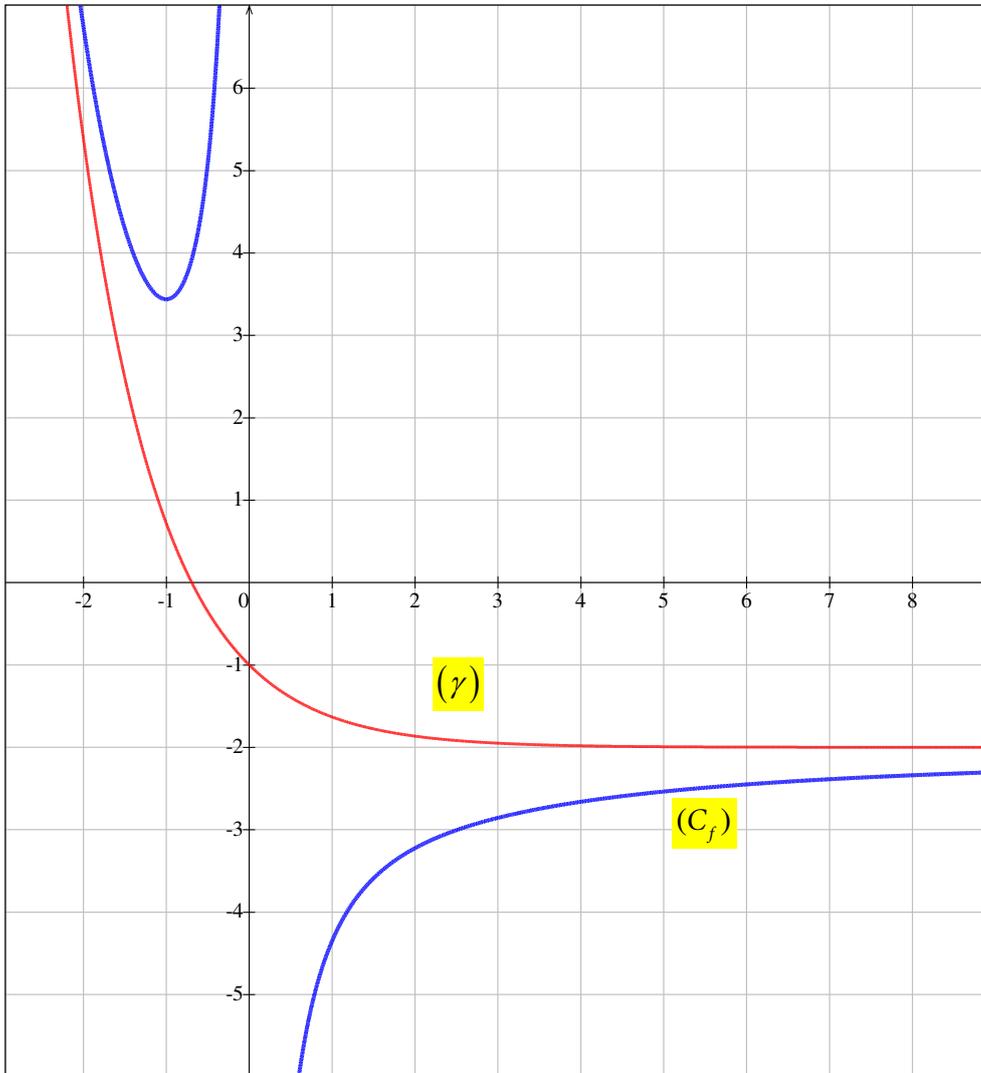
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$2e-2$	$+\infty$	$+\infty$

(4) شرح كيفية إنشاء المنحنى (γ) انطلاقاً من منحنى الدالة $x \mapsto e^x$:

لدينا: المنحنى ذي المعادلة $y = e^{-x} - 2$

ومنه (γ) هو صورة (Γ) منحنى الدالة $x \mapsto e^{-x}$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0; -2)$ ، علماً أن (Γ) هو نظير منحنى الدالة $x \mapsto e^x$ بالنسبة لحامل محور الترتيب.

الرسم:



(I) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$: حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty : \text{ لأن } , \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2 + (x-1)e^{-x}] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 : \text{ لأن } , \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 + (x-1)e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + xe^{-x} - e^{-x}) = 2$$

(2) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = e^{-x} + (-e^{-x})(x-1) = (2-x)e^{-x}$: لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x} > 0$ وبالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $2-x$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -

الدالة g متناقصة على المجال $[2; +\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty; 2]$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$		$2 + e^{-2}$	2

جدول تغيرات الدالة g :

(3) أ- تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38 < \alpha < -0.37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 2]$ و $]-\infty; 2]$ و $]-0.38; -0.37]$ و $g(-0.38) \approx -0,017$ و $g(-0.37) \approx 0,016$

أي $g(-0,38) \times g(-0,37) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.38 < \alpha < -0.37$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		-	0 +

(II) الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = 0 : \text{ لأن } , \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 + \frac{1}{x} - e^{-x} \right) \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0 \text{ ب-}$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) بحيث : $y = 2x + 1$: (Δ) .

لدينا : $f(x) - y = f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$		+	0 -
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x) = g(x)$ ،

الدالة f قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$. f'(x) = 2 + (-1)e^{-x} + (-e^{-x})(-x) = 2 + (x-1)e^{-x} = g(x)$$

- إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، ومنه نستنتج أن :

الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; \alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha; +\infty[$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$	

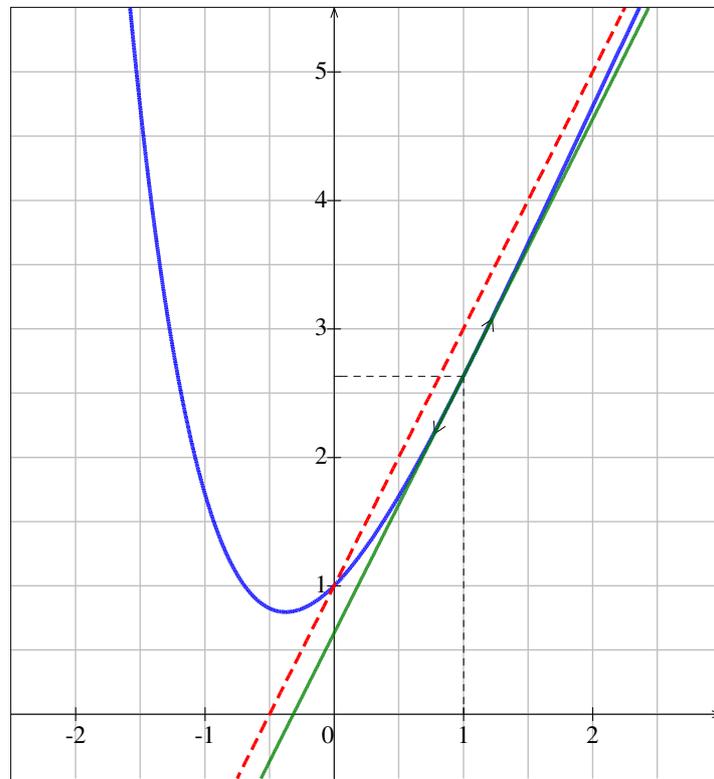
$f(\alpha)$

جدول تغيرات الدالة f :

(3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

لدينا : $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ و منه $(T) : y = 2x + 1 - \frac{1}{e}$.

(4) الرسم :



(5) المناقشة البيانية :

$$2x + 1 - xe^{-x} = 2x + 1 + m - 1 \text{ تكافئ } -xe^{-x} = m - 1 \text{ تكافئ } xe^{-x} = (1-m) \text{ تكافئ } x = (1-m)e^x$$

أي $f(x) = 2x + m$: أي $2x + 1 - xe^{-x} = 2x + m$ ← مناقشة ماثلة .

إذا كان $m \in]-\infty; 1 - \frac{1}{e}[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

إذا كان $m = 1 - \frac{1}{e}$ المعادلة تقبل حل مضاعف .

إذا كان $m \in]1 - \frac{1}{e}; 1[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما .

إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تقبل حل واحد معدوم .

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب تماما .

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

(1) أ- دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = e^x - e$.

إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$ و متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

ب- استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على المجال $[1; +\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$ فإن 0 قيمة حدية صغرى للدالة g .

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > 0$.

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = e^x - ex = g(x)$ ،

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) > 0$ ، وبالتالي الدالة f متزايدة على \mathbb{R} .

(3) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} \right) = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن ،} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{2}ex^2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}e \right) \right] = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}ex^2 \right) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن ،} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x - \frac{1}{2}ex^2 \right) = -\infty$$

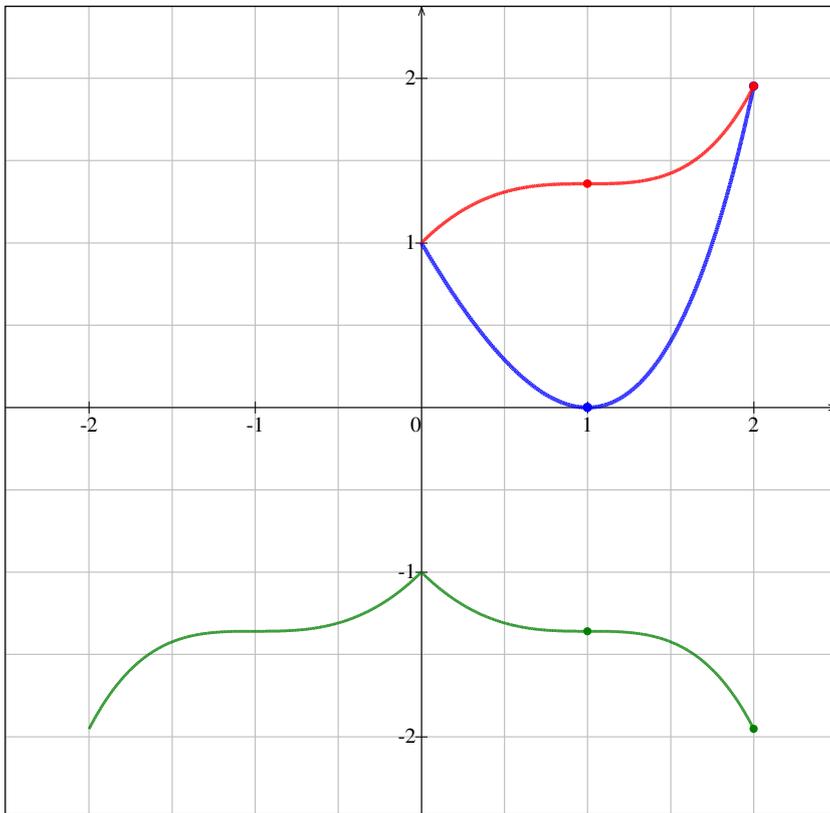
جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$

(4) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_g) و (C_f) على \mathbb{R} :

$$f(x) - g(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 - (e^x - ex) = -\frac{1}{2}ex^2 + ex = ex \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right) : \text{ من أجل كل عدد حقيقي } x$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x) - g(x)$		-	0	+
الوضع النسبي		(C_g) تحت (C_f)	(C_g) فوق (C_f)	(C_g) تحت (C_f)
		(C_f) يقطع (C_g)	(C_f) يقطع (C_g)	
		في النقطة $A(0; 1)$	في النقطة $B(2; e^2 - 2e)$	



(6) $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ كما يلي : المعرفة على المجال $[-2; 2]$

أ- تبيان أن الدالة h زوجية :

$$h(-x) = \frac{1}{2}e(-x)^2 - e^{|-x|} = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|} = h(x) \text{ و } -x \in [-2; 2], x \in [-2; 2]$$

ومنه الدالة h زوجية .

$$b- \text{ من أجل } x \in [0; 2] \text{ ، } h(x) + f(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^x + e^x - \frac{1}{2}ex^2 = 0$$

استنتاج كيفية رسم (Γ) إنطلاقاً من (C_f) :

من أجل $x \in [0; 2]$ ، $h(x) = -f(x)$ ، وبالتالي (Γ) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $[0; 2]$.
ولرسم (Γ) على المجال $[-2; 0]$ نستخدم كون الدالة h زوجية .
الرسم : أنظر الشكل .

13

حل مقترح للتمرين

(I) بقراءة بيانية :

(1) التبرير : من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x - x > 0$ ، لأن (γ) يقع فوق (Δ) على \mathbb{R} .

(2) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

(II) f الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{e^x - x}$

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \text{ ، لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-1 + \frac{2e^x}{e^x(1 - xe^{-x})} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-1 + \frac{2}{1 - xe^{-x}} \right] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-1 + \frac{2e^x}{e^x - x} \right] = -1$$

التفسير البياني : المستقيمان اللذان معادلتهما $y = -1$ و $y = 1$ مقاربان للمنحنى (C_f) .
 (2) أ الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل عدد حقيقي x يكون :

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - x) - 2e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$$

ب- إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-x)$ وبالتالي : الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1]$ و متناقصة على المجال $[1; +\infty[$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		$+$	$-$
$f(x)$		$f(1)$	
	-1		1

جدول تغيرات الدالة f :

$$f(1) = \frac{e+1}{e-1} \approx 2.16 \text{ مع}$$

(3) أ- كتابة معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0 :

لدينا : $(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ و منه $(T) : y = 2x+1$

ب- من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) - (2x+1) = -2 - 2x + \frac{2e^x}{e^x - x} = \frac{(-2-2x)(e^x - x) + 2e^x}{e^x - x} = \frac{2x^2 + 2x - 2xe^x}{e^x - x} = \frac{g(x)}{e^x - x}$$

ج- الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) : إشارة الفرق $f(x) - (2x+1)$ من إشارة $g(x)$ وبالتالي :

• المنحنى (C_f) فوق (T) على المجال $]-\infty; 0[$.

• المنحنى (C_f) تحت (T) على المجال $]0; +\infty[$.

• المنحنى (C_f) يقطع (T) في النقطة $A(0;1)$.

• النقطة A هي نقطة إنعطاق للمنحنى (C_f) .

(4) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 1]$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1]$ و $f(1) \approx 2.16$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 1]$.

(5) التحقق أن : $-0.6 < \alpha < -0.5$.

لدينا : $f(-0.6) \approx -0.04$ و $f(-0.5) \approx 0.09$ أي $f(-0.6) \times f(-0.5) < 0$ و منه $-0.6 < \alpha < -0.5$.

(6) الرسم :

